

サプライチェーンを考慮した 交通ネットワークの離散型設計モデル

中村 昂雅¹・山田 忠史²・谷口 栄一³

¹学生会員 京都大学大学院修士課程 工学研究科都市社会工学専攻
(〒615-8540 京都市西京区京都大学桂)
E-mail:taka-n@kiban.kuciv.kyoto-u.ac.jp

²正会員 京都大学大学院准教授 工学研究科都市社会工学専攻 (同上)
E-mail:tyamada@kiban.kuciv.kyoto-u.ac.jp

³フェロー会員 京都大学大学院教授 工学研究科都市社会工学専攻 (同上)
E-mail:taniguchi@kiban.kuciv.kyoto-u.ac.jp

本研究は、均衡制約付き数理計画問題の枠組みで、サプライチェーンネットワーク(SCN)と交通ネットワークを統合したスーパーネットワークを対象に、交通ネットワークの設計変数を最適決定するような、離散型ネットワーク設計モデルを提案する。下位問題には、サプライチェーンと交通のスーパーネットワーク均衡モデルが採用され、各主体（製造業者、卸売業者、小売業者、消費市場、物流業者、交通ネットワーク利用者）の行動が記述される。上位問題は、交通ネットワーク上のリンクの組み合わせ最適化問題に相当し、下位問題の均衡条件を制約として、交通ネットワーク上のリンクの新設・改良がSCNにもたらす効果を最大化、ないしは、交通ネットワーク上のリンクの途絶がSCNに及ぼす影響を最小化する。本研究で提示するモデルは、行政側の物流計画や交通施策の効果の適切な把握、および、SCNの観点から見た災害時の道路ネットワークの信頼性解析などに寄与するものと考えられる。

Key Words : supply chain network, transport network, supernetwork, DNDP, MPEC

1. はじめに

サプライチェーンネットワーク(supply chain network: SCN)は、商品の生産、流通、販売、消費の関係を表したネットワークであるが、商品の流動そのものは交通ネットワーク上で行われる。それゆえ、SCN と交通ネットワークには相互作用が生じるので、SCN 上の行動変化と交通ネットワーク上の交通状態が相互に影響を及ぼすことになる¹⁾。したがって、交通ネットワーク上のリンクの新設・改良、および、途絶は、SCN 上の商品の流動にも、少なからず影響を及ぼす。

複数主体の分権的な意思決定や主体間の行動の相互作用を考慮したうえで、多段階のSCN全体で生じる現象を記述するための方法論として、サプライチェーンネットワーク均衡 (supply chain network equilibrium: SCNE)モデルがある。SCNE モデルは、製造業者、小売業者、消費市場（消費者）の3主体を対象に、Nagurney *et al.*²⁾によって開発され、SCN 上の商品の取引量（および、生産量や輸送量）や価格などが算定される。SCNE モデルは以降、消費市場において商品需要が変動する場合^{3,4)}、電子商取引が存在する場合^{5,6)}、リバースサプライチェーンを考慮する場合^{7,9)}、原材料の調達を考慮する場合⁹⁾、企業

の社会的責任を考慮する場合¹⁰⁾、生産容量制約を考慮する場合¹¹⁾、サプライチェーン間の競合性を考慮する場合^{12,13)}、モデルの動学化^{14,15)}へと拡張されている。これら既存のSCNE研究においては、輸送費用や運賃の決定過程が内生化されておらず、当然ながら、それと深く関係する交通ネットワーク上の交通状態も明示されていない。

Yamada *et al.*¹⁾は、物流業者の行動を考慮したSCNEモデル¹⁶⁾を拡張して、SCN と交通ネットワークを明示的に統合したスーパーネットワーク均衡(supply chain-transport supernetwork equilibrium: SC-T-SNE)モデルを提案し、道路ネットワーク上の交通状態がSCN上の各主体の行動に及ぼす影響、および、その逆を検討可能としている。なお、既存の研究^{17,18)}において、SCNEが、交通ネットワーク均衡問題として再定式化および求解可能であることが示されているが、これらの研究は、両均衡モデルの数理的等価性を示したに過ぎず、SC-T-SNEモデルのように、SCN と交通ネットワークが統合されたわけではない。

最近では、サプライチェーン上で生じる現象をSCNEで記述し、その制約下で意思決定者の目的を最適化する研究も見られる^{11),19),20)}。いずれの研究も、均衡制約付き数理計画問題(mathematical programming with equilibrium constraints: MPEC)を採用し、上位問題が組み合わせ最適

化, 下位問題が SCNE に相当する. Chiou¹⁹⁾は, 下位問題に 2 主体 (製造業者, 消費市場) の SCNE モデルを採用し, 上位問題では, 製造業者が SCN 上で利用するリンクの費用最小化問題を扱っている. Meng *et al.*¹¹⁾は, 下位問題に 3 主体 (製造業者, 小売業者, 消費市場) からなる生産容量制約付き SCNE モデルを用いて, 上位問題で新規参入製造業者の施設配置問題(facility location problem: FLP)を解いている. Yang *et al.*²⁰⁾は, 下位問題に 2 主体 (製造業者, 消費市場) の SCNE モデルを使用し, 上位問題で, 環境保護団体の環境負荷抑制に関する最適化問題を解いている. これらの研究ではいずれも, 下位問題がパラメータ付きの変分不等式(parameterized variational inequality: PVI)になることなどから, 上位問題の解法には, 遺伝的アルゴリズム(genetic algorithms: GA)をはじめとした, 近似解法が用いられている.

本研究では, 下位問題に, 図-1 のようなスーパーネットワークを対象とした SC-T-SNE モデル⁹⁾を採用し, 上位問題では, 例えば, 道路ネットワーク上のリンクの新設・改良が SCN にもたらす効果の最大化, ないしは, 交通ネットワーク上のリンクの途絶が SCN に及ぼす影響の最小化を扱うような MPEC モデルを検討する. 上位問題において, 後者は, SCN の観点から見た, 災害時の道路ネットワークの信頼性解析 (あるいは, ネットワーク途絶問題(network interdiction problem: NIP)) の一種に相当するものと考えられる.

2. モデルの概要

本研究では, MPECの枠組みで, モデル化を行う. 下位問題はスーパーネットワーク上の総商品取引量 (および, 総生産量, 総輸送量), 商品価格や交通量などを決定するSC-T-SNEモデルである. 一方, 上位問題は, 下位問題の均衡状態を制約条件とする, 離散型ネットワーク設計問題(discrete network design problem: DNDP)であり, 交通ネットワーク上の設計変数 (例えば, 新設・改良するリンク, あるいは, 途絶リンクなど) を最適に決定する組み合わせ最適化問題に相当する. モデルの枠組みを図-2に示す.

上位問題と下位問題には相互作用が生じる. すなわち, 上位問題の解 (交通ネットワークの変化) は, 下位問題の解 (総商品取引量, 総生産量, 総輸送量, 商品価格, 交通量など) に影響を及ぼす. また, その逆に, 下位問題の解は, 上位問題の解に影響を与える.

(1) 下位問題

交通ネットワーク上のノード集合を V , リンク集合を A とする. 図-3のように, 寡占的で単一の流通段階を有するSCNが, 交通ネットワーク $G(V, A)$ 上に Y 種類存在してお

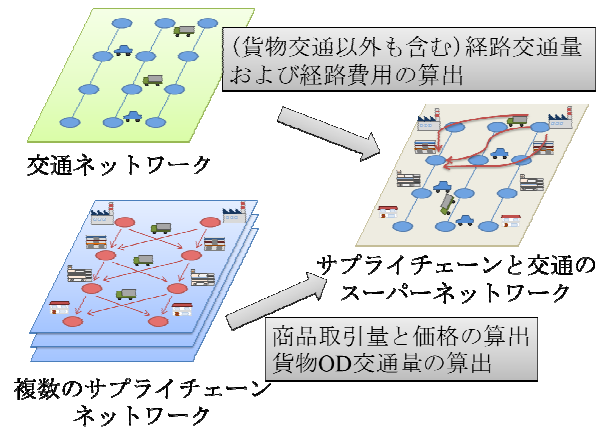


図-1 対象とするスーパーネットワーク

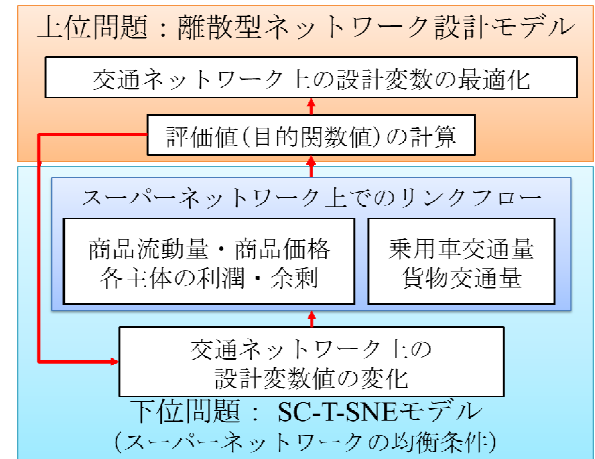


図-2 モデルの枠組み

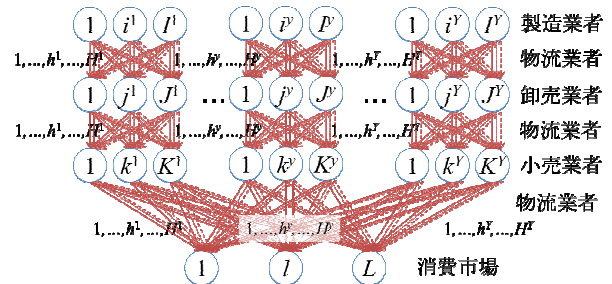


図-3 対象とするSCN

り, 各SCNが商品 (すなわち, 財) y ($y=1, \dots, Y$) を供給すると想定する. 商品 y のSCN上には, I^y 個の製造業者, J^y 個の卸売業者, K^y 個の小売業者, H^y 個の物流業者が存在し, L 個の消費市場で Y 種類の商品が消費される. 各SCN上の製造業者, 卸売業者, 小売業者, および消費市場が, 交通ネットワークのノード上に存在するとし, 各主体間の商品の取引に伴い, 各ノードから貨物交通が発生・集中する. 各ノードからは, 上述の貨物交通以外の交通も発生・集中する. これらすべての交通の起点集合を $R \subseteq V$, 終点集合を $S \subseteq V$ とする. なお, 同一のノードから交通の発生と集中が生じることや, 業者が存在して

いるノードから、貨物交通以外の交通の発生や集中が生じることは許容されるが、同一のノード上に、同一の商品を扱う業者は複数存在しないこととする。

a) 製造業者の行動

$E^{1y} (= E_{i^y j^y}^y)$ を交通ネットワーク上のODペア (i^y, j^y) ($i^y \in R, j^y \in S$) 間の経路集合とし、ODペア (i^y, j^y) 間の経路 $p^{1y} (= p_{i^y j^y}^{1y}) \in E^{1y}$ について $\dim p^{1y} = e^{1y}$ とする。商品 y を扱う製造業者 i^y の行動は、利潤最大化のもと、以下のように表される。

$$\text{Max} \sum_{j^y=1}^{J^y} \rho_{i^y j^y}^{1*} \sum_{h^y=1}^{H^y} \sum_{p^{1y} \in E^{1y}} q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}} - f_{i^y}(Q^{1y}) - g_{i^y}(Q^{1y}) - \sum_{j^y=1}^{J^y} c_{i^y j^y}(Q^{1y}) - \sum_{h^y=1}^{H^y} \sum_{p^{1y} \in E^{1y}} \rho_{h^y i^y j^y}^{1*} \sum_{p^{1y} \in E^{1y}} q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}} \quad (1)$$

$$\text{subject to } q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}} \geq 0 \quad \forall h^y, j^y, p^{1y} \quad (2)$$

ここに、

$\rho_{i^y j^y}^{1*}$: 製造業者 i^y から卸売業者 j^y への販売価格
 $q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}$: 物流業者 h^y が、交通ネットワーク上の経路 p^{1y} を通って、製造業者 i^y から卸売業者 j^y へ輸送する商品の量 (h^y, p^{1y}, j^y で識別した商品の生産量に相当する)

Q^{1y} : $q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}$ を要素とする $H^y J^y e^{1y}$ 次元ベクトル
 $f_{i^y}(Q^{1y})$: 製造業者 i^y の生産費用
 $g_{i^y}(Q^{1y})$: 製造業者 i^y の施設費用
 $c_{i^y j^y}(Q^{1y})$: 製造業者 i^y と卸売業者 j^y の取引費用 (ただし、 $i^y j^y$ 間の輸送費用を除く)

$\rho_{h^y i^y j^y}^{1*}$: $i^y j^y$ 間の輸送における物流業者 h^y の運賃
 Q^{1y} は Q^{1y} を要素とする $s^1 (= \sum_{j^y=1}^{J^y} (H^y J^y e^{1y}))$ 次元ベクトルとする。施設費用関数、取引費用関数が連続かつ凸であり、すべての商品に関するすべての製造業者の最適性条件が同時に成り立つ場合、この問題は以下の変分不等式を満たす $Q^{1*} \in R_+^{s^1}$ を求める問題と等価である。

$$\sum_{j^y=1}^{J^y} \sum_{h^y=1}^{H^y} \sum_{p^{1y} \in E^{1y}} \sum_{p^{1y} \in E^{1y}} \left[\frac{\partial f_{i^y}(Q^{1y*})}{\partial q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}} + \frac{\partial g_{i^y}(Q^{1y*})}{\partial q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}} + \frac{\partial c_{i^y j^y}(Q^{1y*})}{\partial q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}} \right] + \rho_{h^y i^y j^y}^{1*} - \rho_{h^y i^y j^y}^{1*} \times [q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}} - q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y*}}] \geq 0 \quad \forall Q^1 \in R_+^{s^1} \quad (3)$$

b) 卸売業者の行動

$E^{2y} (= E_{j^y k^y}^y)$ を交通ネットワーク上のODペア (j^y, k^y) ($j^y \in R, k^y \in S$) 間の経路集合とする。また、ODペア (j^y, k^y) 間の経路 $p^{2y} (= p_{j^y k^y}^{2y}) \in E^{2y}$ について $\dim p^{2y} = e^{2y}$ とする。このとき、商品 y を扱う卸売業者 j^y の行動は、利潤最大化を目的として、以下のように表される。

$$\text{Max} \sum_{k^y=1}^{K^y} \rho_{j^y k^y}^{2*} \sum_{h^y=1}^{H^y} \sum_{p^{2y} \in E^{2y}} q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}} - c_{j^y}(Q^{2y}) - g_{j^y}(Q^{2y}) - \sum_{k^y=1}^{K^y} c_{j^y k^y}(Q^{2y}) - \sum_{h^y=1}^{H^y} \sum_{p^{2y} \in E^{2y}} \rho_{h^y j^y k^y}^{2*} \sum_{p^{2y} \in E^{2y}} q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}} \quad (4)$$

$$\text{subject to } \sum_{h^y=1}^{H^y} \sum_{k^y=1}^{K^y} \sum_{p^{2y} \in E^{2y}} q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}} \leq \sum_{h^y=1}^{H^y} \sum_{k^y=1}^{K^y} \sum_{p^{2y} \in E^{2y}} q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}} \quad (5)$$

$$q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}} \geq 0 \quad \forall h^y, k^y, p^{2y}, \quad q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}} \geq 0 \quad \forall h^y, k^y, p^{2y} \quad (6)$$

ここに、

$\rho_{j^y k^y}^{2*}$: 卸売業者 j^y から小売業者 k^y への販売価格
 $q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}}$: 物流業者 h^y が、交通ネットワーク上の経路 p^{2y} を通って、卸売業者 j^y から小売業者 k^y へ輸送する商品の量 (h^y, p^{2y}, k^y で識別した商品の取引量に相当する)
 Q^{2y} : $q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}}$ を要素とする $H^y J^y K^y e^{2y}$ 次元ベクトル
 $c_{j^y}(Q^{2y})$: 卸売業者 j^y の保管費用
 $g_{j^y}(Q^{2y})$: 卸売業者 j^y の施設費用
 $c_{j^y k^y}(Q^{2y})$: 卸売業者 j^y と小売業者 k^y の取引費用 (ただし、 $j^y k^y$ 間の輸送費用を除く)

$\rho_{h^y j^y k^y}^{2*}$: $j^y k^y$ 間の輸送における物流業者 h^y の運賃
 Q^{2y} は Q^{2y} を要素とする $s^2 (= \sum_{j^y=1}^{J^y} (H^y J^y K^y e^{2y}))$ 次元ベクトルとする。保管費用関数、施設費用関数、取引費用関数が連続かつ凸であり、すべての商品に関するすべての卸売業者の最適性条件が同時に成り立つ場合、この問題は以下の変分不等式を満たす $(Q^{1*}, Q^{2*}, \gamma^*) \in R_+^{s^1+s^2+JY}$ を求める問題と等価である。

$$\sum_{j^y=1}^{J^y} \sum_{h^y=1}^{H^y} \sum_{k^y=1}^{K^y} \sum_{p^{2y} \in E^{2y}} \sum_{p^{2y} \in E^{2y}} \left[\frac{\partial c_{j^y}(Q^{2y*})}{\partial q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}}} + \frac{\partial g_{j^y}(Q^{2y*})}{\partial q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}}} + \rho_{h^y j^y k^y}^{2*} - \gamma_{j^y}^* \right] \times [q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}} - q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y*}}] + \sum_{j^y=1}^{J^y} \sum_{h^y=1}^{H^y} \sum_{k^y=1}^{K^y} \sum_{p^{2y} \in E^{2y}} \left[-\rho_{h^y j^y k^y}^{2*} + \frac{\partial c_{j^y k^y}(Q^{2y*})}{\partial q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}}} + \rho_{h^y j^y k^y}^{2*} + \gamma_{j^y}^* \right] \times [q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}} - q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y*}}] + \sum_{j^y=1}^{J^y} \sum_{k^y=1}^{K^y} \left[\sum_{h^y=1}^{H^y} \sum_{p^{2y} \in E^{2y}} q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y*}} - \sum_{h^y=1}^{H^y} \sum_{p^{2y} \in E^{2y}} q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y*}} \right] \times [\gamma_{j^y} - \gamma_{j^y}^*] \geq 0 \quad \forall (Q^1, Q^2, \gamma) \in R_+^{s^1+s^2+JY} \quad (7)$$

ここに、 γ_{j^y} は式(5)についてのラグランジエ乗数であり、 γ^y は γ_{j^y} を要素とする J 次元列ベクトル、 γ は γ^y を要素とする JY 次元ベクトルある。

c) 小売業者の行動

$E^{3y} (= E_{k^y l}^y)$ を交通ネットワーク上のODペア (k^y, l) ($k^y \in R, l \in S$) 間の経路集合とし、ODペア (k^y, l) 間の経路 $p^{3y} (= p_{k^y l}^{3y}) \in E^{3y}$ について $\dim p^{3y} = e^{3y}$ とする。商品 y を扱う小売業者 k^y の行動は、卸売業者と同様に、利潤最大化を目的として、以下のように表される。

$$\text{Max} \sum_{l=1}^L \rho_{k^y l}^{3*} \sum_{h^y=1}^{H^y} \sum_{p^{3y} \in E^{3y}} q_{h^y k^y l}^{p^{3y}} - c_{k^y}(Q^{3y}) - g_{k^y}(Q^{3y}) - \sum_{l=1}^L c_{k^y l}(Q^{3y}) - \sum_{h^y=1}^{H^y} \sum_{p^{3y} \in E^{3y}} \rho_{h^y k^y l}^{3*} \sum_{p^{3y} \in E^{3y}} q_{h^y k^y l}^{p^{3y}} - \sum_{j^y=1}^{J^y} \rho_{j^y k^y}^{2*} \sum_{h^y=1}^{H^y} \sum_{p^{2y} \in E^{2y}} q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}} \quad (8)$$

$$\text{subject to } \sum_{h^y=1}^{H^y} \sum_{l=1}^L \sum_{p^{3y} \in E^{3y}} q_{h^y k^y l}^{p^{3y}} \leq \sum_{h^y=1}^{H^y} \sum_{j^y=1}^{J^y} \sum_{p^{2y} \in E^{2y}} q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}} \quad (9)$$

$$q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}} \geq 0 \quad \forall h^y, j^y, p^{2y}, \quad q_{h^y k^y l}^{p^{3y}} \geq 0 \quad \forall h^y, l, p^{3y} \quad (10)$$

$\rho_{k^y l}^{3y}$: 小売業者 k^y の消費市場 l への販売価格
 $q_{h^y k^y l}^{p^{3y}}$: 物流業者 h^y が、交通ネットワーク上の経路 p^{3y} を通って、小売業者 k^y から消費市場 l へ輸送する商品の量 (h^y, p^{3y}, l で識別した商品の取引量に相当する)
 Q^{3y} : $q_{h^y k^y l}^{p^{3y}}$ を要素とする $H^y K^y L e^{3y}$ 次元ベクトル
 $c_{k^y}(Q^{2y})$: 小売業者 k^y の保管費用
 $g_{k^y}(Q^{2y})$: 小売業者 k^y の施設費用
 $c_{k^y l}(Q^{3y})$: 小売業者 k^y と消費市場 l の取引費用 (ただし、 $k^y l$ 間の輸送費用を除く)

$\rho_{h^y k^y l}^{3y}$: $k^y l$ 間の輸送における物流業者 h^y の運賃
 Q^3 は Q^{3y} を要素とする $S^3 (= \sum_{y=1}^Y (H^y K^y L e^{3y}))$ 次元ベクトルとする。保管費用関数、施設費用関数、取引費用関数が連続かつ凸であり、すべての商品に関するすべての小売業者の最適性条件が同時に成り立つ場合、この問題は以下の変分不等式を満たす $(Q^{2*}, Q^{3*}, \delta^*) \in R_+^{S^2+S^3+KY}$ を求める問題と等価である。

$$\begin{aligned} & \sum_{y=1}^Y \sum_{h^y=1}^{H^y} \sum_{j^y=1}^{J^y} \sum_{k^y=1}^{K^y} \sum_{p^{2y} \in E^{2y}} \left[\frac{\partial c_{k^y}(Q^{2y})}{\partial q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}}} + \frac{\partial g_{k^y}(Q^{2y})}{\partial q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}}} \right. \\ & \quad \left. + \rho_{j^y k^y}^{2*} - \delta_{k^y}^* \right] \times [q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}} - q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y*}}] \\ & + \sum_{y=1}^Y \sum_{h^y=1}^{H^y} \sum_{k^y=1}^{K^y} \sum_{l=1}^L \sum_{p^{3y} \in E^{3y}} \left[-\rho_{k^y l}^{3*} + \frac{\partial c_{k^y l}(Q^{3y})}{\partial q_{h^y k^y l}^{p^{3y}}} \right. \\ & \quad \left. + \rho_{h^y k^y l}^{3*} + \delta_{k^y}^* \right] \times [q_{h^y k^y l}^{p^{3y}} - q_{h^y k^y l}^{p^{3y*}}] \\ & + \sum_{y=1}^Y \sum_{k^y=1}^{K^y} \left[\sum_{h^y=1}^{H^y} \sum_{j^y=1}^{J^y} \sum_{p^{2y} \in E^{2y}} q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y*}} - \sum_{h^y=1}^{H^y} \sum_{l=1}^L \sum_{p^{3y} \in E^{3y}} q_{h^y k^y l}^{p^{3y*}} \right] \\ & \quad \times [\delta_{k^y}^* - \delta_{k^y}^*] \geq 0 \quad \forall (Q^2, Q^3, \delta) \in R_+^{S^2+S^3+KY} \end{aligned} \quad (11)$$

ここに、 δ_{k^y} は式(9)についてのラグランジェ乗数であり、 δ^y は δ_{k^y} を要素とする K 次元列ベクトル、 δ は δ^y を要素とする KY 次元ベクトルある。

d) 消費市場の均衡条件

需要関数が連続であるとし、消費市場 l では以下のような均衡条件 (相補性条件) が成立すると仮定する。

$$\rho_{k^y l}^{3*} \begin{cases} = \rho_l^{4y*} & \text{if } q_{h^y k^y l}^{p^{3y*}} > 0 \\ \geq \rho_l^{4y*} & \text{if } q_{h^y k^y l}^{p^{3y*}} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

$$d_l^y(\rho^{4y*}) \begin{cases} = \sum_{h^y=1}^{H^y} \sum_{j^y=1}^{J^y} \sum_{p^{3y} \in E^{3y}} q_{h^y j^y k^y l}^{p^{3y*}} & \text{if } \rho_l^{4y*} > 0 \\ \leq \sum_{h^y=1}^{H^y} \sum_{j^y=1}^{J^y} \sum_{p^{3y} \in E^{3y}} q_{h^y j^y k^y l}^{p^{3y*}} & \text{if } \rho_l^{4y*} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

ここに、

ρ_l^{4y} : 消費市場 l での商品 y の市場価格

ρ^{4y} : ρ_l^{4y} を要素とする L 次元ベクトル

$d_l^y(\rho^{4y})$: 消費市場 l の商品 y の需要関数

ρ^4 は ρ^{4y} を要素とする LY 次元ベクトルとする。均衡状態において、式(12)と式(13)は、全ての商品に関してすべての消費市場について満たされる必要があり、これらの均衡条件は、以下の変分不等式を満たす $(Q^{3*}, \rho^{4*}) \in R_+^{S^3+LY}$ を求める問題と等価である。

$$\begin{aligned} & \sum_{y=1}^Y \sum_{h^y=1}^{H^y} \sum_{k^y=1}^{K^y} \sum_{l=1}^L \sum_{p^{3y} \in E^{3y}} [\rho_{k^y l}^{3*} - \rho_l^{4y*}] \times [q_{h^y k^y l}^{p^{3y}} - q_{h^y k^y l}^{p^{3y*}}] \\ & + \sum_{y=1}^Y \sum_{l=1}^L \left[\sum_{h^y=1}^{H^y} \sum_{k^y=1}^{K^y} \sum_{p^{3y} \in E^{3y}} q_{h^y k^y l}^{p^{3y*}} - d_l^y(\rho^{4y*}) \right] \times [\rho_l^{4y} - \rho_l^{4y*}] \geq 0 \quad (14) \\ & \quad \forall (Q^3, \rho^4) \in R_+^{S^3+LY} \end{aligned}$$

e) 物流業者の行動

物流業者はSCN上の意思決定主体の一つであるが、同時に交通ネットワークの利用者でもある。ここでは、交通ネットワークとして道路ネットワークを想定し、その利用者は、対象SCN上の物流業者が運行する貨物車交通と、それ以外の交通 (以下、乗用車交通と称する) の2種類とする。交通ネットワーク上の経路費用は、OD交通量や商品取引量 (すなわち、生産量、物資流動量、輸送量) に応じて変化する。経路費用は、物流業者の行動を介してSCN上の輸送量に影響を及ぼすので、結果的に貨物車交通の需要も変動する。

乗用車交通の発生ノード (起点) を $r \in R$ 、集中ノード (終点) を $s \in S$ とし、ODペア rs 間の経路 $p_{rs} \in E_{rs}$ (E_{rs} は rs 間の経路集合) について、 $\dim p_{rs} = e^s$ とする。このとき、物流業者 h^y の行動は、利潤最大化を目的として、以下のように表される。

$$\begin{aligned} \text{Max } & \sum_{i^y=1}^{I^y} \sum_{j^y=1}^{J^y} \rho_{h^y i^y j^y}^{5*} \sum_{p^{1y} \in E^{1y}} q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}} + \sum_{j^y=1}^{J^y} \sum_{k^y=1}^{K^y} \rho_{h^y j^y k^y}^{6*} \sum_{p^{2y} \in E^{2y}} q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}} \\ & + \sum_{k^y=1}^{K^y} \sum_{l=1}^L \rho_{h^y k^y l}^{7*} \sum_{p^{3y} \in E^{3y}} q_{h^y k^y l}^{p^{3y}} - g_{h^y}(Q^1, Q^2, Q^3) \\ & - \sum_{i^y=1}^{I^y} \sum_{j^y=1}^{J^y} \sum_{p^{1y} \in E^{1y}} q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}} C_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}(Q^1, Q^2, Q^3, X) \\ & - \sum_{j^y=1}^{J^y} \sum_{k^y=1}^{K^y} \sum_{p^{2y} \in E^{2y}} q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}} C_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}}(Q^1, Q^2, Q^3, X) \\ & - \sum_{k^y=1}^{K^y} \sum_{l=1}^L \sum_{p^{3y} \in E^{3y}} q_{h^y k^y l}^{p^{3y}} C_{h^y k^y l}^{p^{3y}}(Q^1, Q^2, Q^3, X) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{subject to } q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}} \geq 0 \quad \forall i^y, j^y, p^{1y}, \quad q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}} \geq 0 \quad \forall j^y, k^y, p^{2y} \quad (16)$$

$$q_{h^y k^y l}^{p^{3y}} \geq 0 \quad \forall k^y, l, p^{3y}$$

$g_{h^y}(\bullet)$: 物流業者 h^y の施設費用

$C_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}(\bullet)$: 経路 p^{1y} における物流業者 h^y の単位輸送量あたりの運行費用

$C_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}}(\bullet)$: 経路 p^{2y} における物流業者 h^y の単位輸送量あたりの運行費用

$C_{h^y k^y l}^{p^{3y}}(\bullet)$: 経路 p^{3y} における物流業者 h^y の単位輸送量あたりの運行費用

X : $x_{rs}^{p_{rs}}$ を要素とする $e^r e^s e^5$ 次元ベクトル
 $x_{rs}^{p_{rs}}$: rs 間での経路 p_{rs} の交通量
 e^r : 乗用車交通の発生ノード（起点）数
 e^s : 乗用車交通の到着ノード（終点）数

施設費用は、施設の整備・維持管理などに要する費用である。運行費用は貨物車の運行に要する費用であり、その固定費用も含む。単位輸送量あたりの運行費用は、以下のように算定できる。

$$C_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}(Q^1, Q^2, Q^3, X) = \frac{\eta t_{i^y j^y}^{p^{1y}}(Q^1, Q^2, Q^3, X)}{\iota \kappa} \quad (17)$$

$$C_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}}(Q^1, Q^2, Q^3, X) = \frac{\eta t_{j^y k^y}^{p^{2y}}(Q^1, Q^2, Q^3, X)}{\iota \kappa} \quad (18)$$

$$C_{h^y k^y l}^{p^{3y}}(Q^1, Q^2, Q^3, X) = \frac{\eta t_{k^y l}^{p^{3y}}(Q^1, Q^2, Q^3, X)}{\iota \kappa} \quad (19)$$

ここに、

η : 単位時間の一台あたりの運行費用

$t_{i^y j^y}^{p^{1y}}(\bullet), t_{j^y k^y}^{p^{2y}}(\bullet), t_{k^y l}^{p^{3y}}(\bullet)$
 : 経路 p^{1y}, p^{2y}, p^{3y} の所要時間

ι : 貨物車一台あたりの積載容量

κ : 貨物車一台あたりの平均積載率

物流業者の運行費用の算定に必要なとなる経路所要時間は、以下のように求められる。

$$t_{i^y j^y}^{p^{1y}}(Q^1, Q^2, Q^3, X) = \sum_{a \in A} t_a(x_a) \delta_{a, p^{1y}}^{i^y j^y} \quad (20)$$

$$t_{j^y k^y}^{p^{2y}}(Q^1, Q^2, Q^3, X) = \sum_{a \in A} t_a(x_a) \delta_{a, p^{2y}}^{j^y k^y} \quad (21)$$

$$t_{k^y l}^{p^{3y}}(Q^1, Q^2, Q^3, X) = \sum_{a \in A} t_a(x_a) \delta_{a, p^{3y}}^{k^y l} \quad (22)$$

ここに、

$\delta_{a, p^{1y}}^{i^y j^y}$: 経路 p^{1y} がリンク a を通るとき1, そうでないときは0の0-1変数

$\delta_{a, p^{2y}}^{j^y k^y}$: 経路 p^{2y} がリンク a を通るとき1, そうでないときは0の0-1変数

$\delta_{a, p^{3y}}^{k^y l}$: 経路 p^{3y} がリンク a を通るとき1, そうでないときは0の0-1変数

$t_a(x_a)$: リンク a の所要時間

x_a : リンク a の交通量 (式(27)参照)

施設費用関数と運行費用関数が連続かつ凸であり、すべての商品に関してすべての物流業者の最適性条件が同時に成り立つ場合、この問題は以下の変分不等式を満たす $(Q^1, Q^2, Q^3) \in R_+^{S^1+S^2+S^3}$ を求めればよい。

$$\begin{aligned} & \sum_{y=1}^Y \sum_{h^y=1}^{H^y} \sum_{i^y=1}^{I^y} \sum_{j^y=1}^{J^y} \sum_{p^{1y} \in E^{1y}} \left[\frac{\partial g_{h^y}^{p^{1y}}(Q^{1y*}, Q^{2y*}, Q^{3y*})}{\partial q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}} \right. \\ & + C_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}(Q^1, Q^2, Q^3, X^*) \\ & + \sum_{i^y=1}^{I^y} \sum_{j^y=1}^{J^y} \sum_{p^{1y} \in E^{1y}} q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y*}} \frac{\partial C_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}(Q^1, Q^2, Q^3, X^*)}{\partial q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}} \\ & + \sum_{j^y=1}^{J^y} \sum_{k^y=1}^{K^y} \sum_{p^{2y} \in E^{2y}} q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y*}} \frac{\partial C_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}}(Q^1, Q^2, Q^3, X^*)}{\partial q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}}} \left. \right] \\ & \times [q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y*}} - q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}] \\ & + \sum_{k^y=1}^{K^y} \sum_{l=1}^L \sum_{p^{3y} \in E^{3y}} q_{h^y k^y l}^{p^{3y*}} \frac{\partial C_{h^y k^y l}^{p^{3y}}(Q^1, Q^2, Q^3, X^*)}{\partial q_{h^y k^y l}^{p^{3y}}} - \rho_{h^y k^y l}^{p^{3y*}} \\ & \times [q_{h^y k^y l}^{p^{3y*}} - q_{h^y k^y l}^{p^{3y}}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{k^y=1}^{K^y} \sum_{l=1}^L \sum_{p^{3y} \in E^{3y}} q_{h^y k^y l}^{p^{3y*}} \frac{\partial C_{h^y k^y l}^{p^{3y}}(Q^1, Q^2, Q^3, X^*)}{\partial q_{h^y k^y l}^{p^{3y}}} - \rho_{h^y k^y l}^{p^{3y*}} \\ & \times [q_{h^y k^y l}^{p^{3y*}} - q_{h^y k^y l}^{p^{3y}}] \\ & + \sum_{y=1}^Y \sum_{h^y=1}^{H^y} \sum_{j^y=1}^{J^y} \sum_{k^y=1}^{K^y} \sum_{p^{2y} \in E^{2y}} \left[\frac{\partial g_{h^y}^{p^{2y}}(Q^{1y*}, Q^{2y*}, Q^{3y*})}{\partial q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}}} \right. \\ & + C_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}}(Q^1, Q^2, Q^3, X^*) \\ & + \sum_{i^y=1}^{I^y} \sum_{j^y=1}^{J^y} \sum_{p^{1y} \in E^{1y}} q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y*}} \frac{\partial C_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}(Q^1, Q^2, Q^3, X^*)}{\partial q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}} \\ & + \sum_{j^y=1}^{J^y} \sum_{k^y=1}^{K^y} \sum_{p^{2y} \in E^{2y}} q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y*}} \frac{\partial C_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}}(Q^1, Q^2, Q^3, X^*)}{\partial q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}}} \\ & + \sum_{k^y=1}^{K^y} \sum_{l=1}^L \sum_{p^{3y} \in E^{3y}} q_{h^y k^y l}^{p^{3y*}} \frac{\partial C_{h^y k^y l}^{p^{3y}}(Q^1, Q^2, Q^3, X^*)}{\partial q_{h^y k^y l}^{p^{3y}}} - \rho_{h^y k^y l}^{p^{3y*}} \\ & \times [q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y*}} - q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}}] \\ & + \sum_{y=1}^Y \sum_{h^y=1}^{H^y} \sum_{k^y=1}^{K^y} \sum_{l=1}^L \sum_{p^{3y} \in E^{3y}} \left[\frac{\partial g_{h^y}^{p^{3y}}(Q^{1y*}, Q^{2y*}, Q^{3y*})}{\partial q_{h^y k^y l}^{p^{3y}}} \right. \\ & + C_{h^y k^y l}^{p^{3y}}(Q^1, Q^2, Q^3, X^*) \\ & + \sum_{i^y=1}^{I^y} \sum_{j^y=1}^{J^y} \sum_{p^{1y} \in E^{1y}} q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y*}} \frac{\partial C_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}(Q^1, Q^2, Q^3, X^*)}{\partial q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}} \\ & + \sum_{j^y=1}^{J^y} \sum_{k^y=1}^{K^y} \sum_{p^{2y} \in E^{2y}} q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y*}} \frac{\partial C_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}}(Q^1, Q^2, Q^3, X^*)}{\partial q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}}} \\ & + \sum_{k^y=1}^{K^y} \sum_{l=1}^L \sum_{p^{3y} \in E^{3y}} q_{h^y k^y l}^{p^{3y*}} \frac{\partial C_{h^y k^y l}^{p^{3y}}(Q^1, Q^2, Q^3, X^*)}{\partial q_{h^y k^y l}^{p^{3y}}} - \rho_{h^y k^y l}^{p^{3y*}} \\ & \times [q_{h^y k^y l}^{p^{3y*}} - q_{h^y k^y l}^{p^{3y}}] \geq 0 \quad \forall (Q^1, Q^2, Q^3) \in R_+^{S^1+S^2+S^3} \end{aligned} \quad (23)$$

f) 乗用車の均衡条件

乗用車交通は、需要変動型利用者均衡に従うと仮定する。それゆえ、OD間の乗用車交通の需要は、OD間の最短経路上の交通費用に応じて変化する。このとき、道路ネットワーク上の乗用車交通の行動は、以下のように定式化される。

$$\begin{cases} \zeta_{rs}^{p_{rs}}(Q^1, Q^2, Q^3, X^*) = c_{rs}^* & \text{if } x_{rs}^{p_{rs}*} > 0 \\ \zeta_{rs}^{p_{rs}}(Q^1, Q^2, Q^3, X^*) \geq c_{rs}^* & \text{if } x_{rs}^{p_{rs}*} = 0 \end{cases} \quad (24)$$

$$d_{rs}(c_{rs}^*) \begin{cases} = \sum_{p_{rs} \in E_{rs}} x_{rs}^{p_{rs}*} & \text{if } c_{rs}^* > 0 \\ \leq \sum_{p_{rs} \in E_{rs}} x_{rs}^{p_{rs}*} & \text{if } c_{rs}^* = 0 \end{cases} \quad (25)$$

ここに、

$$t_{rs}^{p_{rs}}(Q^1, Q^2, Q^3, X) = \sum_{a \in A} t_a(x_a) \delta_{a, p_{rs}}^{rs} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} x_a = & \sum_{p_{rs} \in E_{rs}} \delta_{a, p_{rs}}^{rs} x_{rs}^{p_{rs}} + v \left(\sum_{p^{1y} \in E^{1y}} \delta_{a, p^{1y}}^{i^y j^y} \frac{q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}}{\iota \kappa} \right. \\ & + \sum_{p^{2y} \in E^{2y}} \delta_{a, p^{2y}}^{j^y k^y} \frac{q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}}}{\iota \kappa} + \left. \sum_{p^{3y} \in E^{3y}} \delta_{a, p^{3y}}^{k^y l} \frac{q_{h^y k^y l}^{p^{3y}}}{\iota \kappa} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

ここに,

- ζ : 乗用車の単位時間あたりの走行費用
 $t_{rs}^{p_{rs}}(\bullet)$: 経路 p_{rs} の所要時間
 $\delta_{a,p_{rs}}^{rs}$: 経路 p_{rs} がリンク a を通るとき 1, そうでないときは 0 の 0-1 変数
 c_{rs} : rs 間での交通費用
 $d_{rs}(\bullet)$: rs 間での交通需要関数
 v : 乗用車換算係数

式(24)はワードロップの第 1 原則に基づく均衡条件であり, 式(25)は OD ペア rs 間の交通需要に関する相補性条件である.

リンク交通量は, 乗用車交通量に, SCN の各主体間の商品取引量を乗用車交通量に換算した値を加算することで求められる (式(27)). したがって式(26)と(27)より, 乗用車交通の経路所要時間には, 貨物車の経路交通量が影響を及ぼす. 逆に, SCN 上の物資流動量 (すなわち, 商品の生産量, 取引量, 輸送量) には, 乗用車の交通量が影響を及ぼす.

均衡状態において, 式(24)と(25)は, 全ての OD ペアについて満たされる必要があり, これらの均衡条件は, 下式を満たす $(X^*, c_{rs}^*) \in R_+^{e^s e^s + e^r e^s}$ を求めることに等しい.

$$\sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{p_{rs} \in E_{rs}} [\zeta_{p_{rs}}^{rs} (Q^{1*}, Q^{2*}, Q^{3*}, X^*) - c_{rs}^*] \times [x_{rs}^{p_{rs}} - x_{rs}^{p_{rs}*}] + \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \left[\sum_{p_{rs} \in E_{rs}} x_{rs}^{p_{rs}*} - d_{rs}(c_{rs}^*) \right] \times [c_{rs} - c_{rs}^*] \geq 0 \quad (28)$$

$$\forall (X, c_{rs}) \in R_+^{e^s e^s + e^r e^s}$$

g) スーパーネットワーク全体の均衡条件

均衡状態においては, 各主体の最適性条件, および, 消費市場および乗用車交通の均衡条件 (式(3), (7), (11), (14), (23), (28)) が同時に満たされる. すなわち, スーパーネットワーク全体の均衡条件は, $(Q^{1*}, Q^{2*}, Q^{3*}, \gamma^*, \delta^*, \rho^4, X^*, c_{rs}^*) \in R_+^{S^1 + S^2 + S^3 + JY + KY + LY + e^s e^6 e^4 + e^s e^6}$ を決定変数とする下記の変分不等式の解と等価である.

$$\begin{aligned} & \sum_{y=1}^Y \sum_{h^y=1}^{H^y} \sum_{i^y=1}^{I^y} \sum_{j^y=1}^{J^y} \sum_{p^{1y} \in E^{1y}} \left[\frac{\partial f_{i^y}^{1y}(Q^{1y*})}{\partial q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}} + \frac{\partial g_{j^y}^{1y}(Q^{1y*})}{\partial q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}} \right] \\ & + \frac{\partial c_{i^y j^y}^{1y}(Q^{1y*})}{\partial q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}} + \frac{\partial c_{j^y}^{1y}(Q^{1y*})}{\partial q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}} + \frac{\partial g_{j^y}^{1y}(Q^{1y*})}{\partial q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}} \\ & + \frac{\partial g_{h^y}^{1y}(Q^{1y*}, Q^{2y*}, Q^{3y*})}{\partial q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}} + C_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}} (Q^{1*}, Q^{2*}, Q^{3*}, X^*) \\ & + \sum_{i^y=1}^{I^y} \sum_{j^y=1}^{J^y} \sum_{p^{1y} \in E^{1y}} q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}*} \frac{\partial C_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}(Q^{1*}, Q^{2*}, Q^{3*}, X^*)}{\partial q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}} \\ & + \sum_{j^y=1}^{J^y} \sum_{k^y=1}^{K^y} \sum_{p^{2y} \in E^{2y}} q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}*} \frac{\partial C_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}}(Q^{1*}, Q^{2*}, Q^{3*}, X^*)}{\partial q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}}} \\ & + \sum_{k^y=1}^{K^y} \sum_{l^y=1}^{L^y} \sum_{p^{3y} \in E^{3y}} q_{h^y k^y l^y}^{p^{3y}*} \frac{\partial C_{h^y k^y l^y}^{p^{3y}}(Q^{1*}, Q^{2*}, Q^{3*}, X^*)}{\partial q_{h^y k^y l^y}^{p^{3y}}} \\ & - \gamma_{j^y}^* \times [q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}*} - q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{y=1}^Y \sum_{h^y=1}^{H^y} \sum_{i^y=1}^{I^y} \sum_{k^y=1}^{K^y} \sum_{p^{2y} \in E^{2y}} \left[\frac{\partial c_{k^y}^{2y}(Q^{2y*})}{\partial q_{h^y i^y j^y k^y}^{p^{2y}}} + \frac{\partial g_{k^y}^{2y}(Q^{2y*})}{\partial q_{h^y i^y j^y k^y}^{p^{2y}}} \right] \\ & + \frac{\partial c_{j^y k^y}^{2y}(Q^{2y*})}{\partial q_{h^y i^y j^y k^y}^{p^{2y}}} + \frac{\partial g_{h^y}^{2y}(Q^{1y*}, Q^{2y*}, Q^{3y*})}{\partial q_{h^y i^y j^y k^y}^{p^{2y}}} \\ & + C_{h^y i^y j^y k^y}^{p^{2y}} (Q^{1*}, Q^{2*}, Q^{3*}, X^*) \\ & + \sum_{j^y=1}^{J^y} \sum_{k^y=1}^{K^y} \sum_{p^{2y} \in E^{2y}} q_{h^y i^y j^y k^y}^{p^{2y}*} \frac{\partial C_{h^y i^y j^y k^y}^{p^{2y}}(Q^{1*}, Q^{2*}, Q^{3*}, X^*)}{\partial q_{h^y i^y j^y k^y}^{p^{2y}}} \\ & + \sum_{i^y=1}^{I^y} \sum_{j^y=1}^{J^y} \sum_{p^{1y} \in E^{1y}} q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}*} \frac{\partial C_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}(Q^{1*}, Q^{2*}, Q^{3*}, X^*)}{\partial q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}} \\ & + \sum_{k^y=1}^{K^y} \sum_{l^y=1}^{L^y} \sum_{p^{3y} \in E^{3y}} q_{h^y k^y l^y}^{p^{3y}*} \frac{\partial C_{h^y k^y l^y}^{p^{3y}}(Q^{1*}, Q^{2*}, Q^{3*}, X^*)}{\partial q_{h^y k^y l^y}^{p^{3y}}} \\ & + \gamma_{j^y}^* - \delta_{k^y}^* \times [q_{h^y i^y j^y k^y}^{p^{2y}} - q_{h^y i^y j^y k^y}^{p^{2y}*}] \\ & + \sum_{y=1}^Y \sum_{h^y=1}^{H^y} \sum_{i^y=1}^{I^y} \sum_{l^y=1}^{L^y} \sum_{p^{3y} \in E^{3y}} \left[\frac{\partial c_{l^y}^{3y}(Q^{3y*})}{\partial q_{h^y i^y j^y k^y l^y}^{p^{3y}}} \right] \\ & + \frac{\partial g_{h^y}^{3y}(Q^{1y*}, Q^{2y*}, Q^{3y*})}{\partial q_{h^y i^y j^y k^y l^y}^{p^{3y}}} + C_{h^y i^y j^y k^y l^y}^{p^{3y}} (Q^{1*}, Q^{2*}, Q^{3*}, X^*) \\ & + \sum_{k^y=1}^{K^y} \sum_{l^y=1}^{L^y} \sum_{p^{3y} \in E^{3y}} q_{h^y k^y l^y}^{p^{3y}*} \frac{\partial C_{h^y k^y l^y}^{p^{3y}}(Q^{1*}, Q^{2*}, Q^{3*}, X^*)}{\partial q_{h^y k^y l^y}^{p^{3y}}} \\ & + \sum_{i^y=1}^{I^y} \sum_{j^y=1}^{J^y} \sum_{p^{1y} \in E^{1y}} q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}*} \frac{\partial C_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}(Q^{1*}, Q^{2*}, Q^{3*}, X^*)}{\partial q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}} \\ & + \sum_{j^y=1}^{J^y} \sum_{k^y=1}^{K^y} \sum_{p^{2y} \in E^{2y}} q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}*} \frac{\partial C_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}}(Q^{1*}, Q^{2*}, Q^{3*}, X^*)}{\partial q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}}} \\ & + \delta_{k^y}^* - \rho_{l^y}^{4y*} \times [q_{h^y k^y l^y}^{p^{3y}} - q_{h^y k^y l^y}^{p^{3y}*}] \\ & + \sum_{y=1}^Y \sum_{j^y=1}^{J^y} \left[\sum_{h^y=1}^{H^y} \left(\sum_{i^y=1}^{I^y} \sum_{p^{1y} \in E^{1y}} q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}*} - \sum_{k^y=1}^{K^y} \sum_{p^{2y} \in E^{2y}} q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}*} \right) \right] \times [\gamma_{j^y} - \gamma_{j^y}^*] \\ & + \sum_{y=1}^Y \sum_{k^y=1}^{K^y} \left[\sum_{h^y=1}^{H^y} \left(\sum_{j^y=1}^{J^y} \sum_{p^{2y} \in E^{2y}} q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}*} - \sum_{l^y=1}^{L^y} \sum_{p^{3y} \in E^{3y}} q_{h^y k^y l^y}^{p^{3y}*} \right) \right] \times [\delta_{k^y} - \delta_{k^y}^*] \\ & + \sum_{y=1}^Y \sum_{l^y=1}^{L^y} \left[\sum_{h^y=1}^{H^y} \sum_{k^y=1}^{K^y} \sum_{p^{3y} \in E^{3y}} q_{h^y k^y l^y}^{p^{3y}*} - d_{l^y}^{4y}(\rho^{4y*}) \right] \times [\rho_{l^y}^{4y} - \rho_{l^y}^{4y*}] \\ & + \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \sum_{p_{rs} \in E_{rs}} [\zeta_{p_{rs}}^{rs} (Q^{1*}, Q^{2*}, Q^{3*}, X^*) - c_{rs}^*] \times [x_{rs}^{p_{rs}} - x_{rs}^{p_{rs}*}] \\ & + \sum_{r \in R} \sum_{s \in S} \left[\sum_{p_{rs} \in E_{rs}} x_{rs}^{p_{rs}*} - d_{rs}(c_{rs}^*) \right] \times [c_{rs} - c_{rs}^*] \geq 0 \\ & \forall (Q^1, Q^2, Q^3, \gamma, \delta, \rho^4, X, c_{rs}) \in R_+^{S^1 + S^2 + S^3 + JY + KY + LY + e^r e^s e^s + e^r e^s} \end{aligned}$$

h) 価格の導出

γ, δ は式(29)から求解されるので, SCN 上の商品価格については, 式(3)より, $q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}} > 0$ のとき

$$\rho_{i^y j^y}^{1*} = \frac{\partial f_{i^y}^{1y}(Q^{1y*})}{\partial q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}} + \frac{\partial g_{i^y}^{1y}(Q^{1y*})}{\partial q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}} + \frac{\partial c_{i^y j^y}^{1y}(Q^{1y*})}{\partial q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}} + \rho_{h^y i^y j^y}^{1*} \quad (30)$$

が, 式(7)より, $q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}} > 0$ のとき

$$\rho_{j^y k^y}^{2*} = \frac{\partial c_{j^y k^y}^{2y}(Q^{2y*})}{\partial q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}}} + \rho_{h^y j^y k^y}^{2*} + \gamma_{j^y}^* \quad (31)$$

が, 式(11)より, $q_{h^y k^y l^y}^{p^{3y}} > 0$ のとき

$$\rho_{k^y l}^{3*} = \frac{\partial c_{k^y l}(Q^{3y*})}{\partial q_{h^y k^y l}^{p^{3y}}} + \rho_{h^y k^y l}^{3*} + \delta_{k^y}^* \quad (32)$$

が、それぞれ成り立つ。さらに、同条件下において、式(23)から、

$$\begin{aligned} \rho_{h^y i^y j^y}^{1*} &= \frac{\partial g_{h^y}(Q^{1y*}, Q^{2y*}, Q^{3y*})}{\partial q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}} \\ &+ C_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}(Q^{1*}, Q^{2*}, Q^{3*}, X^*) \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{i^y=1}^{J^y} \sum_{j^y=1}^{K^y} \sum_{p^{1y} \in E^{1y}} q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}*} \frac{\partial C_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}(Q^{1*}, Q^{2*}, Q^{3*}, X^*)}{\partial q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}} \\ &+ \sum_{j^y=1}^{J^y} \sum_{k^y=1}^{K^y} \sum_{p^{2y} \in E^{2y}} q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}*} \frac{\partial C_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}}(Q^{1*}, Q^{2*}, Q^{3*}, X^*)}{\partial q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}}} \\ &+ \sum_{k^y=1}^{K^y} \sum_{l=1}^L \sum_{p^{3y} \in E^{3y}} q_{h^y k^y l}^{p^{3y}*} \frac{\partial C_{h^y k^y l}^{p^{3y}}(Q^{1*}, Q^{2*}, Q^{3*}, X^*)}{\partial q_{h^y k^y l}^{p^{3y}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_{h^y j^y k^y}^{2*} &= \frac{\partial g_{h^y}(Q^{1y*}, Q^{2y*}, Q^{3y*})}{\partial q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}}} \\ &+ C_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}}(Q^{1*}, Q^{2*}, Q^{3*}, X^*) \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{i^y=1}^{J^y} \sum_{j^y=1}^{J^y} \sum_{p^{1y} \in E^{1y}} q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}*} \frac{\partial C_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}(Q^{1*}, Q^{2*}, Q^{3*}, X^*)}{\partial q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}}} \\ &+ \sum_{j^y=1}^{J^y} \sum_{k^y=1}^{K^y} \sum_{p^{2y} \in E^{2y}} q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}*} \frac{\partial C_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}}(Q^{1*}, Q^{2*}, Q^{3*}, X^*)}{\partial q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}}} \\ &+ \sum_{k^y=1}^{K^y} \sum_{l=1}^L \sum_{p^{3y} \in E^{3y}} q_{h^y k^y l}^{p^{3y}*} \frac{\partial C_{h^y k^y l}^{p^{3y}}(Q^{1*}, Q^{2*}, Q^{3*}, X^*)}{\partial q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_{h^y k^y l}^{3*} &= \frac{\partial g_{h^y}(Q^{1y*}, Q^{2y*}, Q^{3y*})}{\partial q_{h^y k^y l}^{p^{3y}}} \\ &+ C_{h^y k^y l}^{p^{3y}}(Q^{1*}, Q^{2*}, Q^{3*}, X^*) \\ &+ \sum_{i^y=1}^{J^y} \sum_{j^y=1}^{J^y} \sum_{p^{1y} \in E^{1y}} q_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}*} \frac{\partial C_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}(Q^{1*}, Q^{2*}, Q^{3*}, X^*)}{\partial q_{h^y k^y l}^{p^{3y}}} \\ &+ \sum_{j^y=1}^{J^y} \sum_{k^y=1}^{K^y} \sum_{p^{2y} \in E^{2y}} q_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}*} \frac{\partial C_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}}(Q^{1*}, Q^{2*}, Q^{3*}, X^*)}{\partial q_{h^y k^y l}^{p^{3y}}} \\ &+ \sum_{k^y=1}^{K^y} \sum_{l=1}^L \sum_{p^{3y} \in E^{3y}} q_{h^y k^y l}^{p^{3y}*} \frac{\partial C_{h^y k^y l}^{p^{3y}}(Q^{1*}, Q^{2*}, Q^{3*}, X^*)}{\partial q_{h^y k^y l}^{p^{3y}}} \end{aligned} \quad (35)$$

が導出される。

i) 解の存在と一意性

この変分不等式の解の存在については、既存の SCNE モデル¹⁾²⁾⁴⁾¹⁶⁾と同様の方法で証明することができる。また、 f_{i^y} , $c_{i^y j^y}$, $c_{j^y k^y}$, $c_{k^y l}$, c_{i^y} , c_{j^y} , c_{k^y} , g_{i^y} , g_{j^y} , g_{k^y} , g_{h^y} が凸関数、 $C_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}$, $C_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}}$, $C_{h^y k^y l}^{p^{3y}}$ が非減少な凸関数、 d_l^y , d_{rs}^y が単調減少関数、 $t_{rs}^{p_{rs}}$ が単調増加関数であり、これらの凸関数族の中に1つでも狭義凸関数族が含まれ、 d_l^y , d_{rs}^y , $t_{rs}^{p_{rs}}$ が狭義単調であれば、既存研究¹⁾²⁾²²⁾²³⁾と同様に、解の一

意性を保証することができる。

解法については、Meng *et al.*²⁴⁾の推奨する方法を用いる。すなわち、i)式(29)を等価な相補性問題に変換し、ii)FB(Fischer-Burmeister)関数を用いて、非負実数値関数を定義し、iii)二乗 FB 関数を用いて、相補性問題を等価な制約なし非線形最適化問題に置換した後、iv)準ニュートン法により求解する。

式(29)の左辺第1項から第8項までの乗算記号前の角括弧内の関数群をそれぞれ、 $F_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}$, $F_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}}$, $F_{h^y k^y l}^{p^{3y}}$, F_{j^y} , F_{k^y} , F_{k^y} , F_l , $F_{rs}^{p_{rs}}$, F_{rs} と表し、 $F(Z)$ を $F(Z) = (F_{h^y i^y j^y}^{p^{1y}}, F_{h^y j^y k^y}^{p^{2y}}, F_{h^y k^y l}^{p^{3y}}, F_{j^y}, F_{k^y}, F_l, F_{rs}^{p_{rs}}, F_{rs})$ と表されるベクトル値関数とする。また、ベクトル Z を $Z = (Q^1, Q^2, Q^3, \gamma, \delta, \rho^4, X, c_{rs})$ とする。このとき、式(29)は、以下の空間 $B \equiv \{(Q^1, Q^2, Q^3, \gamma, \delta, \rho^4, X, c_{rs}) | (Q^1, Q^2, Q^3, \gamma, \delta, \rho^4, X, c_{rs}) \in R_+^{S^1+S^2+S^3+JY+KY+LY+e^r e^s e^5 + e^r e^s}\}$ において、

$$\langle F(Z^*), Z - Z^* \rangle \geq 0, \quad \forall Z \in B \quad (36)$$

を満たすような点 $Z^* \in B$ を求める問題とも表現できる。

なお、式(36)の山括弧はベクトルの内積を表す。

(2) 上位問題

上位問題は、スーパーネットワークの均衡条件(式(29)、あるいは、式(36))を制約条件として、交通ネットワーク上の設計変数を最適に決定する DNDP である。その目的関数には、道路ネットワーク上のリンクの新設・改良が SCN にもたらす効果の最大化、もしくは、交通ネットワーク上のリンクの途絶が SCN に及ぼす影響の最小化を採用する。

リンクの新設・改良がもたらす効果の最大化を目的関数とする場合、上位問題の決定変数が下位問題の均衡状態に影響することを考慮すると、上位問題は以下のように表現できる。

$$\max_u P(u, \alpha, Z(u)^*) \quad (37)$$

$$\begin{aligned} &\text{subject to} \\ &\langle F(Z(u)^*), Z(u) - Z(u)^* \rangle \geq 0, \quad \forall Z(u) \in B \end{aligned} \quad (38)$$

ここに、

- u : 交通ネットワーク上の設計変数 (新設・改良するリンクの組み合わせ)
- α : リンクの新設・改良に要する費用
- $Z(u)^*$: スーパーネットワーク上での均衡リンクフロー
- B : 実行可能空間

また、リンクの途絶がネットワークに及ぼす影響の最小化を考える場合には、目的関数を式(37)から式(39)に置き換えればよい。

$$\min_u P(u, Z(u)^*) \quad (39)$$

ここに,

u : 交通ネットワーク上の設計変数 (途絶リンクを表すベクトル)

Yamada *et al.*²⁰⁾は, DNDPの一つとして, 貨物輸送ネットワークの最適設計を対象としたMPECを定式化し, 上位問題の解法に遺伝的局所探索法(genetic local search: GLS)を採用して, 良好な近似最適解が得られること確認している. 本研究でも, 上位問題の解法には, GLSをはじめとした, 短時間で良好な解を算出するヒューリスティクスを採用する.

3. おわりに

本研究では, SC-T-SNEモデルを用いた交通ネットワークの離散型設計モデルに着目し, MPECの枠組みで定式化を行った. 下位問題では, サプライチェーンと交通のスーパーネットワーク全体で満たされるべき均衡条件を記述し, 上位問題では, その均衡状態を制約条件として, 交通ネットワーク上の設計変数(新設・改良するリンク, あるいは, 途絶リンクなど)が最適に決定されること, すなわち, 離散型ネットワーク設計問題に相当することを示した.

講演時には, 上位問題の解法についても言及し, 仮想的なネットワークを対象としたケーススタディの問題設定や計算結果を示す予定である.

参考文献

- 1) Yamada, T., Imai, K., Nakamura, T. and Taniguchi, E.: A supply chain-transport supernetwork equilibrium model with the behaviour of freight carriers, *Transportation Research Part E*, Vol.47, pp.887-907, 2011.
- 2) Nagurney, A., Dong, J. and Zhang, D.: A supply chain network equilibrium model, *Transportation Research Part E*, Vol.38, pp.281-303, 2002.
- 3) Dong, J., Zhang, D. and Nagurney, A.: A supply chain network equilibrium model with random demands, *European Journal of Operational Research*, Vol.156, pp.194-212, 2004.
- 4) 山田忠史, 繁田健, 今井康治, 谷口栄一: 在庫費用を考慮したサプライチェーンネットワーク均衡モデル: 消費需要の不確実性に伴う物資流動量とネットワーク効率性の変化, 土木学会論文集D, Vol.66, No.3, pp.359-368, 2010.
- 5) Nagurney, A., Cruz, J., Dong, J. and Zhang, D.: Supply chain networks, electronic commerce, and supply side and demand side risk, *European Journal of Operational Research*, Vol.164, pp.120-142, 2005.
- 6) Zhao, L. and Nagurney, A.: A network equilibrium framework for Internet advertising: Models, qualitative analysis, and algorithm. *European Journal of Operational Research*, Vol.187: pp.456-472, 2008.
- 7) Nagurney, A. and Toyasaki, F.: Reverse supply chain management and electronic waste recycling: a multitiered network equilibrium framework for e-cycling, *Transportation Research Part E*, Vol.41, pp.1-28, 2005.
- 8) Hammond, D. and Beullens, P.: Closed-loop supply chain network equilibrium under legislation, *European Journal of Operational Research*, Vol.183, pp.895-908, 2007.
- 9) Yang, G., Wang, Z. and Li, X.: The optimization of the closed-loop supply chain network, *Transportation Research Part E*, Vol.45, pp.16-28, 2009.
- 10) Cruz, J.M.: Dynamics of supply chain networks with corporate social responsibility through integrated environmental decision-making, *European Journal of Operational Research*, Vol.184, 1005-1031, 2008.
- 11) Meng, Q., Huang, Y. and Cheu, R.L.: Competitive facility location on decentralized supply chains, *European Journal of Operational Research*, Vol.196, pp.487-499, 2009.
- 12) Rezapour, S. and Farahani, R.Z.: Strategic design of competing centralized supply chain networks for markets with deterministic demand, *Advances in Engineering Software*, pp.810-822, 2010.
- 13) Nagurney, A.: Supply chain network design under profit maximization and oligopolistic competition, *Transportation Research Part E*, Vol.46, pp.281-294, 2010.
- 14) Daniele, P.: Evolutionary variational inequalities and applications to complex dynamic multi-level models, *Transportation Research Part E*, Vol.46, pp.855-880, 2010.
- 15) Hamdouch, Y.: Multi-period supply chain network equilibrium with capacity constraints and purchasing strategies, *Transportation Research Part C*, Vol.19, pp.803-820, 2011.
- 16) 山田忠史, 今井康治, 谷口栄一: 物流事業者の行動を考慮したサプライチェーンネットワーク均衡分析, 土木学会論文集D, Vol.65, No.2, pp.163-174, 2009.
- 17) Nagurney, A.: On the relationship between supply chain and transportation network equilibria: A supernetwork equivalence with computations, *Transportation Research Part E*, Vol. 42, pp.293-316, 2006.
- 18) Nagurney, A., Liu, Z., Cojocaru, M-G. and Daniele, P.: Dynamic electric power supply chains and transportation networks: An evolutionary variational inequality formulation, *Transportation Research Part E*, Vol.43, pp. 624-646, 2007.
- 19) Chiou, S.W.: A non-smooth optimization model for a two-tiered supply chain network, *Information Sciences*, Vol.177, pp.5754-5762, 2007.
- 20) Yang, Y., Zhou Z. and Zhou, G.: Study on the bi-level programming model for closed loop supply chain under competitive environment, *Proceedings of International Conference on Logistics Systems and Intelligent Management*, pp.20-24, 2010.
- 21) Yamada, T., Russ, B.F., Castro, J. and Taniguchi, E.: Designing multimodal freight networks: A heuristic approach and applications, *Transportation Science*, Vol.43 (2), pp.129-143, 2009.
- 22) Kinderlehrer, D. and Stampacchia, G.: *An Introduction to Variational Inequalities and their Application*, Academic Press, New York, NY, 1980.
- 23) Nagurney, A.: *Network Economics: A Variational Inequality Approach*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1999.
- 24) Meng, Q., Huang, Y. and Cheu, R.L.: A note on supply chain network equilibrium models, *Transportation Research Part E*, Vol.43, pp.60-71, 2007.