費用関数が非単調な場合の進化的混雑料金制度

長江 剛志[1]

[1]正会員 博士 (情報科学) 准教授 東北大学工学研究科 (〒 982-8579 仙台市青葉区字青葉 6-6-11)

本稿では，Sandholm(2002, 2005) によって提案された進化的混雑料金が，より一般形な枠組においても適用できることを明らかにする．具体的には，費用関数が非対称な場合や非単調な場合においても，進化的混雑料金制度の下では自然な day-to-day ダイナミクスの下でシステム最適配分が大域的安定となることを明らかにする．さらに，費用関数が非単調な場合，古典的な固定的混雑料金制度の下ではシステム最適配分が大域的安定とならない例を示す．これにより，進化的料金制度の優位性が明らかにされる．

Key Words : 進化的混雑料金，利用者均衡配分，システム最適配分，非単調費用関数，*day-to-day* ダイナミクス

1. はじめに

限界費用原理に基づく混雑料金制度には多くの研究蓄積[1),2),3),4)] が存在する．この制度下では，全てのリンクに適切な料金が課金できるならば，利用者均衡 (UE: *user equilibrium*) 状態がシステム最適 (SO: *system optimal*) 配分に一致することが保証される．しかしながら，適切な料金の決定には SO 配分を解くこと，ひいてはそのための入力として，直接観測することが困難な利用者の選好に関する私的情報 (e.g. OD 需要，時間価値，etc.) が必要である．

Sandholm は，こうした情報の非対称性を解消する施策の 1 つとして，進化的混雑料金制度を提案している[5),6)]．この制度は，日々観測される交通量に応じて料金を修正することで，日々の交通量調整 (day-to-day ダイナミクス) を通じてフローパターンを SO 配分へと収束させるものである．しかしながら，そこでの分析は UE 配分が *potential game* (PG) [7)] となる (ie. UE 配分と等価な最適化問題を構築できる) ケースに限定されていた．

そこで，本稿では，進化的混雑料金制度を，より一般的な枠組においても，その (固定的料金制度に対する) 優位性を失わないことを明らかにする．具体的には，リンク費用関数の Jacobian が非対称なケースや，リンク費用関数が非単調なケースにおいても，進化的混雑料金が SO 配分を (day-to-day ダイナミクスの収束点として) 実現させることを示す．特に，リンク費用関数が単調でない場合，SO 配分が，古典的な (固定的) 混雑料金の下では大域的安定とならないが，進化的混雑料金の下では大域的安定となるケースがあることを明らかにする．

2. モデル

単一の起終点 (OD: *origin-destination*) ペアを結ぶ L 本のリンクで構成されるパラレル・リンク・ネットワークを考え，そのリンク集合を L で表す．起終点間をトリップする利用者は，それぞれ，M 種類の車両タイプのいずれかを利用するとし，車両タイプは変更できないと仮定する．車両タイプ集合を $M := \{1, \cdots, \mathrm{M}\}$ で表し，タイプ m 利用者の OD 需要 (ie. 単位時間あたりの利用者数) を q^m で表す．リンク a を利用するタイプ m の単位時間あたりの利用者 (タイプ m リンク・フロー) を x_i^m で表す．以下では，必要に応じて，リンク a 上のフローパターン $\boldsymbol{x}_i := \{x_i^m : m \in M\}$, ネットワーク上のフローパターン $\boldsymbol{x} := \{\boldsymbol{x}_i : i \in L\}$ なるベクトル表現を利用する．フローパターンの許容集合 (feasible set) は，以下のように定義される：

$$\Omega_{\boldsymbol{x}} := \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathcal{R}_+^{\mathrm{ML}} : \sum_{i \in L} x_i^m = q^m,\ \forall m \in M \right\} \tag{1}$$

リンク $i \in L$ 上のタイプ m 利用者にとっての交通費用を，フローパターン $\boldsymbol{x}$ についての C^1 関数 $t_i^m(\boldsymbol{x}), t_i^m : \Omega_{\boldsymbol{x}} \to \mathcal{R}_+$ で表す．以下では，交通費用を，$t_i^m(\boldsymbol{x})$ を要素とするベクトル写像 $\boldsymbol{t} : \Omega_{\boldsymbol{x}} \to \mathcal{R}_+^{\mathrm{L}}$ を用いても表す．

リンクコスト関数 $\boldsymbol{t}$ が与えられたとき，このネットワークにおいて，利用者均衡 (UE: *user equilibrium*) 状態は，以下のように定義される．

定義 1 (利用者均衡状態)**.** フローパターン $\boldsymbol{x} \in \Omega_{\boldsymbol{x}}$ は以下の条件を満足するとき**利用者均衡**であるといい，$\boldsymbol{x} \in \mathrm{UE}(\boldsymbol{t})$ と表す．

$$\begin{cases} x_i^m > 0 & \Rightarrow t_i^m(\boldsymbol{x}) = \rho^m, \\ x_i^m = 0 & \Leftarrow t_i^m(\boldsymbol{x}) > \rho^m \end{cases} \tag{2}$$

ここで，$\rho^m > 0$ はタイプ m 利用者にとっての均衡費用と呼ばれる．以下では，$\boldsymbol{\rho} := \{\rho^m\}$ なるベクトル表現を適宜用いる．利用者均衡条件 (2) は，以下の相補性問題としても表現できる．

Find $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\rho}) \in \Omega_{\boldsymbol{x}} \times \mathcal{R}^{\mathrm{M}}$ such that

$$\begin{cases} x_i^m \left\{ t_i^m(\boldsymbol{x}) - \rho^m \right\} = 0, \\ x_i^m \geq 0, \quad t_i^m(\boldsymbol{x}) - \rho^m \geq 0 \end{cases} \quad \forall i \in L, \forall m \in M, \tag{3a}$$

$$\begin{cases} \rho^m \left\{ \sum_{i \in L} x_i^m - q^m \right\} = 0, \\ \rho^m > 0, \quad \sum_{i \in L} x_i^m - q^m = 0 \end{cases} \quad \forall m \in M. \tag{3b}$$

フローパターンが $\boldsymbol{x}$ であるとき，ネットワーク全体の総走行費用を

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{x}) := \sum_{m \in M} \sum_{i \in L} x_i^m t_i^m(\boldsymbol{x}) \tag{4}$$

と定義する．総走行費用の意味で最も効率的な交通配分をシステム最適 (SO: *system optimal*) と呼び，以下のように定義される．

定義 2 (システム最適状態)**.** フローパターン $\boldsymbol{x}$ が以下の条件を満足するとき，$\boldsymbol{x}$ はシステム最適であるという：

$$\boldsymbol{x} \in \arg\min_{\boldsymbol{x} \in \Omega_{\boldsymbol{x}}} \sum_{m \in M} \sum_{i \in L} \mathcal{J}(\boldsymbol{x}) \tag{5}$$

SO 配分問題の Karush-Kuhn-Tucker 条件 (最適性の一次の必要条件) は，フロー保存条件 $\sum_i x_i^m = q^m$ に対する Lagrange 乗数を ρ^m とおけば，以下の相補性問題として記述できる．

$$\begin{cases} x_i^m \cdot \left\{ t_i^m(\boldsymbol{x}) + \sum_{j \in L} \sum_{n \in M} x_j^n \dfrac{\partial t_j^n}{\partial x_i^m}(\boldsymbol{x}) - \rho^m \right\} = 0, \\ x_i^m \geq 0, \quad t_i^m(\boldsymbol{x}) + \sum_{j \in L} \sum_{n \in M} x_j^n \dfrac{\partial t_j^n}{\partial x_i^m}(\boldsymbol{x}) - \rho^m \geq 0 \end{cases}, \tag{6a}$$

$\forall i \in L, \forall m \in M,$

$$\begin{cases} \rho^m \cdot \{ \sum_{i \in L} x_i - q^m \} = 0 \\ \rho^m > 0, \quad \sum_{i \in L} x_i - q^m = 0 \end{cases} \quad \forall m \in M \tag{6b}$$

ここで，相補性問題として表現された利用者均衡配分モデル (3) と SO 配分モデル (6) は，ある一点を除いては等価である：SO 配分モデルにおいては，リンク i 上のタイプ m 利用者の費用 $t_i^m(\boldsymbol{x})$ に当該リンク上を流れるフローがもたらす外部性 $\sum_j \sum_n x_j^n \frac{\partial t_j^n}{\partial x_i^m}(\boldsymbol{x})$ が「上乗せ」されている．したがって，この外部性に相当する料金をリンク i のタイプ m 利用者にそれぞれ賦課すれば，その下での UE 配分が SO 配分に一致するはずである，というのが混雑料金制度の基本的発想である．

3. 進化的混雑料金制度

進化的混雑料金制度では，観測される交通量に応じて各リンクに料金が賦課される．具体的には，フローパターンが $\boldsymbol{x}$ であるとき，リンク i 上のタイプ m 利用者に対して

$$\lambda_i^m(\boldsymbol{x}) := \sum_{n \in M} \sum_{j \in J} x_j^n \frac{\partial t_j^n}{\partial x_i^m}(\boldsymbol{x}) \tag{7}$$

だけの料金を徴収する．いま，課金後の費用関数を $\hat{t}_i^m(\boldsymbol{x}) := t_i^m(\boldsymbol{x}) + \lambda_i^m(\boldsymbol{x}), \hat{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{x}) := \{\hat{t}_i^m(\boldsymbol{x})\}$ とするとき，課金後の混雑ゲーム $\hat{\boldsymbol{t}}$ は，課金前の混雑ゲーム $\boldsymbol{t}$ が PG であるか否かに関わらず，総走行費用 $\mathcal{J}(\boldsymbol{x})$ をポテンシャル関数とする PG となる[1]．

これより，直ちに，以下の定理が成立する．

定理 3 (進化的混雑料金の大域的安定性)**.** *SO* 配分モデル (5) の解が唯一であるならば，進化的混雑料金制度 (7) の下での課金後の費用関数 $\hat{\boldsymbol{t}}$ について *admissible* なダイナミクス $\boldsymbol{V} : \Omega_{\boldsymbol{x}} \to \partial\Omega_{\boldsymbol{x}}$ によって生成される任意の解経路 $\{\boldsymbol{x}(t) | \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}(0)$ *is given*$\}$ が *SO* 配分に収束する．

ここで，admissible なダイナミクスは以下のように定義される．

定義 4. ダイナミクス $\boldsymbol{V} : \Omega_{\boldsymbol{x}} \to \partial\Omega_{\boldsymbol{x}}$ が下記を満足するとき，ゲーム $\boldsymbol{F}$ について，admissible であるという．

1. $\boldsymbol{V}$ は Lipschitz 連続である
2. $x_i^m = 0$ ならば， 常に $V_i^m(\boldsymbol{x}) \geq 0$ である．
3. 任意の $\boldsymbol{x} \in \Omega_{\boldsymbol{x}}, m \in M$ について，$\sum_{i \in L} V_i^m(\boldsymbol{x}) = 0$
4. $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) > 0$
5. $\boldsymbol{x} \in \mathrm{UE}(\boldsymbol{F}) \Rightarrow \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$.

4. 費用関数が非単調な場合

$L = \{1, 2\}, M = \{1\}$ のケースで，OD 需要が $q = 1$ である場合を考える．リンク費用関数が以下の式で表されるとする：

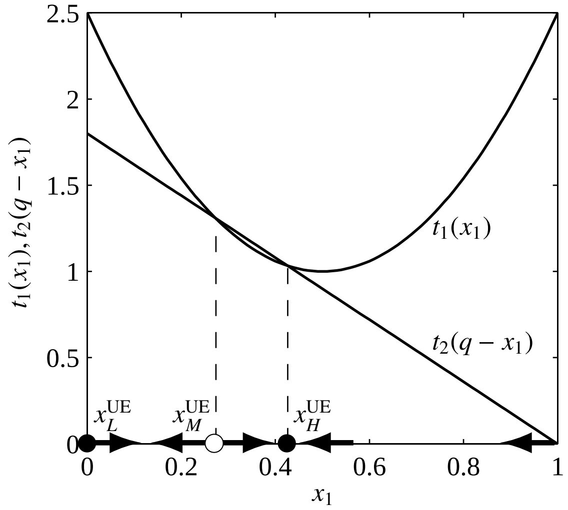
$$t_1(\boldsymbol{x}) = 6(x_1 - 0.5)^2 + 1, \qquad t_2(\boldsymbol{x}) = 1.8 x_2 \tag{8}$$

図 1 は，横軸にリンク 1 のフロー x_1 を，縦軸に各リンクの費用 $t_1(x_1), t_2(x_2) = t_2(q - x_1)$ を，それぞれプロットしたものである．この例では，以下の 3 つの利用者均衡状態が存在する：

$$x_L^{\mathrm{UE}} = 0, \qquad x_M^{\mathrm{UE}} = 0.273, \qquad x_H^{\mathrm{UE}} = 0.426 \tag{9}$$

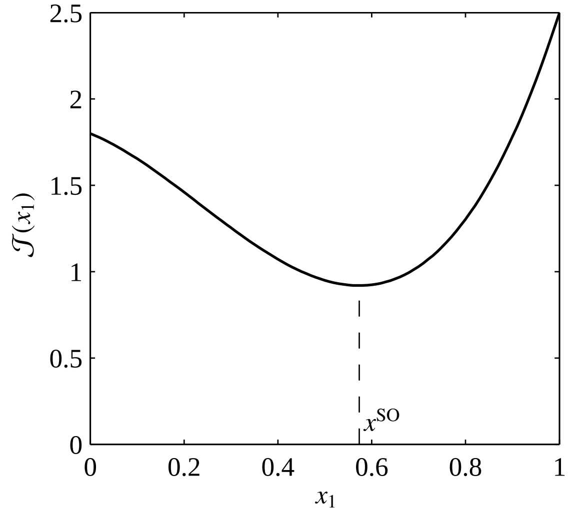
図 1 の x 軸上の矢印は, それぞれ, 自然なダイナミクスの下でのフローパターンの変化方向を表す：$x \in [x_M^{\mathrm{UE}}, x_H^{\mathrm{UE}}]$ の範囲ではリンク 1 の方がコストが小さいため x_1 は増加するが，それ以外の範囲ではリンク 1 の方がコストが大きいため x_1 は減少する．これより，x_L^{UE} と x_H^{UE} は安定均衡であり，x_M^{UE} は不安定均衡であると言える．

[1] このことは，Sandholm[5),6)] では明言されていない．



図–1 リンク費用関数の例

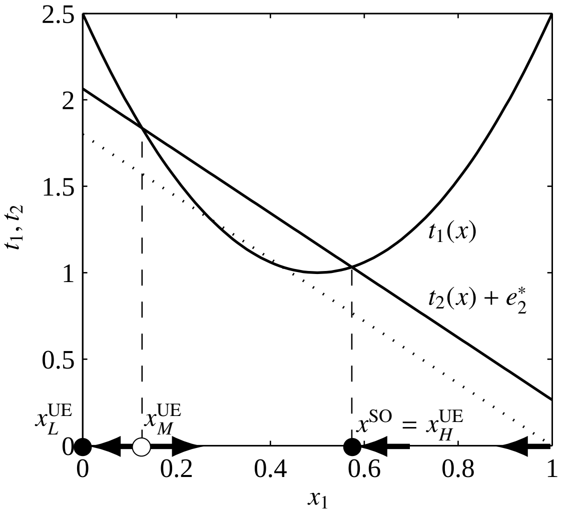
図 2 は，総走行費用 $\mathcal{J}(\boldsymbol{x})$ をリンク 1 の交通量 x_1 の関数としてプロットしたものである．この図において，総走行費用を最小化する SO 配分は $x^{\mathrm{SO}} = 0.573$ である．



配分

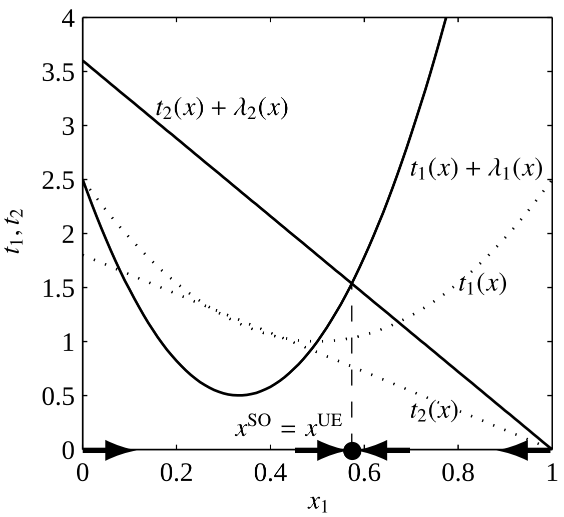
図–2 総走行費用とシステム最適

この例においては，従来の "固定的" 混雑料金制度では，SO 配分を大域的安定的に実現するような料金は存在しない．もちろん，リンク 2 に $e_2^* = 0.264$ だけの料金を賦課すれば，図 3 のように，リンク 2 の費用関数を上方にシフトさせ，安定均衡状態の 1 つとして SO 配分を実現することは可能である．しかし，フローパターンの初期値が x_M^{UE} より小さい場合には，この不安定均衡点を "飛び超す" ようなダイナミクスを仮定しない限り，フローパターンは SO 配分には収束しない．



図–3 固定的混雑料金制度の場合

一方，進化的混雑料金制度の下では，各リンクの費用関数と料金の和は，図 4 に示すように，社会的限界費用と完全に一致する．このとき，利用者均衡状態は $x^{\mathrm{UE}} = x^{\mathrm{SO}}$ ただ一つであり，いかなる初期状態からも，自然なダイナミクスの下で SO 配分への大域的収束が保証される．



図–4 進化的料金制度の場合

5. おわりに

本稿では，Sandholm[5),6)] によって提案された進化的混雑料金制度が，費用関数の Jacobian が非対称な場合や，費用関数が非単調な場合を含む，より一般的な枠

組においても，その (固定的混雑料金制度に対する) 優位性を失わないことを明らかにした．具体的には，進化的混雑料金制度の下では，課金前の利用者均衡配分モデルが PG になるか否かに関わらず，SO 配分が自然なダイナミクスの大域的安定点として実現することを明らかにした．さらに，費用関数が非単調な一般的なケースにおいては，固定的料金制度の下では SO 配分を大域的安定とするような料金が存在しないのに対して，進化的料金制度の下では SO 配分が大域的安定点として実現する例を示した．

参考文献

1) Mohring, H. and Hartwiz, M.: *Highway Benefits: An Analytical Approach*, Northwestern University Press, 1962.
2) Button, K. and Verhoef, E.: *Road pricing, traffic congestion and the environment: Issues of efficiency and social feasibility*, Edward Elgar Publishing, 1998.
3) Yang, H. and Huang, H.: *Mathematical and economic theory of road pricing*, Elsevier, Oxford, 2005.
4) Small, K. and Verhoef, E.: *The economics of urban transportation*, Routledge, 2007.
5) Sandholm, W. H.: Evolutionary implementation and congestion pricing, *Review of Economic Studies*, Vol. 69, pp. 667–689, 2002.
6) Sandholm, W. H.: Negative externalities and evolutionary implementation, *Review of Economic Studies*, Vol. 72, pp. 885–915, 2005.
7) Sandholm, W.: Potential games with continuous player sets, *Journal of Economic Theory*, Vol. 97, pp. 81–108, 2001.

Evolutionary Congestion Pricing with Non-monotone Cost Functions

Takeshi NAGAE