

# 2次元多都市モデルにおけるレッシュの正六角形市場域の形成

秋吉 一樹\*・池田 清宏\*\*・赤松 隆\*\*\*・高山 雄貴\*\*\*\*

\*学生非会員 東北大学大学院 工学研究科 土木工学専攻 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

E-mail:akiyoshi@msd.civil.tohoku.ac.jp

\*\*正会員 東北大学教授 工学研究科 土木工学専攻 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

E-mail:ikedata@msd.civil.tohoku.ac.jp

\*\*\*正会員 東北大学教授 情報科学研究科 人間社会情報科学専攻 (〒 980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

E-mail:akamatsu@plan.civil.tohoku.ac.jp

\*\*\*\*正会員 愛媛大学助教 理工学研究科 生産環境工学専攻 (〒 790-8577 愛媛県松山市文京町 3)

E-mail:akiyoshi@cee.ehime-u.ac.jp

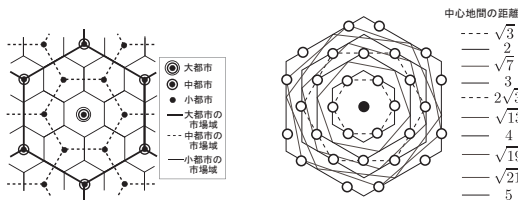
経済地理学分野のクリスタラー・レッシュの中心地理論では、均一な平面上において正六角形状の人口分布が生成されることが予測されている。しかし、この理論は幾何学的に求められたものであり、経済学的なメカニズムに欠けているという批判がある。そこで、本研究では、正六角形格子上に周期的に配置された都市群の人口集積挙動をミクロ経済学的基础をもつ新経済地理学モデルを用いて表現し、その集積・分散挙動を分岐解析により調べた。その結果、中心地理論で予測された人口分布が発現することが示され、中心地理論に経済学的かつ数理的な根拠を与えることができた。

*Key Words* : Forslid & Ottaviano モデル, 中心地理論, 分岐解析, レッシュのセクター

## 1. はじめに

都市の分布は、複雑系的一种として注目されており、自然科学から社会科学まで様々な学問分野で研究対象とされている。南ドイツにおける都市データの幾何学的研究から、クリスタラーは中心地理論を提唱した<sup>1)</sup>。中心地理論は、図-1(a)に示すように、都市化の度合い(大都市, 都市, 小都市, ...)の階層構造を示す、異なる六角形市場域の自己形成に関する理論である。レッシュは、クリスタラーの理論では考慮されていなかった傾いた正六角形状の市場域を示し、150種の市場域を確認し、それらの重ねあわせにより、レッシュの都市分布を提案した<sup>2),3)</sup>。特に、図-1(b)に示す半径が小さい順から10個の正六角形パターンは有名である。ただしこれらの理論は、幾何学的な考察に基づくものであり、経済学的に厳密に導出されたものではなく、理論の正当性に疑問を呈する人も多い。

本論文では、正六角形格子上に周期的に配置された都市群の分岐解析を行い、人口集積・分散のパターン形成により、中心距離が $\sqrt{9}$ ,  $\sqrt{12}$ ,  $\sqrt{13}$ ,  $\sqrt{21}$ ,  $\sqrt{25}$ のレッシュの正六角形市場域が発現することを示す。さらに、レッシュの階層性による放射線状のセクター、輸送費の観点から見た都市の市場域に関して調べる。都市の集積・分散モデルとして、新経済地理学のForslid & Ottavianoモデルとランダム効用理論に基づいた確率的都市選択モデルを用いる<sup>4)</sup>。



(a) クリスタラーの分布 (b) レッシュの市場域

図-1 クリスタラー・レッシュの中心地理論

## 2. 都市の人口集積の均衡モデルの定式化

都市の分散・集積の経済メカニズムを表わす Forslid & Ottaviano モデル<sup>4)</sup>と、ランダム効用理論に基づいた確率的都市選択モデルを組み合わせたモデルを用いる。

### 2.1 一般均衡モデルの枠組み

- 経済は、独占的競争が行われる工業部門と完全競争的な農業部門の2つの部門からなる。
- 工業品の輸送には、輸送費がかかり、農業品の輸送には輸送費はかからない。
- 経済全体では、工業部門で働く High skilled worker と、工業部門または農業部門で働く Low skilled worker が存在する。
- High skilled worker は自分自身の効用を最大化するように確率的に都市間を移動することができるが、Low skilled worker は移動不可能で、すべての都市に均等に分布する。

さらに、消費者の効用最大化行動、生産者の利潤最大化行動、氷解輸送などの原理を用いる。

### 2.2 モデルの定式化

Forslid & Ottaviano モデルと確率的 (Stochastic) 都市選択モデルを組み合わせたモデルの支配方程式は以下のように定式化される。(Fujita 等<sup>5)</sup>)

$$F_r(\lambda, \tau) = \frac{\exp(\omega_r \theta)}{\sum_{s=1}^n \exp(\omega_s \theta)} - \lambda_r = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

$$G_r = \left[ \sum_{s=1}^n \lambda_s (T_{rs}^M)^{1-\sigma} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}}, \quad \omega_r = \mu^\mu (1-\mu)^{1-\mu} w_r^M G_r^{-\mu} \quad (2)$$

$$Y_r = \frac{\mu \lambda_r w_r^M}{\sigma} + \frac{\sigma - \mu}{\sigma n}, \quad w_r^M = \sum_{s=1}^n \frac{(T_{rs}^M)^{1-\sigma} Y_s}{\sum_{k=1}^n \lambda_k (T_{sk}^M)^{1-\sigma}} \quad (3)$$

$$T_{rs}^M = \exp(\tau d_{rs}) \geq 1 \quad (4)$$

であり、各変数の意味は下記のとおりである．  
 $w_r$ : 都市  $r$  の High skilled worker の実質賃金．  
 $\lambda_r \in [0, 1]$ : 経済全体で都市  $r$  の High skilled worker の占有率．  
 $Y_r$ : 都市  $r$  の所得．  
 $w_r^M$ : 都市  $r$  における High skilled worker の賃金．  
 $\mu \in (0, 1]$ : 工業品への支出割合．  
 $G_r$ : 都市  $r$  の工業品価格指数．  
 $\sigma \in [1, +\infty]$ : 任意の差別化された 2 財間の代替弾力性．  
 $\theta$ : 実質賃金に対する知覚誤差の分散を表すパラメータ．  
 $T_{rs}^M$ : 都市  $r$  から都市  $s$  に工業品を運送する際の輸送費．  
 $d_{rs}$ : 都市  $r$  と都市  $s$  の最短距離．  
 $\tau$ : 輸送費パラメータ．

### 2.3 複数の都市と輸送費用

氷塊輸送 (1 単位のうち  $1/T_{rs}^M$  だけ到着工業品 1 単位当たり必要な発送数量) の形をとる輸送の技術は、都市  $r$  で生産された工業品が当地において価格  $p_r^M$  で販売されるなら、この財の消費地点  $s$  における送達価格  $p_{rs}^M$  は以下のように与えられる．

$$p_{rs}^M = p_r^M T_{rs}^M \quad (5)$$

工業品の価格指数は一般に各都市で異なる値をとることから、都市  $s$  のそれを  $G_s$  と表す．氷塊輸送に加え、すべての種類の工業品が同一の工場渡し価格をもつという仮定は以下ようになる．

$$G_r = \left[ \sum_{s=1}^n n_s (p_s^M T_{sr}^M)^{1-\sigma} \right]^{1/(1-\sigma)} \quad s = 1, \dots, n \quad (6)$$

都市  $r$  で生産された財に対する都市  $s$  における消費需要は

$$\mu Y_s (p_{rs}^M T_{rs}^M)^{-\sigma} G_s^{(\sigma-1)} \quad (7)$$

都市  $r$  で生産される工業品  $r$  の総販売量  $q_r^M$  は、販売されていく都市に関して合計することで以下のようになる．

$$q_r^M = \mu \sum_{s=1}^n Y_s (p_{rs}^M T_{rs}^M)^{-\sigma} G_s^{\sigma-1} T_{rs}^M \quad (8)$$

この式は、販売量が各都市の所得、各都市の価格指数、輸送費用および工場渡し価格に依存することを意味している．各消費地における同一種類の財の送達価格は工場渡し価格に比例しており、しかも財に対する各消費者の需要は一定の価格弾力力  $\sigma$  を持つため、消費者の分布に関係なく、各財に対する総需要の工場渡し価格に対する弾力力も  $\sigma$  となる．

### 2.4 都市形状モデル

都市の地理的分布として、平行四辺形を構成する図-2(a) に示すような正 3 角形の格子状の  $n \times n$  個の都市を考える．ちなみに図-2(a) は  $n = 3$  都市のケースである．都市を丸で示し、都市間を道で結ぶものとする．周期境界を設定することにより、2 次元無限平面を近似する．

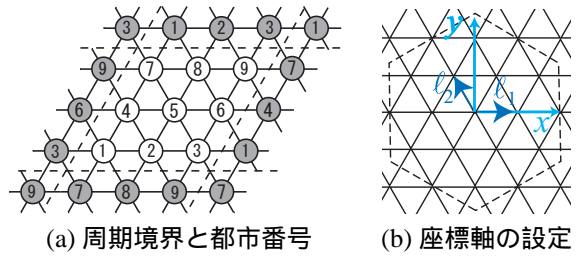


図-2 解析用多都市モデルと軸設定

## 3. 群論的分岐理論を用いた分岐経路の予測

### 3.1 対称性を表す群

群論的分岐理論により、系の対称性を記述する群に基づいて分岐解の対称性を決定する事が出来る<sup>6)</sup>．2次元  $n \times n$  都市群の対称性は群  $G = \langle r, s, p_1, p_2 \rangle$  により記述される．ここで  $r$  は原点に対する反時計回りの  $\pi/3$  回転操作、 $s$  は鏡映操作 ( $y \mapsto -y$ )、 $p_1$  は図-2(b) の  $\ell_1$  軸 ( $x$  軸) に沿った並進操作、 $p_2$  は図-2(b) の  $\ell_2$  軸に沿った並進操作を表す．

### 3.2 2次元空間の周期性の表現

図-3 の  $t_1$  と  $t_2$  は最大人口都市の空間周期ベクトルを表している．

$$t_1 = \alpha \ell_1 + \beta \ell_2, \quad t_2 = -\beta \ell_1 + (\alpha - \beta) \ell_2$$

とすると、空間周期 (最大都市間の距離) は

$$\sqrt{k_l} = \sqrt{\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2}$$

である． $k_l = 1$  は一様分布を表す．また、 $k_l = 3$  は図-3 より、 $(\alpha, \beta) = (2, 1)$  に対応する．

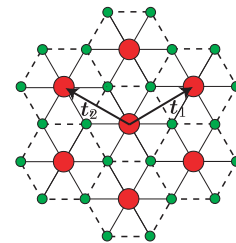


図-3  $k_l = 3$  システム

### 3.3 対称性を利用した分岐経路の導出

群  $G$  の対称性を持つ系の分岐は池田ら<sup>6)</sup>により解析されている．その結果は表-1 に挙げた通りで、目標とする対称性を持つ系が派生する分岐点の多重度は  $M=2,3,6,12$  であり、またレッシュの各システムには一様分布から直接分岐して発現する経路が存在し、その分岐点の多重度が予測されている．例えば表-1 より、 $k_l = 9$  のレッシュの正 6 角形市場域は 6 重分岐点より発現すると予測される．この予測により、主経路の 6 重分岐点を中心に経路の追跡を行い、 $k_l = 9$  のレッシュの正 6 角形市場域の発現を確認する．

表-1 レッシュの六角形状パターンに関する分析・予測

$k_l$	3	4	7	9	12
$(\alpha, \beta)$	(2,1)	(2,0)	(3,1)	(3,0)	(4,2)
M	2	3	12	6	6
$k_l$	13	16	19	21	25
$(\alpha, \beta)$	(4,1)	(4,0)	(5,2)	(5,1)	(5,0)
M	12	6	12	12	6

#### 4. 中心地理論と階層性によるセクター

レッシュは、最高次の中心地（首都）間の距離が  $a = \sqrt{k_l}$  という形であらわされることを示している。ここで、この式の中の整数  $k_l$  を、その分布を特徴づける数とし、対応する正六角形状分布を  $k_l$  の中心地システムと呼んでいる。レッシュは、この首都を中心として、さまざまな  $k_l$  の中心地システムが発現するとしている。図-4(a) に示すように、首都から放射状に広がる、経済活動が活発な人口が多いセクターとそうでない人口が少ないセクターが 30 度毎に現れることを予測している。

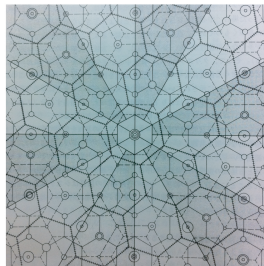


図-4 放射線状のセクター<sup>3)</sup>

#### 5. 解析結果

本研究では  $n \times n$  ( $n = 9, 12, 13, 21, 25$ ) 都市の解析を行った。ここでは、 $n = 9$  の解析結果を中心にまとめる。

##### 5.1 $k_l = 9$ のレッシュの正六角形市場域

一様に都市人口が分布する状態から、 $k_l = 9$  システムが発現する様子を図-5 に示す。都市人口が一様に分布する状態から、 $k_l = 3$  の中心地システムが分岐点 A により発現し、さらに、分岐点 B より  $k_l = 9$  の中心地システムに到達した。また分岐点 C では、都市が一様に分布する状態から、 $k_l = 9$  の中心地システムが発現しており、表-1 に示した理論予測の正しさを示している。他のケースも同様であることが確かめられた。

##### 5.2 レッシュの階層性によるセクター

本論文では数値解析により、サイズが異なる  $k_l = 9, 12, 13, 21, 25$  の 5 つの中心地システムを求めた (図-10)。レッシュが行っているように、この 5 つの中心地システムを仮想的に重ね合わせることによって放射状のセクターを求めた (図-10(右下図))。このセクターは、レッシュが予測した 30 度毎に人口の粗密が互い違いに出現する状況を表している。今回は仮想的な重ね合わせを行ったが、多産業・多階層モデルにモデルを

拡張することにより、このセクターを表現することが今後の課題としてあげられる。

##### 5.3 $k_l = 9$ の中心地システムの輸送量に基づく考察

今まで、人口分布によってレッシュの正六角形市場域が形成されると判断してきたが、ここでは輸送量の面からレッシュの正六角形市場域は形成されることを確かめる。グラフの  $z$  軸は輸送量を示しており  $x, y$  座標平面は都市を示している。グラフが赤いほど、その都市から他の都市への輸送量が多いことを示している (図-11)。また市場域の定義は、2 つの都市の輸送量が等しくなった 2 つの点を結んだ線まで、その都市が支配する市場域とする。この条件のもと、1 つの都市が支配する市場域は (図-12(左図)) のようになった。よって、 $k_l = 9$  の中心地システムは (図-12(右図)) のようになる。ゆえに、 $k_l = 9$  の中心地システムを形成することが分かる。

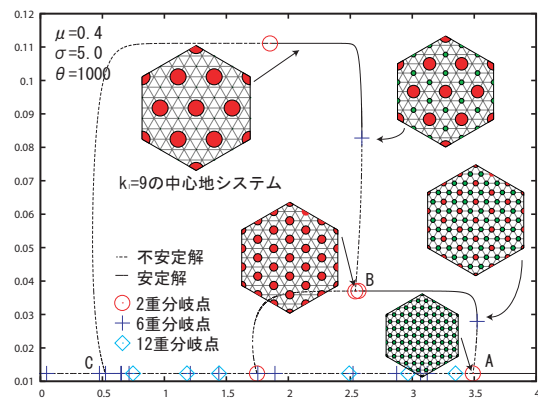


図-5 周期境界 81 都市,  $k_l = 9$

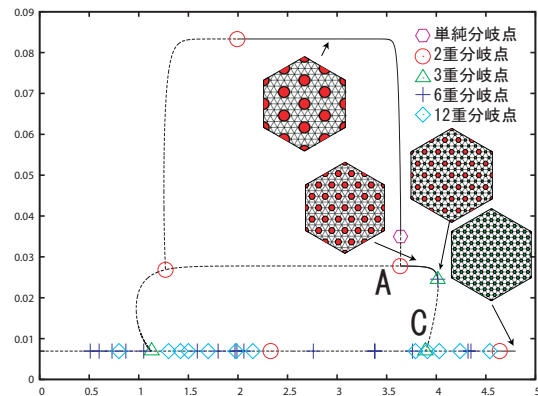


図-6 周期境界 144 都市,  $k_l = 4, 12$

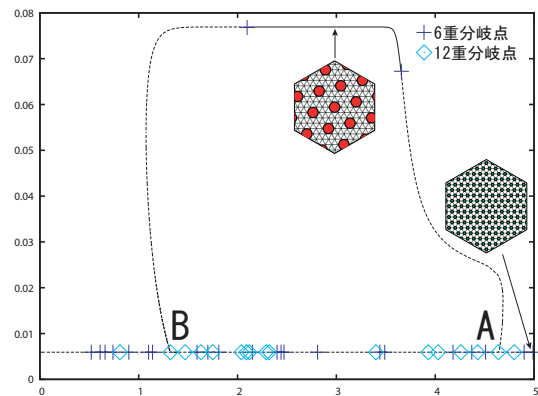


図-7 周期境界 169 都市,  $k_l = 13$

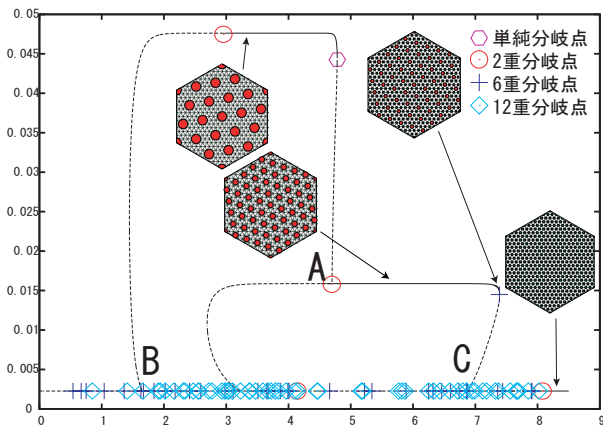


図-8 周期境界 441 都市,  $k_l = 7, 21$

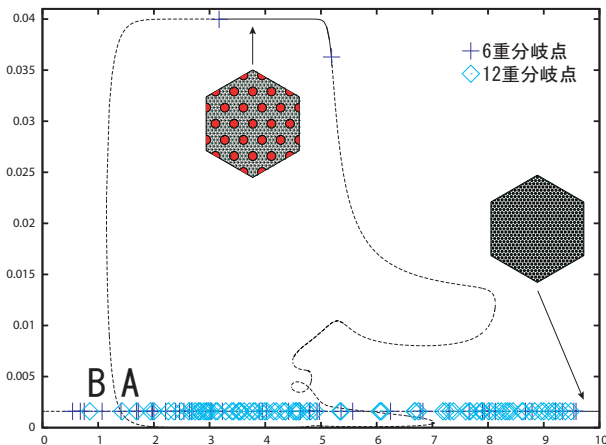


図-9 周期境界 625 都市,  $k_l = 25$

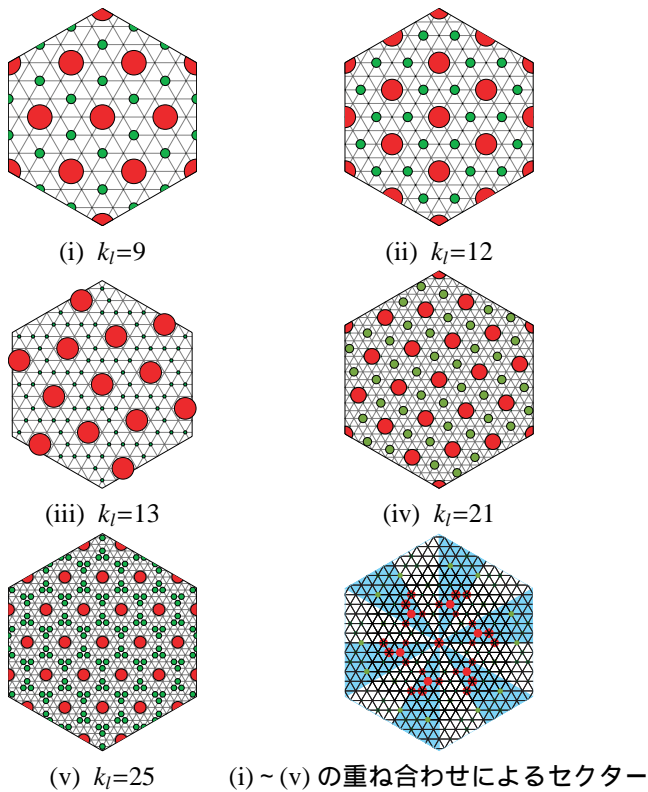


図-10  $k_l$  の中心地システムとセクター

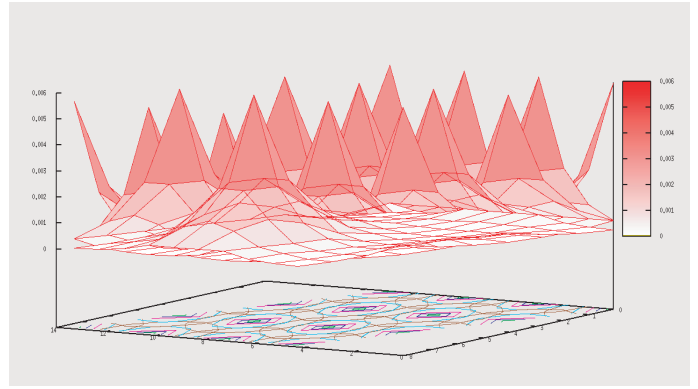


図-11 3次元表示による輸送量

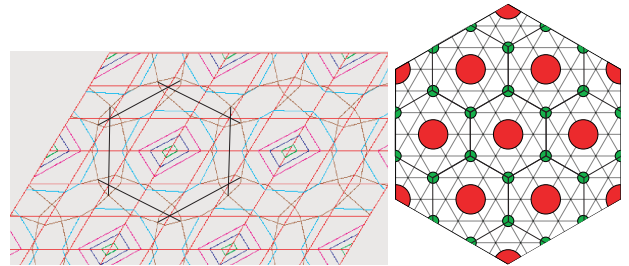


図-12 輸送量における中心地システム ( $k_l = 9$ )

## 6. おわりに

新経済地理学のモデルに対しても、中心地理論で予測された人口分布が発現することを示すことができ、中心地理論に経済学的かつ数理的な根拠を与えることができた。また、レッシュによる階層性によるセクターを、Core-Periphery モデルの数値解析により示すことができた。さらに、群論的分岐理論による予測と解析結果の一致を示すことにより、この理論の正しさを検証することができた。

### 参考文献

- 1) W. Christaller: Central Places in Southern Germany, Prentice Hall, 1966.
- 2) A. Lösch: The Economics of Location, Yale University Press, 1954.
- 3) P. Dicken, P.E.Lloyd, *Location in space: Theoretical Perspectives in Economic Geography*, Prentice Hall, 1991.
- 4) R. Forslid, and G.I.P. Ottaviano, An analytically solvable core-periphery model, *J. Econ. Geog.*, 3, pp.229-340, 2003.
- 5) M. Fujita, P. Krugman and S.J. Venables: *The Spatial Economy: Cities, Regions, and International Trade*, MIT Press, 1999.
- 6) K. Ikeda, K. Murota, T. Akamatsu, T. Kono, Y. Takayama, G. Sobhaninejad, A. Shibasaki: Self-organizing hexagons in economic agglomeration: core-periphery models and central place theory METR, 2010.

(2011.8.3 受付)