

# 動学的確率的一般均衡モデルの時変パラメータ 推定による財政政策の効果分析

加藤 裕人<sup>1</sup>・宮城 俊彦<sup>2</sup>

<sup>1</sup>学生会員 東北大学大学院 情報科学研究科 (〒980-8579宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-6)

E-mail: kato@plan.civil.tohoku.ac.jp

<sup>2</sup>正会員 東北大学大学院 情報科学研究科 (〒980-8579宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-6)

E-mail:toshi\_miyagi@plan.civil.tohoku.ac.jp

本稿では、財政政策の景気刺激策としての有効性を調べるために、公共投資と社会資本を考慮したDSGEモデルを構築し分析を行う。モデルにTime-to-buildラグのある公共投資や非リカードの家計を導入することで、財政政策の効果が現れる条件を検証する。また、現実経済に即した分析を行うため、時系列データを取り込んでモデルのパラメータを推定するが、パラメータの時系列変化を考慮し、粒子フィルター及び自己組織化状態空間モデルによる時変パラメータ推定を行う。パラメータを時変と捉えることで、経済構造や政策の変化に対応した分析が可能となり、実施された財政政策が経済へ及ぼす影響を調べることができる。

**Key Words :** *public investment, DSGE model, fiscal policy, time-varying estimation, particle filter*

## 1. はじめに

我が国の公共投資は、震災復興計画に始まり、その後の経済成長を支える駆動輪として積極的に実施されてきた。その背景には、他の先進諸国と比較して社会資本が不足しているという事実、そして経済成長には道路等を含めた社会基盤の整備が不可欠であるという認識があり、公共投資の対 GDP 比は第二次世界大戦後、一貫して他の先進諸国に比べて高い水準を保っていた。社会資本の量的整備が進み、生産活動や国民の厚生の上昇に大きく貢献してきた一方、1990年代の不況時には財政政策の手段として公共投資が活用された。しかし、度重なる景気回復策を実施したにも関わらず、本格的な景気回復に結びつかなかったため、公共投資の財政政策としての効果に対する疑問の声も少なくない。その中には、公共事業自体に対する批判も含まれている。公共投資の増大は景気の拡大をもたらすとの主張がある一方、我が国の財政赤字の膨らみは緊迫した状況でもある。そのため、リーマンショックに端を発する世界的な不況時に、各国は財政出動を大きく展開した中で、日本政府は消極的な姿勢をとった。これまで、財政政策の有効性は常に議論されてきたものの、その是非も両端に分かれ、一致した見解には達していないと言える。

本研究では時系列データを取り込んだモデルを用いて、

過去の財政政策の効果を検証し、財政政策がいかなる条件のもとに、どの程度有効に効果が現れるのかを分析する。特に公共支出のうちの公共投資が他のマクロ経済変数に与える影響、例えば社会資本の生産力効果や民間投資のクラウドディングアウト効果等を調べる。また、政策の必要性が認識されてから実行に移されるまでの過程や、社会資本として利用可能になるまでの蓄積ラグを考慮し、Time-to-build<sup>1)</sup>ラグのある公共投資をモデルに取り入れ、公共投資の実施タイミングや量について考察する。

## 2. DSGE モデルによる財政政策の分析

近年、経済政策の分析ツールとして発展している動学的確率的一般均衡(Dynamic Stochastic General Equilibrium: DSGE)モデルが共通のプラットフォームとして認識されている。現在、Christiano et al.<sup>2)</sup>、Smets et al.<sup>3)</sup>が標準的なモデルとして、各国の政府や中央銀行に使用されている。これまでのDSGEモデル分析の例を見ると、金融政策がほとんどであり財政政策に焦点を当てている文献は少ない。また、標準的なモデルでは、財政出動に対して民間消費が負の反応を示し、財政政策が有効にならないという「政府支出パズル」<sup>4)</sup>が発生してしまう。江口<sup>5)</sup>ではモデルに、生産に寄与する社会資本と非リカードの家計を導入することによって「政府支出パズル」を解消してい

る。しかし、江口<sup>5)</sup>において、政府支出はすべて公共投資と限定しており、蓄積された社会資本の生産力効果が大きく現れているが、これは現実的な仮定であるとは言えない。また、モデルから出力されるシミュレーションの結果は、モデルのパラメーターに大きく依存するため、適切な値を設定する必要がある。従来では主に、既存研究を参考に設定する、あるいはキャリブレーション法によって設定するという方法がとられていた。DSGEモデル、もしくはその出発点となるReal Business Cycle (RBC) モデルは長い歴史を持つが、計量経済分析と連携したモデル分析が行えるようになったのは比較的最近のことである。その中で、カルマンフィルターを用いた最尤法によるパラメーター推定法<sup>6)</sup>や、DSGEモデル自体をMCMCによってベイズ推計する方法<sup>7)</sup>が主流となっている。これらの手法では、モデルのパラメーターをディープ(不時変)として扱うのみであるため、推定期間が長く、さらには経済構造の変化が大きい期間を推定対象としている場合、パラメーターの値は不安定なものとなる。つまり、何かしらの経済ショックや行動様式の変化が起きた際や、経済政策の変更が行われた際に、モデルのパラメーターも当然変化するものとする。そのため、財政政策の分析にはパラメーターの時変推定を行う必要があり、さらに、ミクロ的基礎付けを持つDSGEモデルが対応した「Lucas批判」<sup>8)</sup>の意図をより一層掴むことができる。

### 3. モデルの構築

江口<sup>5)</sup>、Leeper et al.<sup>9)</sup>を参考にして、標準的なDSGEモデルに、Time-to-buildの公共投資、非リカード家計の導入を行う。モデルに存在する経済主体は家計、企業、政府であり、 $1-\omega$ の割合の異時点間の最適化を行うリカードの家計と、 $\omega$ の割合の非リカードの家計が存在すると想定する。

#### (1) 家計

はじめに、リカードの家計は予算制約と資本への投資を制約条件として、生涯期待効用を最大化させる。消費の習慣形成を考慮し、家計は現在と一期前の消費行動と余暇によって効用を得る。

$$E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[ \frac{1}{1-e} \left( \frac{C_t^o}{C_{t-1}^{ob}} \right)^{1-e} + \chi \frac{(1-L_t^o)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \right] \quad (1)$$

ここで、 $C_t$ は民間消費、 $L_t$ は労働量、 $\beta^t$ は時間的割引率、 $e, \theta, \chi$ は効用関数のパラメーターである。予算制約式と民間資本の蓄積式は以下のように与えられる。

$$C_t^o + I_t^o + B_t^o = w_t L_t^o + r_t u_t K_{t-1}^o + R_{t-1} B_{t-1}^o - \tau_t^o \quad (2)$$

$$K_t^o = (1-\delta)K_{t-1}^o + \Omega(I_t^o, I_{t-1}^o) \quad (3)$$

ここで、 $I_t$ は民間投資、 $B_t$ は国債、 $w_t$ は賃金率、 $r_t$ は資本のレンタル料、 $R_t$ は国債の利子率、 $\tau_t^o$ は家計に課される一括税である。また、民間投資は調整コストが付加されると想定し、 $\Gamma$ は投資の調整コスト関数である。

$$\Omega(I_t, I_{t-1}) \equiv [1 - \Gamma(I_t/I_{t-1})] \times I_t \quad (4)$$

一方、非リカードの家計は、異時点間の最適化は行わず、毎期の可処分所得を全て消費する。よって、任意の $t$ 期において、

$$C_t^r = w_t L_t^r - \tau_t^r \quad (5)$$

が成り立つ。労働供給に関しては、非リカードの家計と同じだけ働くものとする。

それぞれの割合で存在する二つの家計の変数を集計するが、貯蓄行動を行うのはリカードの家計のみなので、 $I_t, K_t, B_t$ についてはリカードの家計のみが集計される。

$$C_t = \omega C_t^r + (1-\omega)C_t^o \quad (6)$$

$$L_t = \omega L_t^r + (1-\omega)L_t^o \quad (7)$$

$$\tau_t = \omega \tau_t^r + (1-\omega)\tau_t^o \quad (8)$$

$$I_t = (1-\omega)I_t^o \quad (9)$$

$$K_t = (1-\omega)K_t^o \quad (10)$$

$$B_t = (1-\omega)B_t^o \quad (11)$$

#### (2) 企業

代表的企業はコブダグラス型生産関数に基づき財を生産する。この生産関数において、民間資本と社会資本は $t+1$ 期に生産に関わり、 $u_t K_t$ は民間資本の稼働に関する割合を表す。

$$Y_t = z_t (u_t K_{t-1})^{\alpha_K} (L_t)^{\alpha_L} (K_{t-1}^G)^{\alpha_G} \quad (12)$$

ここで、 $K_t^G$ は社会資本、 $\alpha_K, \alpha_L, \alpha_G$ はそれぞれ民間資本、労働、社会資本の生産弾力性、 $z_t$ は技術進歩過程である。

それぞれの期間で、企業は以下の利潤を最大化させる。

$$Y_t - r_t u_t K_{t-1} - w_t L_t \quad (13)$$

### (3) 政府

政府は以下の予算制約のもとに消費財  $G_t^C$  と投資財  $G_t^I$  を購入する。

$$\tau_t + B_t = G_t^C + G_t^I + R_{t-1}B_{t-1} \quad (14)$$

社会資本の蓄積過程において、変数  $A_t^I$  は公共投資の認可された予算を表し、 $N$  は投資プロジェクトが完結するまでの四半期数を表している。

$$K_t^G = (1 - \delta_G)K_{t-1}^G + A_{t-N-1}^I \quad (15)$$

予算の付与は一次の自己回帰過程に従うとする。

$$\hat{A}_t^I = \rho_I \hat{A}_{t-1}^I + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2) \quad (16)$$

認可された公共投資の量が支出と乖離し得る状況を表現すると、 $t$  期に実現する公共投資は以下のように与えられる。

$$G_t^I = \sum_{n=0}^{N-1} \phi_n A_{t-n}^I \quad \left( \sum_{n=0}^{N-1} \phi_n = 1 \right) \quad (17)$$

### (4) 外生ショックと政策ルール

技術進歩過程、政府消費、税制ルールは、 $\rho_z, \rho_G$  を自己回帰パラメーター、 $\varepsilon_{zt}, \varepsilon_{Gt}, \varepsilon_{\tau t}$  を確率的誤差項として以下のように与えられる。

$$z_t = \rho_z z_{t-1} + \varepsilon_{zt} \quad (18)$$

$$G_t^C = \rho_G G_{t-1}^C + \varepsilon_{Gt} \quad (19)$$

$$\tau_t = \phi_b b_{t-1} + \varepsilon_{\tau t} \quad (20)$$

### (5) 状態空間表現

上記の定式化したモデルを、標準的なモデルの解法<sup>10,11</sup>に従い、合理的期待解を導出する。このとき、得られる均衡条件式の状態空間表現は以下ようになる。

$$s_{t+1} = \Pi(\theta)s_t + \varepsilon_t \quad (21)$$

$$f_t = U(\theta)s_t \quad (22)$$

ここで、 $\Pi$  と  $U$  はモデルのパラメーターの集合  $\theta$  から成るシステムパラメーター行列であり、 $s_t$  は状態ベクトル、 $f_t$  は観測ベクトル、 $\varepsilon_t$  はシステムノイズである。ただし、対数線形化後の変数は、定常状態からの乖離率を表す。また、状態ベクトルの各変数は観測されることを前提としていない隠れ状態変数である。

## 4. 時変パラメータ推定

多くの既存研究では、モデルのパラメーターをデー

プ(不時変)と想定しているが、分析の結果はパラメーターの値に大きく依り、時間的変化を捉えることができていることに加え、経済のトレンドブレイクや政策の変更に対応できていない。時変パラメーターを採用することで、パラメーターの安定性も同時に観察することができる。推定には、Kitagawa<sup>12</sup>によって提案された高次元の非線形非ガウス型状態空間モデルにおけるフィルタリング及び平滑化の推定アルゴリズムである粒子フィルターを用いる。この方法では、分布関数を多数の粒子から計算される経験分布関数によって近似することで、状態空間モデルに対する推定アルゴリズムが得られる。粒子フィルターを用いた DSGE モデルのパラメーター推定は Fernandez-Villaverde et al.<sup>13</sup>, Yano<sup>14</sup>などで提案されているが、今回は自己組織化状態空間モデルを組み合わせた推定法である Yano<sup>14</sup>の方法を用いる。この方法では、フィルタリング推定を行うため、合理的期待理論に即した推定となる。

### (1) 粒子フィルター

観測データ  $y_t$  から状態ベクトル  $x_t$  と未知のパラメーター  $\theta = [\xi_s, \xi_m]$  を推定するために、状態方程式と観測方程式からなる状態空間モデルを考える。

$$x_t = f(x_{t-1}, \xi_s, v_t) \quad (23)$$

$$y_t = h(x_t, \xi_m, \varepsilon_t) \quad (24)$$

ただし、 $v_t$  はシステムノイズ、 $\varepsilon_t$  は観測ノイズであり、密度関数はそれぞれ  $q(v), r(\varepsilon)$  である。上式は

$p(x_t | x_{t-1})$  が状態方程式で、 $p(y_t | x_t)$  が観測方程式で与えられることを意味する。 $Y_t = \{y_1, \dots, y_t\}$  を時刻  $t$  までに得られた観測値の集合として、状態推定は条件付き分布  $p(x_t | Y_t)$  を求める問題として定式化できる。ただし、状態推定では利用する観測情報に応じて分布はそれぞれ、予測分布  $p(x_t | Y_{t-1})$ 、フィルタ分布  $p(x_t | Y_t)$ 、平滑化分布  $p(x_t | Y_T)$  と定義される。

次に、ベイズの定理から以下の式が得られる。

$$p(x_t | Y_t) = \frac{p(y_t | x_t) p(x_t | Y_{t-1})}{p(y_t | Y_{t-1})} \quad (25)$$

ここで、 $p(x_t | Y_{t-1})$  を事前分布、 $p(y_t | x_t)$  を尤度、 $p(x_t | Y_t)$  を事後分布、 $p(y_t | Y_{t-1})$  を規格化定数と呼ぶ。粒子フィルターではフィルタ分布  $p(x_t | Y_t)$  を以下のように粒子を用いて近似する。

$$p(x_t | Y_t) \cong \sum_{i=1}^M w_t^i \delta(x_t - x_t^i) \quad (26)$$

ここで  $w_t^i$  は粒子  $x_t^i$  の重みを表し、 $M$  は粒子数、 $\delta$  は

ディラックのデルタ関数を表す。また、粒子の重み  $w_t^i$  は尤度に比例するように生成される。

$$w_t^i \propto p(y_t | x_t^i) \quad (27)$$

この後、リサンプリング後の粒子  $\hat{x}_t^i$  を用いてフィルタ分布  $p(x_t | Y_t)$  を以下のように近似する。

$$p(x_t | Y_t) \cong \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \delta(x_t - \hat{x}_t^i) \quad (28)$$

各ステップで、粒子  $x_t^i$  は以下に従ってモンテカルロ法を用いて得ることができる。

$$x_t^i \sim p(x_t | \hat{x}_{t-1}^i) \quad (29)$$

## (2) 自己組織化状態空間モデル

粒子フィルターを用いた場合、尤度にはサンプリングによる誤差が含まれるため、最尤法による繰り返しの数値最適化計算は不安定なものとなる。また、最尤法による正確なパラメータ推定は、膨大な粒子量を発生することが不可欠であるため、実現が難しい。Kitagawa<sup>15)</sup>によって提案された自己組織化状態空間モデルは、粒子フィルターの推定手順に存在するこれらの問題を緩和するような、状態空間モデルの状態推定とパラメータ推定をオンラインで同時に行う方法である。

Kitagawa<sup>15)</sup>による自己組織化状態空間モデルは以下の拡張状態方程式と拡張観測方程式から構成される。

$$z_t = F(z_{t-1}, v_t, \xi_s) \quad (30)$$

$$y_t = H(z_t, \varepsilon_t, \xi_m) \quad (31)$$

ここで

$$z_t = [x_t \quad \theta_t]' \quad (32)$$

$$F(z_{t-1}, v_t, \xi_s) = [f(x_{t-1}, v_t, \xi_s) \quad \theta_t]' \quad (33)$$

$$H(z_t, \varepsilon_t, \xi_m) = h(x_t, \varepsilon_t, \xi_m) \quad (34)$$

$$\theta_t = [\xi_s, \xi_m]' \quad (35)$$

である。状態ベクトルはパラメータを含んでいるため、粒子フィルターを自己組織化状態空間モデルに適用すれば尤度関数を最大化することなく状態推定とパラメータ推定を同時に行うことができる。

モデルのパラメータは以下のようなランダムウォークを仮定して時変推定する。

$$\theta_t = \theta_{t-1} + v_t, \quad v_t \sim q(v_t | \xi_s) \quad (36)$$

## 5. 推定結果・インパルスレスポンス分析

DSGEモデルでは、動学的な安定経路を解析するため、現実の経済の成長経路というより、安定的な平衡状態へ到達するプロセスを解析している。そのため、確率的な変化をモデルに与え、各変数がどのような影響を受けて定常状態へ収束するのかを分析することが中心的課題である。ここでは、公共投資の増大に対するインパルスレスポンス分析を行う。

### 参考文献

- 1) Kydland, F.K. and Prescott, E.C. : Time to Build and Aggregate Fluctuations, *Econometrica* 50, pp.1345-70, 1982.
- 2) Christiano, L. J. and Eichenbaum, M. and Evans, C. : Nominal Rigidities and the Dynamic Effects of a Shock to Monetary Policy, *Journal of Political Economy*, Vol.113, pp.1-45, 2005.
- 3) Smets, F. and Wouters, S. : An Estimated Dynamic General Equilibrium Model of the Euro Area, *Journal of European Economic Association*, Vol.1, pp.1123-75, 2003.
- 4) Blanchard, O. J. and Perotti, R. : An Empirical Characterization of Dynamic Effects of Change in Government Spending and Taxes on Output, *The Quarterly Journal of Economics*, Vol.117, pp.1329-68, 2002.
- 5) 江口允崇 : 動学的一般均衡モデルによる財政政策の分析, 三菱経済研究所, 2011.
- 6) Ireland, P. N. : A Method for Taking Models to the Data, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 24, pp. 1205-26, 2004.
- 7) An, S. and Schorfheide, F. : Bayesian analysis of DSGE models, *Economic Reviews*, Vol.26, pp113-72, 2007.
- 8) Lucas, R. : *Econometric Policy Evaluation: A critique*, *Cornegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, Vol.1, pp19-46, 1976.
- 9) Leeper Eric M. Leeper, Todd B. Walker, and Shu-Chun S. Yang: *Government Investment and Fiscal Stimulus in the short run and long run*, NBER Working Paper Series No.11, 2009
- 10) Uhlig, H. : A toolkit for analyzing nonlinear dynamic stochastic model easily, In "Computable Methods for the Study of Dynamic Economies (R. Marimon and A. Scott, eds), Oxford University Press, NY, USA, pp. 30-61, 1999.
- 11) Blanchard, O. J. and Kahn, C. M. : The solution of Linear Difference Models under Rational Expectations, *Econometrica* 48, pp.1305-11, 1980.
- 12) Kitagawa, G. : Monte Carlo filter and non-Gaussian nonlinear state space models, *Journal of Computational and Graphical Statics*, Vol.5, pp1-25, 1996.
- 13) Fernandez-Villaverde, J. and Rubio-Ramirez, J. F. : Estimating dynamic equilibrium economies: linear versus nonlinear likelihood, *Journal of Applied Econometrics*, Vol.20, pp.891-910, 2005.
- 14) Yano, K. : Time-varying analysis of Dynamic Stochastic General Equilibrium Models Based on Sequential Monte Carlo Methods, *ESRI Discussion Paper Series*, No.231, 2010.
- 15) Kitagawa, G. : A self-organizing state-space model, *Journal of the American Statistical Association*, Vol.93, pp1203-15, 1998.