

# 一次元空間における 都市階層構造の形成メカニズム： 多産業 Core-Periphery モデルの分岐解析

高山 雄貴<sup>1</sup>・赤松 隆<sup>2</sup>・菅澤 晶子<sup>3</sup>

<sup>1</sup>正会員 愛媛大学 助教 大学院理工学研究科 (〒 790-8577 愛媛県松山市文京町 3 番)  
E-mail: takayama@cee.ehime-u.ac.jp

<sup>2</sup>正会員 東北大学 教授 大学院情報科学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉 6-6)  
E-mail: akamatsu@plan.civil.tohoku.ac.jp

<sup>3</sup>正会員 国土交通省 関東地方整備局 江戸川河川事務所工務第一課 (〒 278-0005 千葉県野田市宮崎 134)  
E-mail: sugasawa-a8310@ktr.mlit.go.jp

本研究の目的は、立地変更に伴う relocation cost が、都市システムの産業立地パターンに与える影響を明らかにすることである。そのために、relocation cost を導入した多都市・多産業 Core-Periphery モデルを構築する。そして、安定均衡解として創発する集積パターンを理論解析・数値解析により調べる。解析の結果、階層的な産業構造が安定的な均衡状態として創発し得ることが明らかにされた。

*Key Words* : industrial urban hierarchy, relocation cost, core-periphery model, bifurcation analysis

## 1. はじめに

企業や家計の立地変更には、立地慣性と呼ばれる慣性力が働くことが地理学分野などでよく知られている。これは、企業や家計の立地変更には大きな費用が必要となることから、直観的に理解できる。この立地変更のための費用(以降、relocation cost)は、通常考えられる直接的な費用のみならず、例えば、労働力・市場・情報の不確実性に伴う広い意味での費用も含めて考えることができる。実際、Burda<sup>1)</sup>は、real option アプローチにより、不確実性の存在が移住の障壁を高くすることを理論的に明らかにしている。

この relocation cost による慣性力は、企業や家計の立地変更を妨げる方向の力を働かせるものの、必ずしも長期的な都市システムの構造を完全に固定するものではないことに注意が必要である。例えば、Fujita<sup>2)</sup>は、慣性力が存在する都市システムにおいて、現実に劇的な構造変化がアメリカや日本で起こっていることを指摘している<sup>1</sup>。そして、その結果として、過去の状態に依存した都市システムの空間構造(e.g., 階層的な都市システム)が形成されることを示唆している。

relocation cost などによる立地変更の慣性力は、一般には立地主体により大きく異なっており、その異質性

が階層的な都市システムの形成に大きな影響を及ぼしていると考えられる。これは、relocation cost が比較的小さいと考えられる第3次産業の都市集積が他の産業と比べて顕著であるという事実(e.g., 久武<sup>4)</sup>)からも推察できる。すなわち、都市システムの劇的な構造変化は、relocation cost が比較的低い企業の急激な都市集積によりもたらされ、その一方で、relocation cost が比較的高い企業は強い慣性力により空間分布が変化しない。その結果、既存の都市システムの空間構造が、新たな都市システムへと変化する。

そこで、本稿では、産業毎に異なる relocation cost による立地変更の慣性力が都市システムの産業構造に与える影響を、新経済地理学モデルにより明らかにする。より具体的には、立地変更の慣性力が、1) 都市システムの産業構造を階層化させる、2) 大幅な産業構造の変化を生み出すことを示す。そのために、relocation cost を導入した多産業 Core-Periphery (CP) モデルを構築する。そして、Akamatsu, Takayama and Ikeda<sup>5)</sup>、高山・赤松<sup>6)</sup>の手法を応用することで、多産業 CP モデルの分岐特性を明らかにする。ただし、本章で示す relocation cost を導入した多産業 CP モデルには、非常に多くの安定的な均衡状態が存在しており、その初期状態に応じて輸送費用の減少に伴い創発する安定的な集積パターンが大きく異なる。そこで、本章では、その代表的ケースとして、産業構造が自律的に階層化することを示す

<sup>1</sup> Sjaastad<sup>3)</sup>を始めとする migration に関する研究では、relocation cost の存在が大規模な移住を生み出すことを理論的に説明している。

ために、全産業が各都市に均等に分散している状態からの集積パターンの推移を解析的に示す<sup>2</sup>。

企業や家計の立地変更に費用がかかることを考慮した集積経済モデルに関する研究は、これまでもいくつか行われてきた。その殆どは、Krugman<sup>7)</sup>, Baldwin<sup>8)</sup>, Ottaviano<sup>9)</sup>, 織田澤・赤松<sup>10)</sup>, Oyama<sup>11)</sup>に代表される、予見的 (forward-looking) な労働者を考慮した研究である。しかし、これらの研究は、企業・労働者の移住に関する混雑効果を導入するために relocation cost を導入しているに過ぎない。そのため、relocation cost を移住フローの関数で表現しており、立地変更を直接妨げる慣性力を表現しているわけではない。上記とは異なる方向の研究として、異質な企業の sorting 現象を relocation cost を導入した Melitz<sup>12)</sup>モデルにより説明した Baldwin and Okubo<sup>13)</sup>が挙げられる。しかし、その relocation cost は、上記した研究と同様、移住フローの関数として表現されている。したがって、従来研究には、relocation cost による立地変更の慣性力が都市システムの産業構造に与える影響を調べたものは存在しない。

階層的な都市システムの形成を説明する理論は古くから発展しており、その代表的理論は古典的な経済地理学分野の Chrisaller<sup>14)</sup>, Lösch<sup>15)</sup>の中心地理論である。この理論は、規模の経済と輸送費用のトレード・オフにより、産業の階層構造が創発することを示唆している。しかし、その結論を説明するためのミクロ経済学的基础が欠如している問題が古くから指摘されてきた。この問題に対して、Eaton and Lipsey<sup>16)</sup>は、経済モデルにより階層的な産業構造の形成を説明している。しかし、このモデルには複数の均衡解が存在するものの、その安定性が確認されていないという問題を残している。

上記のような課題を解決した研究は、近年、新経済地理学分野を中心に蓄積されている。その代表的な研究は、Fujita, Krugman and Mori<sup>17)</sup>, Tabuchi and Thisse<sup>18)</sup>である。Fujita, Krugman and Mori は、Krugman<sup>19)</sup>の Core-Periphery (CP) モデルを連続空間・多産業の枠組みに拡張し、数値計算により階層的な都市システムが創発することを確認している。Tabuchi and Thisse は、多産業 CP モデルにおいて、輸送費用の低下に伴う均衡解の分岐現象により産業構造が階層化することを解析的に示している。さらに、Hsu<sup>20)</sup>は、企業間の空間競争を考慮した企業立地モデルにより、産業構造が階層化する集積パターンが安定均衡解となることを示し

<sup>2</sup> 初期状態の仮定は、産業の階層構造が自律的に創発することを示すためのものである。異なる初期状態を考えても、人口分布の対称性さえ満たされていれば、本章で示す解析手法と全く同様の方法により、輸送費用の減少に伴う集積パターンの進展を解析的に示すことができる。また、初期の人口分布に対称性がない場合でも、本章 6 節で用いる計算分岐理論を利用すれば、数値的に集積パターンの進展を調べることは可能である。

ている。しかし、これらの研究では、relocation cost が集積パターンに与える影響を全く考慮していない。したがって、本研究で得られる結果は、既存研究にはない、新たな都市階層構造の形成メカニズムを示すものである。

本章の構成は以下のとおりである。まず、2 節では、relocation cost を導入した多産業 CP モデルの枠組みを示し、その調整ダイナミクス、均衡状態と安定性を定義する。次に、3 節で都市システムの空間構造を設定した上で、分岐解析の準備のために固有値解析を行う。その結果を利用して、都市内の産業構造が階層化する条件を 4 節で明らかにする。5 節では、階層化した産業構造が、その後、どのように進展するのかを示す。6 節では、計算分岐理論に基づいた数値実験により、より詳細な産業の集積パターンを示す。最後に、7 節で結論を述べる。

## 2. 多産業 Core-Periphery モデル

本章で扱う relocation cost を導入した多産業 CP モデルの枠組みを示す。そして、以降でモデルの特性を調べるために、均衡状態とその安定性を定義する。

### (1) モデルの設定

#### a) 都市・経済環境の設定

離散的な  $K$  個の都市が存在する都市経済システムを考える。労働者は、技術・知識水準に応じて skilled worker と unskilled worker に分類される。skilled worker は、 $T$  種類に分けられる高度な技術のうち、いずれか 1 つを所有する労働者であり、その技術を活用して起業する self-employed entrepreneur である<sup>3</sup>。この労働者は、都市間を自由に移動できるものの、移住の際に所有する技術の種類に応じて relocation cost が必要となると仮定する。unskilled worker は、高度な技術を持たず、労働集約的作業に従事する労働者である。また、すべての都市に一樣に分布し、労働・居住する都市を選択できない。技術  $t$  を所有する skilled worker (以降、skilled worker  $t$ )、unskilled worker の総人口は、各々、 $H^{(t)}, L$  であり、全都市に一樣に分布する unskilled worker の各都市の人口は  $l = L/K$  と表す。

この経済には、農業部門と工業部門の 2 部門が存在する。農業部門は、収穫一定の技術により、unskilled worker の労働を生産要素として 1 種類の同質な財 (以

<sup>3</sup> この仮定は、Krugman<sup>21)</sup>, Zeng<sup>22)</sup>, Takatsuka and Zeng<sup>23)</sup>と同様、skilled worker は従事する産業を変更することができないという意味を持つ。ただし、この仮定は特殊なものではない。例えば、skilled worker が特定の産業に従事するには他の産業にはない特別な能力が必要となるため、従事する産業を変更するには多大なコストがかかるという状況を考えることに対応している。

降, 農業財) を生産する完全競争的な部門である. 工業部門は, 収穫逓増の技術により, 差別化された財を生産する独占競争的な部門である. この部門は, 必要となる技術の種類に応じて  $T$  種類の産業に分けられ, 産業  $t$  の企業 (以降, 企業  $t$ ) は, 財 (以降, 工業財  $t$ ) を生産するために, 生産要素として skilled worker  $t$  及び unskilled worker の労働を投入する必要がある. ある都市で生産された財は, 隣接する都市間を結ぶ交通ネットワークにより他の都市へ輸送することができるため, どの都市でも消費することができる.

## b) 消費者行動

都市  $i$  の消費者は, 効用関数  $U_i(\{C_i^{M(t)}, C_i^A\})$  を所得制約  $Y_i$  の下で最大化するように, 工業財と農業財の消費量  $\{C_i^{M(t)}, C_i^A\}$  を決定する:

$$\max_{\{C_i^{M(t)}, C_i^A\}} U_i(\{C_i^{M(t)}, C_i^A\}) = \sum_{t=0}^{T-1} \mu^{(t)} \ln C_i^{M(t)} + C_i^A \quad (1a)$$

$$\text{s.t. } p_i^A C_i^A + \sum_{t=0}^{T-1} \sum_j \int_0^{n_j^{(t)}} p_{ji}^{(t)}(k) q_{ji}^{(t)}(k) dk = Y_i, \quad (1b)$$

ここで,  $\mu^{(t)} > 0$  は工業財  $t$  への支出割合を表す定数,  $p_i^A$  は都市  $i$  における農業財の価格である.  $k$  は, 各産業  $t$  の工業財の種類を表すインデックスであり, 常に工業財の種類が連続的かつ無限に存在すると仮定するため, 連続変数とする.  $p_{ij}^{(t)}(k), q_{ij}^{(t)}(k)$  は, 各々, 都市  $j$  で生産され, 都市  $i$  で消費される工業財  $t$  の種類毎の価格, 消費量を表す.  $n_j^{(t)}$  は都市  $j$  で生産された工業財  $t$  のバリエーション数である. また, 工業財  $t$  の消費量  $C_i^{M(t)}$  は, 工業財  $t$  の消費量  $q_{ij}^{(t)}(k)$  を代替の弾力性  $\sigma^{(t)} > 1$  を用いて集計した,

$$C_i^{M(t)} = \left( \sum_j \int_0^{n_j^{(t)}} q_{ij}^{(t)}(k)^{(\sigma^{(t)}-1)/\sigma^{(t)}} dk \right)^{\sigma^{(t)}/(\sigma^{(t)}-1)} \quad (2)$$

によって定義される.

効用最大化問題 (1) を解くことにより, 農業財・工業財  $t$  の消費量が価格  $p_i^A = 1, p_{ji}^{(t)}(k)$ , 所得  $Y_i$  の関数として, 次のように導出される:

$$C_i^A = \frac{Y_i}{p_i^A} - \sum_{t=0}^{T-1} \mu^{(t)}, \quad C_i^{M(t)} = \mu^{(t)} \frac{p_i^A}{\rho_i^{(t)}}, \quad (3a)$$

$$q_{ij}^{(t)}(k) = \mu^{(t)} \frac{p_i^A \rho_i^{\sigma-1}}{p_{ji}^{(t)}(k)^\sigma}. \quad (3b)$$

ここで,  $\rho_i^{(t)}$  は, 都市  $i$  での工業財  $t$  の価格指数

$$\rho_i^{(t)} = \left( \sum_j \int_0^{n_j^{(t)}} p_{ji}^{(t)}(k)^{1-\sigma^{(t)}} dk \right)^{1/(1-\sigma^{(t)})} \quad (4)$$

である. 以上の結果より, 都市  $i$  全体で消費する都市  $j$  で生産した工業財  $t$  の種類  $k$  の消費量  $Q_{ji}^{(t)}(k)$  は, skilled worker  $t$  の各都市の人口を  $h^{(t)} = [h_0^{(t)}, h_1^{(t)}, \dots, h_{K-1}^{(t)}]^T$  と

すると, 次のように表せる:

$$Q_{ji}^{(t)}(k) = q_{ji}^{(t)}(k) (H_i + l). \quad (5)$$

ここで,  $H_i \equiv \sum_{t=0}^{T-1} h_i^{(t)}$  である.

## c) 企業行動

農業部門では, unskilled worker の労働のみを生産要素とし, 同質な財を完全競争のもとで収穫一定の技術により生産する. この場合, 一般性を失うことなく, 1 単位の unskilled worker の労働により, 1 単位の財が生産されると基準化できる. したがって, 限界費用原理から, 農業財の価格  $p_i^A$  は, unskilled worker の賃金  $w_i^L$  と等しくなる. また, 農業財の輸送には費用がかからないニューメレル財と仮定するため, どの都市においても農業財の価格, unskilled worker の賃金は等しい (i.e.,  $p_i^A = w_i^L = 1 \forall i$ ).

工業部門では, 企業  $t$  は, 同産業の企業間で Dixit-Stiglitz 型の独占的競争を行う. すなわち, 自由に参入・撤退できると仮定した企業が, 収穫逓増の技術により差別化された工業財  $t$  を生産する. 規模の経済, 消費者の多様性の選好, ならびに供給できる財の種類に制限がないことから, どの企業も必ず他企業とは異なる種類の財を生産する. そのため, 生産を行う企業  $t$  の数は, 供給される財の種類  $n_i^{(t)}$  に等しい. また, 企業  $t$  が工業財  $t$  を生産するためには, skilled worker  $t$  の労働を 1 単位と, 生産量  $x_i^{(t)}(k)$  に応じて unskilled worker の労働を  $\beta^{(t)} x_i^{(t)}(k)$  単位, 生産要素として投入する必要があると仮定する. この仮定から, 生産を行う企業  $t$  の数  $n_i^{(t)}$  は, 都市  $i$  に居住する skilled worker  $t$  の人口  $h_i^{(t)}$  と等しくなる (i.e.,  $n_i^{(t)} = h_i^{(t)}$ ). また, 工業財  $t$  の生産費用関数は, skilled worker  $t$  の賃金を  $w_i^{(t)}$  とすると, 以下のように与えられる:

$$c(x_i^{(t)}(k), w_i^{(t)}) = w_i^{(t)} + \beta x_i^{(t)}(k). \quad (6)$$

工業財  $t$  の輸送には費用がかかると考える. この輸送費用は, 氷塊費用の形をとると仮定する. すなわち, 都市  $i$  から  $j$  に 1 単位の工業財  $t$  を輸送すると, 1 単位のうち  $1/\tau_{ij}^{(t)}$  単位だけが実際に到着し, 残りは溶けてしまふと考える. そのため, 工業財  $t$  の需要量  $Q_{ji}^{(t)}(k)$  と供給量  $x_i^{(t)}(k)$  との間に次の関係が成立する:

$$x_i^{(t)}(k) = \sum_j \tau_{ij}^{(t)} Q_{ij}^{(t)}(k). \quad (7)$$

工業部門では, Dixit-Stiglitz 型の独占的競争を仮定しているため, 企業  $t$  は価格指数  $\rho_i^{(t)}$ , 消費者の需要量 (5) を所与として自ら生産する工業財  $t$  の価格  $p_{ij}^{(t)}(k)$  を設定する. そのため, 企業  $t$  の利潤最大化行動は, 次のように定式化できる:

$$\max_{\{p_{ij}^{(t)}(k)\}} \Pi_i^{(t)}(k) = \sum_j p_{ij}^{(t)}(k) Q_{ij}^{(t)}(k) - c(x_i^{(t)}(k), w_i^{(t)}). \quad (8)$$

この企業の最適条件と工業財  $t$  の需要量 (5) より、工業財の価格  $p_{ij}^{(t)}(k)$  が次のように導出される:

$$p_{ij}^{(t)}(k) = \frac{\sigma^{(t)}\beta}{\sigma^{(t)} - 1} \tau_{ij}^{(t)}. \quad (9)$$

この結果から明らかなように、工業財  $t$  の価格は財の種類  $k$  には依存しない。さらに、 $Q_{ij}^{(t)}(k), x_i^{(t)}(k)$  も財の種類  $k$  には依存しない。そこで、以降では  $k$  を省略し、各々、 $p_{ij}^{(t)}, Q_{ij}^{(t)}, x_i^{(t)}$  と表記する。

## (2) 短期均衡条件と均衡解の導出

都市経済システムにおいて、財の生産・消費量と賃金、財価格は、skilled worker  $t$  が移住できない程、短期間で均衡すると仮定する。この状態を“短期均衡状態”と呼ぼう。短期均衡状態では、企業の参入・撤退が自由であることから、企業  $t$  の利潤が常にゼロとなる。したがって、skilled worker  $t$  の賃金は次のように表せる:

$$w_i^{(t)} = \left( \sum_j p_{ij}^{(t)} Q_{ij}^{(t)} - \beta x_i^{(t)} \right). \quad (10)$$

さらに、短期均衡状態では、工業財  $t$  の市場清算条件が成立する。工業財には輸送費用がかかるため、この市場清算条件は、式 (7) で表わされる。

以上の短期均衡条件から得られる短期均衡解を示そう。都市  $i$  の価格指数  $\rho_i^{(t)}$  は、式 (4) に式 (9) を代入することで、また、skilled worker  $t$  の均衡賃金  $w_i^{(t)}$  は、式 (10) に価格指数  $\rho_i^{(t)}$ 、式 (5), (7), (9) を代入することで、以下のように導出できる:

$$\rho_i^{(t)}(\mathbf{h}^{(t)}) = \frac{\sigma^{(t)}\beta}{\sigma^{(t)} - 1} \left( \Delta_i^{(t)}(\mathbf{h}^{(t)}) \right)^{1/(1-\sigma^{(t)})}, \quad (11)$$

$$w_i^{(t)}(\mathbf{h}^{(t)}) = \frac{\mu^{(t)}}{\sigma^{(t)}} \sum_j \left( \frac{d_{ij}^{(t)}}{\Delta_j^{(t)}(\mathbf{h}^{(t)})} \right) (H_j + l). \quad (12)$$

ここで、 $d_{ij}^{(t)}$  は都市  $i, j$  間の取引に関する条件を表わし、

$$d_{ij}^{(t)} \equiv \{\tau_{ij}^{(t)}\}^{1-\sigma^{(t)}}, \quad (13)$$

$\Delta_i^{(t)}(\mathbf{h}^{(t)})$  は都市  $i$  の工業財市場の大きさを表わす指標であり、以下のように定義される:

$$\Delta_i^{(t)}(\mathbf{h}^{(t)}) \equiv \sum_j d_{ji}^{(t)} h_j^{(t)}. \quad (14)$$

式 (5), (9), (11) より、 $d_{ij}^{(t)}$  は、 $d_{ij}^{(t)} = p_{ij}^{(t)} Q_{ij}^{(t)} / p_{jj}^{(t)} Q_{jj}^{(t)}$  と表すことができる。これは、 $d_{ij}^{(t)}$  が、都市  $i$  における、都市  $j$  で生産された工業財  $t$  の支出額と自都市 (i.e, 都市  $i$ ) で生産された工業財  $t$  の支出額の比率を表していることを意味する。

以上の結果は、 $(i, j)$  要素が  $d_{ij}^{(t)}$  である都市間の取引条件を表す空間割引行列  $D^{(t)}$  を定義することで、その数学的構造を明確にすることができる。具体的には、空

間割引行列  $D^{(t)}$  と、

$$\Delta^{(t)} \equiv [\Delta_0^{(t)}(\mathbf{h}^{(t)}), \Delta_1^{(t)}(\mathbf{h}^{(t)}), \dots, \Delta_{K-1}^{(t)}] = D^{(t)\top} \mathbf{h}^{(t)} \quad (15)$$

$$M^{(t)} \equiv D^{(t)} \{\text{diag}[\Delta^{(t)}]\}^{-1} \quad (16)$$

を利用すると、次の補題が得られる:

補題 2.1 skilled worker  $t$  の間接効用関数  $v^{(t)}$  は、skilled worker の各都市の人口  $\mathbf{h} = [\{\mathbf{h}^{(1)}\}^\top, \dots, \{\mathbf{h}^{(T)}\}^\top]^\top$  の陽関数である<sup>4</sup>:

$$v^{(t)}(\mathbf{h}) = \sum_m S^{(m)}(\mathbf{h}^{(m)}) + \{\sigma^{(t)}\}^{-1} \left[ w^{(t),(H)}(\mathbf{h}) + w^{(t),(L)}(\mathbf{h}^{(t)}) \right] \quad (17)$$

ここで、右辺のベクトルは、

$$S^{(t)}(\mathbf{h}^{(t)}) \equiv (\sigma^{(t)} - 1)^{-1} \ln[D^{(t)} \mathbf{h}^{(t)}], \quad (18a)$$

$$w^{(t),(H)}(\mathbf{h}) \equiv M^{(t)} \mathbf{H}, \quad w^{(t),(L)}(\mathbf{h}^{(t)}) \equiv l M^{(t)} \mathbf{1}, \quad (18b)$$

$\mathbf{H} \equiv [H_0, H_1, \dots, H_{K-1}]^\top$ ,  $\mathbf{1}$  は全ての要素が 1 の  $K \times 1$  ベクトルである。また、ベクトルの各要素に対数をとる場合、 $\ln[\mathbf{a}] \equiv [\ln a_0, \ln a_1, \dots]^\top$  と表記した。

## (3) 調整ダイナミクス、長期均衡状態と安定性

長期的には、skilled worker は、自らの得る効用を最大化するように労働・居住する都市を選択することができる。この skilled worker の都市選択及び移住行動が長期的に落ち着く状態を“長期均衡状態”と呼ぼう。CP モデルの長期均衡状態は、後に示されるように、複数存在する。したがって、均衡選択のためには、均衡解周りの摂動に対する安定性、すなわち局所的な漸近安定性を調べる必要がある。そこで、ここでは長期均衡状態とその安定性を定義する。

本研究で構築するモデルでは、skilled worker  $t$  は、所有する技術に応じて、居住する都市を  $i$  から  $j$  に変更する場合、その距離  $t(i, j)$  に応じた relocation cost  $\eta_{ij}^{(t)}$  が必要となる。本研究では、この relocation cost の違いにより産業の異質性を表現する。以降では、その極端なケースとして、 $\eta_{ij}^{(t)}$  が次のように与えられると仮定する:

$$\eta_{ij}^{(1)} = 0 \quad \forall i, j, \quad (19a)$$

$$\eta_{ij}^{(t)} < \eta_{ij}^{(t+1)} \quad \forall t. \quad (19b)$$

これは、産業  $t$  毎に必要な relocation cost が異なり、そのうち 1 つの産業は費用がかからないことを意味している。この設定は、例えば、サービス業を表す産業 1 に必要な relocation cost が非常に小さい一方で、製造業 (産業  $m$ ) は大きな費用が必要であることを考えれば、現実にも想定され得る状況である。

長期均衡状態やその局所安定性を定義するために、skilled worker  $t$  の都市選択に関する調整ダイナミクス

<sup>4</sup> 消費者の都市選択に無関係である定数項と係数  $\mu^{(t)}$  は省略した。

を示そう。skilled worker  $t$  は、時々刻々、効用の低い都市から高い都市に移住すると仮定する。より具体的には、時点  $s$  において  $ds$  間に立地点  $i$  から  $j$  へと移る skilled worker  $t$  の数  $\rho_{ij}^{(t)}(s)$  を次のように与える：

$$\rho_{ij}^{(t)}(s) = \{H^{(t)}\}^{-1} h_i^{(t)}(s) h_j^{(t)}(s) \left[ v_j^{(t)}(\mathbf{h}(s)) - v_i^{(t)}(\mathbf{h}(s)) - \eta_{ij}^{(t)} \right]_+ \quad (20)$$

ここで、 $h_i^{(t)}(s), v_i^{(t)}(\mathbf{h}(s))$  は都市  $i$  の時点  $s$  での skilled worker  $t$  の人口と効用水準、 $[a]_+ \equiv \max\{a, 0\}$  である。この式 (20) は、skilled worker  $t$  の移動スピード  $\rho_{ij}^{(t)}(s)$  が居住する都市を変更することによる効用の増分  $[v_j^{(t)}(\mathbf{h}(s)) - v_i^{(t)}(\mathbf{h}(s)) - \eta_{ij}^{(t)}]_+$  と各都市の skilled worker  $t$  の人口に比例することを意味している。

式 (20) で示した  $\rho_{ij}^{(t)}(s)$  に関する仮定は、skilled worker  $t$  の行動が、立地変更を行う時点のみに支払う relocation cost と効用フローとの差で (i.e., ストックとフローを比較して) 決定されるという、非現実的なものであるように見える。しかし、この仮定 (20) は、skilled worker  $t$  が将来得られる効用も考慮して立地変更を行う状況と対応が取れる。ここでは、それを具体的に確認しておこう。skilled worker  $t$  が都市  $i$  において現時点  $s = s_0$  から将来に渡り得られる効用は、割引率  $\delta$  を用いて、

$$\int_{s_0}^{\infty} v_i(\mathbf{h}(s)) \exp[-\delta(s - s_0)] ds = \frac{v_i(\mathbf{h}(s_0))}{\delta} \quad (21)$$

と表現されると考える。これは、skilled worker  $t$  は将来に渡り得られる効用を、現時点  $s_0$  での人口分布  $\mathbf{h}(s_0)$  が将来も続くと考えて算出することを意味する。このように効用を表現できる場合、 $\rho_{ij}^{(t)}(s)$  は、以下のように与えられる：

$$\rho_{ij}^{(t)}(s) = \frac{h_i^{(t)}(s) h_j^{(t)}(s)}{\delta H^{(t)}} \left[ v_j^{(t)}(\mathbf{h}(s)) - v_i^{(t)}(\mathbf{h}(s)) - \delta \eta_{ij}^{(t)} \right]_+ \quad (22)$$

上式は、 $\delta = 1$  となるように時間単位を基準化すると、式 (20) と一致する。以上より、 $\rho_{ij}^{(t)}(s)$  に関する仮定は、skilled worker  $t$  が relocation cost と将来にわたり得られる効用を比較して立地変更をする状況を表現していることがわかる。

上述の仮定 (20) より、時点  $s + ds$  での都市  $i$  の skilled worker  $t$  の人口  $h_i^{(t)}(s + ds)$  は

$$h_i^{(t)}(s + ds) = h_i^{(t)}(s) + \sum_j \{\rho_{ji}^{(t)}(s) - \rho_{ij}^{(t)}(s)\} ds \quad (23)$$

で表される。したがって、調整ダイナミクスは次のように与えられる：

$$\dot{h}_i^{(t)} = F_i^{(t)}(\mathbf{h}) \equiv h_i^{(t)} \sum_j \frac{h_j^{(t)}}{H^{(t)}} \left\{ \left[ v_j^{(t)}(\mathbf{h}) - v_i^{(t)}(\mathbf{h}) - \eta_{ji}^{(t)} \right]_+ - \left[ v_j^{(t)}(\mathbf{h}) - v_i^{(t)}(\mathbf{h}) - \eta_{ij}^{(t)} \right]_+ \right\} \quad (24)$$

上式より、都市間の効用差  $|v_i^{(t)}(\mathbf{h}) - v_j^{(t)}(\mathbf{h})|$  が relocation cost  $\eta_{ij}^{(t)}$  を下回る限り、skilled worker  $t$  は都市間を移動しない (i.e.,  $F_i^{(t)}(\mathbf{h}) = 0$ ) ことがわかる。ただし、skilled worker 0 の調整ダイナミクス  $F_i^{(0)}(\mathbf{h})$  は、relocation cost が不要である (i.e.,  $\eta_{ij}^{(0)} = 0$ ) と仮定したため、次のように表される：

$$F_i^{(0)}(\mathbf{h}) = h_i^{(0)} \{v_i^{(0)}(\mathbf{h}) - \bar{v}^{(0)}(\mathbf{h})\}, \quad (25)$$

$$\bar{v}^{(0)}(\mathbf{h}) \equiv \sum_j h_j^{(0)} v_j^{(0)}(\mathbf{h}). \quad (26)$$

このダイナミクスは、新経済地理学分野でも標準的に用いられる replicator dynamics である。

次に、長期均衡状態とその局所安定性を定義しよう。長期均衡状態は、次の条件

$$\begin{cases} |v_j^{(t)}(\mathbf{h}) - v_i^{(t)}(\mathbf{h})| \leq \eta_{ij}^{(t)} & \text{if } h_i^{(t)}, h_j^{(t)} > 0, \\ v_j^{(t)}(\mathbf{h}) - v_i^{(t)}(\mathbf{h}) \geq -\eta_{ij}^{(t)} & \text{if } h_i^{(t)} = 0, \end{cases} \quad \forall t \quad (27)$$

を満たす  $\mathbf{h}^*$  で定義される。この定義は、relocation cost を考慮しない場合：

$$\begin{cases} v_j^{(t)}(\mathbf{h}) - v_i^{(t)}(\mathbf{h}) = 0 & \text{if } h_i^{(t)}, h_j^{(t)} > 0, \\ v_j^{(t)}(\mathbf{h}) - v_i^{(t)}(\mathbf{h}) \geq 0 & \text{if } h_i^{(t)} = 0, \end{cases} \quad \forall t \quad (28)$$

と比較すると、より緩い条件となっているに注意が必要である。

長期均衡状態  $\mathbf{h}^*$  の安定性は、前章までの漸近安定性とは異なり、均衡点周りの (リアプノフの) 安定性により定義する。この正確な定義は次の通りである。

**定義 2.1** システム  $\dot{\mathbf{h}} = F(\mathbf{h})$  の時点  $s$  での状態を  $\mathbf{h}(s)$  とする。定常状態  $\mathbf{h}^*$  は、任意の実数  $\epsilon > 0$  に対して  $\|\mathbf{h}(0) - \mathbf{h}^*\| \leq \delta$  のとき  $\|\mathbf{h}(s) - \mathbf{h}^*\| \leq \epsilon$  が任意の時点  $s \geq 0$  で満たされるような実数  $\delta > 0$  が存在するならば、(リアプノフ) 安定である。

この定義から、relocation cost が必要な skilled worker  $t$  の人口分布  $\mathbf{h}^{(t)*}$  の微小な摂動に対する安定性 (i.e.,  $F(\mathbf{h}) = 0$  の解  $\mathbf{h}^*$  からの微小な摂動が、skilled worker  $t$  の移住をもたらすか否か) は、調整ダイナミクスの定義 (24) より、 $\mathbf{h}$  が条件

$$\begin{cases} |v_j^{(t)}(\mathbf{h}) - v_i^{(t)}(\mathbf{h})| < \eta_{ij}^{(t)} & \text{if } h_i^{(t)}, h_j^{(t)} > 0 \\ v_j^{(t)}(\mathbf{h}) - v_i^{(t)}(\mathbf{h}) > -\eta_{ij}^{(t)} & \text{if } h_i^{(t)} = 0 \end{cases} \quad \forall t \quad (29)$$

を満たすか否かで判定できる。これは、条件 (29) が満たされれば、 $\mathbf{h}^*$  の近傍  $\mathbf{h}_n$  に対して  $\dot{\mathbf{h}}^{(t)} = F^{(t)}(\mathbf{h}_n) = 0$  となる (i.e., skilled worker  $t$  は移住しない) ためである。

以上より、人口分布  $\mathbf{h}^{(t)*}$  が条件 (29) を満たし、かつ relocation cost のかからない skilled worker 0 の人口分布  $\mathbf{h}^{(0)*}$  も摂動に対して安定的であれば、長期均衡状態  $\mathbf{h}^*$  も安定的である。この安定性は、条件 (29) 下で

は、調整ダイナミクスが

$$\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{F}(\mathbf{h}) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{(0)}(\mathbf{h}) \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (30)$$

で表されるため、その右辺  $\mathbf{F}^{(0)}(\mathbf{h}^*)$  の Jacobi 行列:

$$\nabla \mathbf{F}(\mathbf{h}^*) = \begin{bmatrix} \nabla_0 \mathbf{F}^{(0)}(\mathbf{h}^*) & \cdots & \nabla_m \mathbf{F}^{(0)}(\mathbf{h}^*) & \cdots & \nabla_{T-1} \mathbf{F}^{(0)}(\mathbf{h}^*) \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (31)$$

の固有値  $g = [g_0^{(0)}, \dots, g_{K-1}^{(T-1)}]^T$  の符号により判定できる。ここで、 $\nabla_m \mathbf{F}^{(0)}(\mathbf{h}^*)$  は、 $(i, j)$  要素が  $\partial F_i^{(0)}(\mathbf{h}^*) / \partial h_j^{(m)}$  の Jacobi 行列であり、次のように表される:

$$\nabla_0 \mathbf{F}^{(0)}(\mathbf{h}^*) = \text{diag}[\mathbf{v}^{(0)}(\mathbf{h}^*) - \bar{\mathbf{v}}^{(0)}(\mathbf{h}^*) \mathbf{1}] + \frac{\text{diag}[\mathbf{h}^{(0)*}] [(H^{(0)} \mathbf{I} - \mathbf{1}\{\mathbf{h}^{(0)*}\}^T) \nabla_0 \mathbf{v}^{(0)} - \mathbf{1}\{\mathbf{v}^{(0)}(\mathbf{h}^*)\}^T]}{H^{(0)}}, \quad (32a)$$

$$\nabla_m \mathbf{F}^{(0)}(\mathbf{h}^*) = \frac{\text{diag}[\mathbf{h}^{(0)*}] (H^{(0)} \mathbf{I} - \mathbf{1}\{\mathbf{h}^{(0)*}\}^T) \nabla_m \mathbf{v}^{(0)}}{H^{(0)}}. \quad (32b)$$

上式の右辺の Jacobi 行列は、次のように与えられる:

$$\nabla_m \mathbf{v}^{(n)} \equiv \frac{\partial \mathbf{v}^{(n)}}{\partial \mathbf{h}^{(m)}} = \nabla_m \mathbf{S}^{(m)} + \sigma^{-1} \{ \nabla_m \mathbf{w}^{(n),(H)} + \nabla_m \mathbf{w}^{(n),(L)} \}, \quad (33)$$

$$\nabla_m \mathbf{S}^{(m)} = (\sigma - 1)^{-1} \mathbf{M}^{(m)}, \quad (34)$$

$$\nabla_m \mathbf{w}^{(n),(H)} = \begin{cases} \mathbf{M}^{(n)} - \mathbf{M}^{(n)} \text{diag}[\mathbf{H}] \{\mathbf{M}^{(n)}\}^T & \text{if } m = n, \\ \mathbf{M}^{(n)} & \text{if } m \neq n, \end{cases} \quad (35)$$

$$\nabla_m \mathbf{w}^{(n),(L)} = \begin{cases} -\mathbf{1} \mathbf{M}^{(n)} \{\mathbf{M}^{(n)}\}^T & \text{if } m = n, \\ \mathbf{0} & \text{if } m \neq n. \end{cases} \quad (36)$$

### 3. 円周都市システムでの Net Agglomeration Force

多都市・多産業 CP モデルでは、パラメータ (e.g., 輸送費用パラメータ) の変化に伴い、均衡解が分岐する。したがって、CP モデルで創発する集積パターンを把握するには、均衡状態の安定性が分岐パラメータ (e.g., 輸送費用パラメータ  $\tau$ ) に対してどのような特性を持つかを明らかにしなければならない。そこで、本節では、都市数が 4、産業数が 2 の場合について<sup>5</sup>、この解析が高

<sup>5</sup> 本章で都市数・産業数を限定するのは、階層的な産業構造が創発するメカニズムを解析的に明快に示すためである。都市数・産

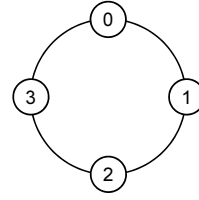


図-1 円周 4 都市システム

山・赤松<sup>6</sup>)で示した手法を応用することで、容易に行うことができることを示す。

#### (1) 都市システム空間の設定

半径 1 の円周上に番号  $i = 0, 1, 2, 3$  の順に 4 個の都市を配置する。2 つの都市  $i, j$  間の距離は  $c(i, j)$  と表される。隣接する都市間の距離は均等であると仮定し、隣接していない都市間の距離は最短経路距離で定義する (図-1), すなわち,

$$c(i, j) = \frac{2\pi}{4} \min\{|i - j|, 4 - |i - j|\}. \quad (37)$$

都市間の工業財の輸送に必要な氷塊費用  $\tau_{ij}^{(t)}$  は、この空間条件  $\{c(i, j)\}$  に対して定義される。より具体的には、氷塊費用  $\tau_{ij}^{(t)}$  は、式 (37) で表わされる  $c(i, j)$  に対して、

$$\tau_{ij}^{(t)} \equiv \exp[\tau^{(t)} c(i, j)] \quad (38)$$

と定義される。この  $\tau_{ij}^{(t)}$  の定義から、空間割引行列  $D^{(t)}$  (前節 (2) 参照) の  $i, j$  要素  $d_{ij}^{(t)}$  は、

$$d_{ij}^{(t)} \equiv \exp[(1 - \sigma^{(t)}) \tau^{(t)} c(i, j)] \quad (39)$$

で与えられる。

円周都市システムでは、空間割引行列  $D^{(t)}$  の要素の配列には、“巡回行列”と呼ばれる規則性がある。すなわち、

$$r^{(t)} \equiv \exp[(1 - \sigma^{(t)}) \tau^{(t)} (2\pi/4)] \in (0, 1] \quad (40)$$

と定義すると、行列  $D^{(t)}$  は、 $(i, j)$  要素が  $d_{ij}^{(t)} = (r^{(t)})^{m(i, j)}$  で与えられ、第 1 行ベクトル  $d_0^{(t)} = [1, r^{(t)}, \{r^{(t)}\}^2, r^{(t)}]$  により特徴付けられる巡回行列  $\text{circ}[d_0^{(t)}]$  である。

#### (2) 空間割引行列の固有値

空間割引行列  $D^{(t)}$  が巡回行列であることに着目すると、その固有値は離散 Fourier 変換により得られる。すなわち、 $D^{(t)}$  は離散 Fourier 変換行列:

$$\mathbf{Z} = [z_0, z_1, z_2, z_3] \quad (41a)$$

$$z_k = [\omega^0, \omega^k, \omega^{2k}, \omega^{3k}]^T \quad (41b)$$

$$\omega \equiv \exp[i(2\pi/4)] \quad (\text{i.e. } \omega^4 = 1) \quad (41c)$$

業数を任意の数に増加させても、以降の解析手順や結論は全く変わらない。

によって対角化される:

$$Z^* D^{(t)} Z = \text{diag}[\lambda^{(t)}]. \quad (42)$$

ここで,  $Z^*$  は  $Z$  の共役転置行列 (i.e.  $Z$  の逆行列) である. また,  $\lambda^{(t)}$  は行列  $D^{(t)}$  の 4 個の固有値であり, ベクトル  $d_0^{(t)}$  の離散 Fourier 変換:

$$\lambda^{(t)} = Z\{d_0^{(t)}\}^T \quad (43)$$

により与えられる. ここで, ベクトル  $d_0^{(t)}$  の要素の並びが 2 番要素  $\{r^{(t)}\}^2$  を境に反転することに注意すると,  $D^{(t)}$  の 2 個の固有値は, 1 種の 2 重根と 2 種 ( $k = 0, M$ ) の単根からなることが判る. さらに, 上式の右辺は解析的に評価でき, 結局,  $D^{(t)}$  の固有値は,  $r^{(t)}$  の簡単な関数として表現される:

補題 3.1 円周多都市システムにおける空間割引行列  $D^{(t)}$  の第  $k$  固有値 ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) は, 次のとおり与えられる:

$$\lambda_k^{(t)} = \begin{cases} (1 + r^{(t)})^2 & \text{if } k = 0 \\ (1 + r^{(t)})(1 - r^{(t)}) & \text{if } k = 1, 3 \\ (1 - r^{(t)})^2 & \text{if } k = 2 \end{cases} \quad (44)$$

さて, 以降で CP モデルの分岐特性を考察する際には, 行列  $D^{(t)}$  をその行和:

$$d^{(t)} \equiv d_0^{(t)} \cdot 1 = \lambda_0^{(t)} \quad (45)$$

で正規化した行列  $D^{(t)}/d^{(t)}$  の固有値  $f^{(t)}$  が重要な役割を果たす. そこで, 補題 3.1 を用いて  $f^{(t)}$  の特性を調べると, 以下の結論が得られる:

補題 3.2 円周都市システムにおける空間割引行列  $D^{(t)}/d^{(t)}$  の固有値・固有ベクトルは, 以下の特性を持つ.

- 1) 第  $k$  固有ベクトル ( $k = 0, 1, \dots, K - 1$ ) は, 離散 Fourier 変換行列の第  $k$  列ベクトル:

$$z_k \equiv [1, \omega^k, \omega^{2k}, \omega^{3k}]^T \quad (46)$$

によって与えられる. ここで,  $\omega \equiv \exp[i(2\pi/4)]$  である.

- 2) 第  $k$  固有値 ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) は, 以下のように与えられる:

$$f_k^{(t)} = \begin{cases} 1 & \text{if } k = 0, \\ c(r^{(t)}) & \text{if } k = 1, 3, \\ c(r^{(t)})^2 & \text{if } k = 2. \end{cases} \quad (47)$$

ここで,  $c(r^{(t)}) \equiv (1 - r)/(1 + r)$ .

- 3) いずれの固有値も  $r^{(t)} \in [0, 1)$  に関する単調減少関数で, その値域は  $(0, 1]$  である (ただし, 第 0 固有値は  $r^{(t)}$  の値によらず常に 1).
- 4) 任意の  $r^{(t)} \in [0, 1)$  に対して, 最大固有値は第 0 固有値 (その値は常に 1), 最小固有値は第 2 固有値である.

### (3) 調整ダイナミクスの Jacobi 行列の固有値

2. 節で示したように, CP モデル均衡解の安定性や分岐現象の有無は, 調整ダイナミクスの Jacobi 行列  $\nabla F(\mathbf{h})$  の固有値  $g$  によって判定できる. 以下では, この  $g$  が, 空間割引行列  $D^{(t)}/d^{(t)}$  の固有値  $f^{(t)}$  の簡単な関数として得られることを示そう. CP モデルが持つ本質的特性を調べるために, skilled worker  $t$  が円周上の各都市に  $h^{(t)} = H^{(t)}/4$  人ずつ均等に分散した均衡状態 (分散均衡状態)  $\bar{\mathbf{h}}^{(t)} = h^{(t)}\mathbf{1} \forall t$  (i.e., 全ての都市の条件が均質となる状況) を扱う.

なお, 以降では, 産業構造が階層化するメカニズムを明快に示すために, 産業の異質性は relocation cost のみ (i.e., relocation cost 以外のパラメータは全て同一), かつ産業が 2 種類という状況を考える. すなわち, relocation cost のかからない skilled worker 0 と relocation cost のかかる skilled worker 1 のみが存在する状況を扱う. このときの skilled worker 全体の分布を  $\bar{\mathbf{h}} \equiv [\{\bar{\mathbf{h}}^{(0)}\}^T, \{\bar{\mathbf{h}}^{(1)}\}^T]^T$  と表す. すると, 分散均衡状態では, 必ず条件 (29) を満たすため,  $\nabla F(\bar{\mathbf{h}})$  が式 (31):

$$\nabla F(\mathbf{h}^*) = \begin{bmatrix} \nabla_0 F^{(0)}(\mathbf{h}^*) & \nabla_1 F^{(0)}(\mathbf{h}^*) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (48)$$

で与えられる. さらに, この各ブロックの部分行列が巡回行列となる. これを具体的に確認しておこう. そのために, 間接効用関数の Jacobi 行列  $\nabla_m v^{(n)}(\bar{\mathbf{h}})$  を調べる. 産業間で同一の値となるパラメータのインデックス ( $t$ ) を省略すると, skilled worker の分布が  $\mathbf{h} = \bar{\mathbf{h}}$  である場合,

$$M = (hd)^{-1}D \quad (49)$$

であるから, 間接効用関数と間接効用関数の Jacobi 行列は,

$$v^{(t)}(\bar{\mathbf{h}}) = \left\{ \sum_m \frac{\ln[hd]}{\sigma - 1} + \frac{2h + l}{\sigma h} \right\} \mathbf{1} \quad (50)$$

$$\nabla_m v^{(n)}(\bar{\mathbf{h}}) = \begin{cases} \frac{1}{h} \left( \frac{1}{\sigma - 1} + \frac{1}{\sigma} \right) \frac{D}{d} \\ \quad - \frac{l(h + 1)}{\sigma h^2} \frac{DD^T}{d^2} & \text{if } m = n \\ \frac{1}{h} \left( \frac{1}{\sigma - 1} + \frac{1}{\sigma} \right) \frac{D}{d} & \text{if } m \neq n \end{cases} \quad (51)$$

に帰着する. この Jacobi 行列の式 (51) 右辺に現れる行列  $D$  は巡回行列であるから,  $\nabla_m v^{(n)}(\bar{\mathbf{h}})$  もまた巡回行列である.

この結果に加え, 式 (32) で表される  $\nabla_m F^{(0)}(\bar{\mathbf{h}})$  が

$$\nabla_m F^{(0)}(\bar{\mathbf{h}}) = \begin{cases} h \left\{ \left( \mathbf{I} - \frac{1}{4} \mathbf{E} \right) \nabla_0 v^{(0)} - \frac{\bar{v}^{(0)}}{4} \mathbf{E} \right\} & \text{if } m = 0, \\ h \left( \mathbf{I} - \frac{1}{4} \mathbf{E} \right) \nabla_1 v^{(0)} & \text{if } m = 1, \end{cases} \quad (52)$$

と表せることを利用すると、調整ダイナミクスの Jacobi 行列 (31) の各ブロックの部分行列が巡回行列であることがわかる。

Jacobi 行列  $\nabla F(\bar{h})$  の部分行列が巡回行列であるため、 $4 \times 4$  の DFT 行列  $Z_{[4]}$  を対角ブロックに持つ行列  $\hat{Z} \equiv \text{diag}[Z_{[4]}, Z_{[4]}]$  による相似変換を施すことで各ブロックを対角化できる:

$$\hat{Z}^* \nabla F(\bar{h}^*) \hat{Z} = \begin{bmatrix} \text{diag}[\lambda^{(0,0)}] & & & \\ & \text{diag}[\lambda^{(0,1)}] & & \\ & & \ddots & \\ & & & \text{diag}[\lambda^{(0,m)}] \end{bmatrix}. \quad (53)$$

ここで、 $\hat{Z}^*$  は  $\hat{Z}$  の共役転置行列、 $\lambda^{(0,m)}$  は  $\nabla_m F^{(0)}(\bar{h})$  の固有値である。この行列が上三角行列であることを利用すると、 $\nabla F(\bar{h})$  の固有値と固有ベクトルが容易に得られる。その結果は、次の補題にまとめられる。

**補題 3.3** 分散均衡状態  $\bar{h}$  における調整ダイナミクスの Jacobi 行列  $\nabla F(\bar{h})$  の固有値、固有ベクトルは、以下のように与えられる:

- 1) 第  $4t+i$  固有値  $g_{4t+i}$  ( $t=0,1; i=0,1,2,3$ ) は次のように表される<sup>6</sup>:

$$g_{4t+i} = \begin{cases} -\frac{\bar{v}^{(0)}}{4} < 0 & \text{if } t=i=0, \\ G(f_j) & \text{if } t=0 \text{ and } i=1,2,3, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (54)$$

$$G(x) \equiv bx - ax^2. \quad (55)$$

ここで、 $f_j$  は  $D$  の第  $j$  固有値、 $a \equiv (2 + lh^{-1})\sigma^{-1}$ 、 $b \equiv (\sigma - 1)^{-1} + \sigma^{-1}$  である。

- 2) 第  $4t+i$  固有ベクトル  $z_{4t+i}$  ( $t=0,1, i=0,1,2,3$ ) は次のように表される:

$$z_{4t+i} = \begin{bmatrix} z_{ti}^{(0)} \\ z_{ti}^{(1)} \\ z_{ti}^{(1)} \\ z_{ti}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad (56)$$

$$z_{ti}^{(m)} = \begin{cases} z_i & \text{if } t=m, \\ c_i^{(m)} z_i & \text{if } t=0 \text{ and } m=1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (57)$$

ここで、 $z_i$  は  $4 \times 4$  の DFT 行列  $Z$  の第  $i$  列ベクトル、 $c_i^{(m)} \equiv -\lambda_i^{(0,m)} / \lambda_i^{(0,0)}$ 、 $\lambda_j^{(0,m)}$  は式 (53) で定義される  $\lambda^{(0,m)}$  の第  $i$  要素である。

補題 3.3 で示された固有値  $g_{4t+i}$  は、skilled worker の人口分布を分散均衡状態  $\bar{h}$  から第  $3i+j$  固有ベクトル  $z_{4t+i}$  方向へ導く純集積力 (net agglomeration force) を表している。この純集積力  $g_{4t+i}$  が正である場合、分散均衡状態は不安定であり、人口分布が固有ベクトル  $z_{4t+i}$

<sup>6</sup> ここで、 $\nabla F(\bar{h})$  の固有値  $g_{4t+i}$  の内、 $g_{4t+i}$  が常に 0 となるのは、分散均衡状態において、relocation cost のかかる skilled worker 1 に関する調整ダイナミクスが  $h^{(1)} = 0$  (i.e., 移住が起こらない) となることに起因する。したがって、これらの固有値がゼロとなっている状況でも、分散均衡状態が安定的であることに注意が必要である。

方向に変化する。一方、全ての  $g_{4t+i}$  が負であれば、どの方向に集積パターンが変化しても skilled worker の効用が増加しないため、分散均衡状態が安定的となる。

## 4. 階層パターンの創発

分散均衡状態  $\bar{h}$  における輸送費用の低下に伴い発生する分岐の挙動は、前節で得られた  $\nabla F(\bar{h})$  の固有値・固有ベクトルにより調べることができる。そこで、本章では、(1) 節で分岐が発生する条件を示したのち、分岐により創発する集積パターンを (2) 節で明らかにする。

### (1) 分岐の発生条件

分散均衡状態  $\bar{h}$  において、輸送費用パラメータ  $\tau$  の低下に伴って分岐が発生する条件を確認しよう。均衡解が分岐するには、 $\nabla F(\bar{h})$  の固有値  $g$  のいずれかの符号が変化する必要がある。補題 3.3 より、符号が変化する得るのは  $g_i$  ( $i=1,2,3$ ) のみであり、かつ  $g_i$  は  $G(f_i)$  により与えられる。したがって、分岐が発生するには  $f_i$  が取りうる値の範囲内で

$$G(f_i) = 0 \quad (58)$$

となる必要がある。 $f_i$  ( $i=1,2,3$ ) の値域は補題 3.2 より  $(0,1]$  であるため、分岐の発生条件は、以下の補題のように与えられる:

**補題 4.1** 多産業 CP モデルにおいて、skilled worker  $t$  が円周都市システムの 4 箇所の都市に均等に分散した均衡状態を考える。このとき、輸送費用パラメータ  $\tau$  の変化によって、skilled worker 0 の立地パターンが少数の都市へ集積した均衡状態へ分岐するためには、CP モデルのパラメータが次の条件を満たす必要がある:

$$\frac{b}{a} < 1. \quad (59)$$

この条件は、既存研究でもよく知られている no-black-hole 条件である。この条件が満たされない場合、輸送費用パラメータ  $\tau$  が高い状況でも、固有値  $g_i$  が常に正となり、分散均衡状態が不安定的 (i.e., 集積均衡解が安定的) となる。すなわち、輸送費用パラメータ  $\tau$  の変化に伴う均等分散パターンからの均衡解の分岐は起こらない。そこで、以降の分岐解析では、この no-black-hole 条件が満たされている状況のみを考える。

### (2) 分散均衡状態からの分岐: 階層構造の創発条件

#### a) relocation cost のない産業の集積

分散均衡状態において、輸送費用の現象に伴い発生する分岐の挙動を調べる。均衡解の分岐は、純集積力  $g_i$  の符号が変化する際に発生するため、 $f_i$  に関する 2



次方程式 (58) の実数根:

$$f_+^* = \frac{b}{a} > 0, \quad f_- = 0 \quad (60)$$

は、分岐が発生する  $f_i$  の臨界値を表している。この臨界値 (60) と  $f_i$  の関係から、分散均衡状態の安定性が確認できる。3. (3) 節で示したように、均衡状態は、純集積力  $g_i$  が全ての  $i (= 0, 1, 2, 3)$  について負 ( $g_i < 0 \forall i$ ) であれば安定、そうでなければ ( $g_i > 0 \exists i$ ) 不安定である。また、純集積力  $g_i$  は、 $f_i$  の 2 次方程式 (54) で表わされる。したがって、分散均衡状態の安定性は、以下の 2 つの状態毎に決定される。

$$\text{Case a) } f_i > f_+ \quad \forall k \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad g_i < 0 \quad \forall i \quad (61)$$

$$\text{Case b) } 0 = f_- < f_i \leq f_+ \quad \exists k \quad \Leftrightarrow \quad g_i > 0 \quad \exists i \quad (62)$$

すなわち、分散均衡状態は、Case a) において安定、b) では不安定となり、何らかの集積パターンが創発する。ここで、 $f_i \in (0, 1]$  であることから、臨界値  $f_- = 0$  は分岐の発生に影響しない。そこで、以降では、2 種類の分岐臨界値のうち、 $f_+$  のみについて分析する。

輸送費用パラメータ  $\tau$  を低下させた場合に生じる均衡解の分岐の特性を、 $f_i$  の分岐臨界値 (60) を利用することで明らかにする。ただし、本章では、 $\tau$  と  $r$  に一対一対応関係 (40) があることから、 $r \in (0, 1]$  の増加に伴う分岐挙動を調べる。そのために、まず、固有値  $f_i(\cdot)$  を  $r$  の関数と考え、その逆関数を  $r_i(\cdot)$  と書く:

$$r_+ = r_i(f_+) \Leftrightarrow f_+ = f_i(r_+). \quad (63)$$

ここで、 $f_i(\cdot)$  は  $r$  の単調減少関数である (補題 3.2) から、その逆関数  $r_i(\cdot)$  も  $f_i$  の単調減少関数である。

初期状態では、輸送費用が大きく、 $r < r_i(f_+) \forall i \neq 0$ , が成立しているとしよう。逆関数 (63) の定義から、この条件は、Case a) の条件 (61) と等価であるため、分散状態が安定的である。 $r$  が徐々に増加 (輸送費用  $\tau$  が低下) すると、ある  $i^*$  に対して、 $r \geq r_{i^*}(f_+)$  が成立する。この条件は、Case b) と同じ条件 (62) を表現しているため、分散パターンが不安定化することがわかる。ここで、最初に  $r \geq r_{i^*}(f_+)$  を満たす  $i^*$  は、補題 3.2 より、

$$i_+^* = \arg. \min_i \{f_i(r)\} = 2 \quad (64)$$

である。従って、 $r$  が臨界値:

$$r_+ \equiv \max_k \{r_i(f_+)\} = r_2(f_+) = \frac{1 - \sqrt{f_+}}{1 + \sqrt{f_+}} \quad (65)$$

となったときに  $z_2$  に対応した集積パターン  $h^{(0)} = \bar{h}^{(0)} + \delta z_2$  (図-2-a) 方向に skilled worker 0 が集積する。 $r$  が  $r_+$  からさらに増加すると、 $\delta$  が急激に増加し、図-2-b に示す 2 極集積パターン  $\bar{h}_{(2)}^{(0)} = [2h, 0, 2h, 0]^T$  方向への集積が進展する。

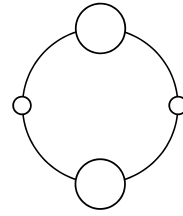


図-2-a  $h^{(0)} = \bar{h}^{(0)} + \delta z_2$

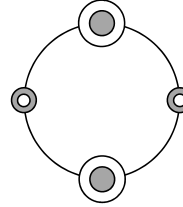


図-2-b 2 極集積パターン:  $\bar{h}_{(2)}^{(0)}$

図-2 分散均衡状態からの分岐方向

命題 4.1 CP モデルにおいて、no-black-hole 条件 (59) が成立しているものとする。輸送費用が十分に大きく、skilled worker が各都市に分散した均衡状態を考える。この状態から、輸送費用パラメータ  $\tau$  を徐々に下げる ( $r$  を徐々に上げる) と、

- 1) 任意の集積パターン (固有ベクトル  $z$ ) に対する純集積力 (固有値  $g$ ) は増加し、式 (65) と式 (60) で与えられる臨界値  $r_+$  で 2 極集積パターン (図-2-b) 方向に skilled worker 0 が集積する。
- 2) この臨界値  $r_+$  は、a) skilled worker 人口比率が大きく ( $h$  大)、b) skilled worker の財消費代替の弾力性が小さい ( $\sigma$  小)、ほど低い。

#### b) relocation cost のある産業の集積

命題 4.1 で示した分岐により skilled worker 0 の集積が進展すると、skilled worker 0 の人口が増加する都市 (core) と減少する都市 (periphery) の間で、skilled worker 1 の効用に差が生じる (i.e.,  $v_0^{(1)} > v_1^{(1)}$  となる)。したがって、その効用差に応じて、skilled worker 1 が集積する可能性がある。そこで、次に、skilled worker 1 が集積する (i.e., relocation cost のある産業が集積する) 条件を調べよう。

(3) 節で示したように、skilled worker 1 の安定性は、条件 (29) を満足するか否かで判定できる。より具体的には、skilled worker 1 は全ての都市に均等に居住しているため (i.e.,  $h_i^{(1)} > 0 \forall i$ )、次の条件を満足していれば、分散状態が安定的、そうでなければ skilled worker 1 が skilled worker 0 と同じ都市に集積する:

$$v_0^{(1)}(h) - v_1^{(1)}(h) = \frac{1}{\sigma - 1} \ln \left[ \frac{\Delta_0(h^{(0)})}{\Delta_1(h^{(0)})} \right] + \frac{\Delta_0(h^{(0)}) - \Delta_1(h^{(0)})}{dh^{(1)}} < \eta_{10}. \quad (66)$$

ここで, skilled worker 0 が 2 極集中パターン  $\bar{h}_{(2)}^{(0)}$  である場合, 条件 (66) の左辺が,

$$\frac{\partial(v_0^{(1)}(\mathbf{h}) - v_1^{(1)}(\mathbf{h}))}{\partial r} = -\frac{1}{\sigma-1} \frac{1-r^2}{r(1+r^2)} - \frac{8(1-r)}{(1+r)^3} < 0 \quad (67)$$

となることに注目しよう. これは, 2 都市間の効用差  $v_0^{(1)}(\mathbf{h}) - v_1^{(1)}(\mathbf{h})$  は, skilled worker 0 が 2 極集中パターン  $\bar{h}_{(2)}^{(0)}$  となってからは, 輸送費用が減少するにつれて, 単調減少することを意味している. したがって, skilled worker 0 が 2 極集中し, skilled worker 1 が分散している状態 (以降, 階層パターン)  $\bar{h}_{(2,4)} \equiv [\bar{h}_{(2)}^{(0)}, \bar{h}^{(1)}]$  において, 条件 (66) が満たされれば, skilled worker 1 が分散している状態が安定的となる (i.e., 産業構造が階層化する):

$$v_0^{(1)}(\bar{h}_{(2,4)}) - v_1^{(1)}(\bar{h}_{(2,4)}) = \frac{1}{\sigma-1} \ln \left[ \frac{1+r^2}{2r} \right] + \left( \frac{1-r}{1+r} \right)^2 < \eta_{10}. \quad (68)$$

以上の結果は, 次の命題にまとめられる:

**命題 4.2** 命題 4.1 で示した skilled worker 0 が分散均衡状態から 2 極集中パターンへと集積する状況を考える. このとき, skilled worker 1 の集積に関する, 次の特性が存在する.

- 1) skilled worker 1 の集積は, skilled worker 0 が集積する過程でしか起こらない.
- 2) skilled worker 1 が集積しない (i.e., 産業構造が階層化する) 条件は, (68) で与えられる.
- 3) 条件 (68) が成立しない場合, skilled worker 1 は skilled worker 0 が集積する都市と同じ都市に集積する.

## 5. 階層パターンの進展

前節では, 輸送費用の減少に伴い, 階層的な産業構造 (階層パターン) が形成される条件を明らかにした. その状態からさらに輸送費用が減少すると, 階層パターンの安定性が変化し, さらに集積が起こる. これを具体的に確認するために, 条件 (68) が成立すると仮定した上で, 階層パターンの安定性と分岐挙動を調べる.

### (1) 調整ダイナミクスの Jacobi 行列の固有値

階層パターン  $\bar{h}_{(2,4)}$  の安定性を調べるには, 前節までと同様, 調整ダイナミクスの Jacobi 行列の固有値を解析する必要がある. 条件 (68) が成立する場合, 調整ダイナミクスは,

$$\nabla F(\bar{h}_{(2,4)}) = \begin{bmatrix} \nabla_0 F^{(0)}(\bar{h}_{(2,4)}) & \nabla_1 F^{(0)}(\bar{h}_{(2,4)}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (69)$$

で与えられるため, 第??章と全く同様の方法を採用することで, その解析を容易に行うことができる. この解析により, 調整ダイナミクスの Jacobi 行列の固有値は, 次の補題のとおり与えられる:

**補題 5.1** 階層パターン  $\bar{h}_{(2,4)}$  での調整ダイナミクスの Jacobi 行列  $\nabla F(\bar{h}_{(2,4)})$  の固有値  $\hat{g}$  は, 以下のとおり与えられる:

$$\hat{g}_{4t+i} = \begin{cases} -\bar{v}^{(0)}(\bar{h}_{(2,4)}) < 0 & \text{if } t = i = 0, \\ v_1^{(0)}(\bar{h}_{(2,4)}) - \bar{v}^{(0)}(\bar{h}_{(2,4)}) & \text{if } t = 0 \text{ and } i = 1, 3, \\ \hat{G}(f_{i/2}) & \text{if } t = 0 \text{ and } i = 2, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (70a)$$

$$\hat{G}(x) \equiv bx - \hat{a}x^2. \quad (70b)$$

ここで,  $\hat{a}^{(0)} \equiv (3 + lh^{-1})/(2\sigma)$ ,  $f_i$  は巡回行列  $\hat{D} \equiv \text{circ}[1, r^2]$  を行和  $\hat{d} \equiv 1 + r^2$  で正規化した行列  $\hat{D}/\hat{d}$  の第  $i$  固有値である:

$$\hat{f} = [1, c(r^2)]^T. \quad (71)$$

### (2) 分岐発生条件

階層パターンから分岐が発生するための条件を確認しておこう. 補題 5.1 より,  $r$  の変化に伴って分岐が発生するには,  $f_i$  の値域  $(0, 1]$  の範囲内で  $\hat{g}_{4t+i} = 0$  となる必要がある. 式 (70) より, 均衡条件が満たされる限り  $\hat{g}_{4t+i}$  のうち符号が変化し得るのは,  $\hat{g}_2$  のみである. したがって, 輸送費用パラメータ  $\tau$  の減少によって, skilled worker 0 が少数の都市へ集積するためには, 次の補題で示す条件を満足する必要がある.

**補題 5.2** 多産業 CP モデルにおいて, 階層パターン  $\bar{h}_{(2,4)}$  が安定均衡状態となる状況を考える. このとき, 輸送費用パラメータ  $\tau$  の変化によって, skilled worker 0 の立地パターンが少数の都市へ集積した均衡状態へ分岐するためには, CP モデルのパラメータが次の条件を満たす必要がある:

$$\frac{b}{\hat{a}} \leq 1 \quad (72)$$

この条件は, 分散均衡状態での no-black-hole 条件に対応する条件である. さらに, この条件は, 補題??より厳しい条件であるため,  $b/a \leq 1 < b/\hat{a}$  が成立する場合, 輸送費用パラメータ  $\tau$  が高い場合でも, 固有値  $\hat{g}_k$  が常に正となり, 分散均衡状態からの分岐で創発した 2 極集中パターンが安定化しない. すなわち, 輸送費用パラメータ  $\tau$  の変化に伴う 2 極集中パターンからの均衡解の分岐は起こらない. そこで, 以降の分岐解析では, この条件が満たされている状況のみを考える.

### (3) 階層パターンからの分岐

#### a) relocation cost のない産業の集積

階層パターンから分岐が発生する  $\hat{f}_i$  の臨界値は、(2) 節と同様の手順により、次のように与えられる:

$$\hat{f}_+ = \frac{b}{\hat{a}} > 0, \quad \hat{f}_- = 0. \quad (73)$$

$\hat{f}_i$  の値域が  $(0, 1]$  であることから、階層パターンにおいても、分散均衡状態の場合と同じく、一方の臨界値  $\hat{f}_-$  は無視することができる。したがって、以降では、 $\hat{f}_i$  が  $\hat{f}_+$  に達する際での分岐挙動を分析する。

輸送費用  $\tau$  を低下 ( $r$  を増加) させた場合に生じる均衡解の分岐の特性を示すために、固有値  $\hat{f}_i(r)$  の逆関数  $\hat{r}$  を定義しておこう:

$$\hat{r}_+ = \hat{r}_i(\hat{f}_+) \Leftrightarrow \hat{f}_+ = \hat{f}_i(\hat{r}_+). \quad (74)$$

ここで、 $\hat{f}_i(\cdot)$  は  $r$  の単調減少関数である (式 (71)) ため、その逆関数  $\hat{r}_i(\cdot)$  も  $\hat{f}_i$  の単調減少関数である。

初期状態として、2 極集中パターンが安定均衡解である状態を考える。この状態から  $r$  をさらに増加 (i.e., 輸送費用  $\tau$  を減少) させると、 $\hat{f}_i = \hat{f}_+$  が成立する  $r = \hat{r}_+$  において、最初に  $\hat{g}_i = 0$  となる (i.e., 分岐が発生する)。ここで、補題??より、 $\hat{g}_i = 0$  となり得る  $i$  は明らかに 2 のみであるため、 $r$  が臨界値

$$\hat{r}_+ = \hat{r}_2(\hat{f}_+) = \sqrt{\frac{1 - \hat{f}_+}{1 + \hat{f}_+}} \quad (75)$$

に達すると、その固有ベクトル  $\hat{z}_2 = [1, 0, -1, 0]^T$  に対応した集積パターン

$$\mathbf{h}^{(0)} = \bar{\mathbf{h}}_{(2)}^{(0)} + \delta \hat{z}_2 = [2h + \delta, 0, 2h - \delta, 0]^T \quad (76)$$

方向に、skilled worker 0 が集積する。 $\hat{r}_+$  からさらに  $r$  を増加させると、 $\delta \in [0, 2h]$  が急激に増加し、最終的に  $h$  は 1 極集中パターンとなる。以上の議論は、次の命題にまとめられる。

命題 5.1 CP モデルにおいて、条件 (72) が成立し、2 極集中パターンが安定的であると考えられる。その状態からさらに  $r$  を増加させると、

- 1) 式 (75) で与えられる臨界値  $\hat{r}_+$  で 1 極集中パターン方向に skilled worker 0 が集積する。
- 2) 臨界値  $\hat{r}_+$  は、a) skilled worker 人口比率が大きく ( $h$  大)、b) skilled worker の財消費代替の弾力性が小さい ( $\sigma$  小)、ほど低い。

#### b) relocation cost のある産業の集積

命題 5.1 で示した分岐により skilled worker 0 の集積が進展すると、b) 節での議論と同様に、skilled worker 1 が集積する可能性がある ( $v_0^{(1)} > v_1^{(1)} > v_2^{(1)}$  が成立するため)。そこで、skilled worker 1 が集積する (i.e., relocation cost のある産業が集積する) 条件を調べよう。

最初に、skilled worker 0 が 1 極集中パターン  $\bar{\mathbf{h}}_{(1)}^{(0)}$  である場合、条件 (66) の左辺が、

$$\frac{\partial(v_0^{(1)}(\mathbf{h}) - v_1^{(1)}(\mathbf{h}))}{\partial r} = -\frac{1}{\sigma-1} \frac{1}{r} - \frac{4(3-r)}{(1+r)^3} < 0 \quad (77a)$$

$$\frac{\partial(v_0^{(1)}(\mathbf{h}) - v_2^{(1)}(\mathbf{h}))}{\partial r} = -\frac{1}{\sigma-1} \frac{2}{r} - \frac{8}{(1+r)^2} < 0 \quad (77b)$$

となることに注目しよう。これは、b) 節と同様、skilled worker 0 が 1 極集中パターンとなってからは、都市間の効用差が輸送費用が減少するにつれて単調減少することを意味している。したがって、skilled worker 0 が 1 極集中し、skilled worker 1 が分散している状態  $\mathbf{h}_{(1,4)} \equiv [\bar{\mathbf{h}}_{(1)}^{(0)}, \bar{\mathbf{h}}^{(1)}]$  において、条件 (66) を満たせば、skilled worker 1 は移住しない (逆に、この条件を満たさない場合、効用が増加する方向に skilled worker 1 が集積する):

$$v_0^{(1)}(\mathbf{h}_{(1,4)}) - v_1^{(1)}(\mathbf{h}_{(1,4)}) = -\frac{1}{\sigma-1} \ln[r] + \frac{4(1-r)}{(1+r)^2} < \eta_{10}, \quad (78a)$$

$$v_0^{(1)}(\mathbf{h}_{(1,4)}) - v_2^{(1)}(\mathbf{h}_{(1,4)}) = -\frac{2}{\sigma-1} \ln[r] + \frac{4(1-r)}{(1+r)} < \eta_{20}. \quad (78b)$$

以上の結果は、次の命題にまとめられる:

命題 5.2 階層パターン  $\bar{\mathbf{h}}_{(2,4)}$  が安定的な状態から、命題 5.1 で示したように、skilled worker 0 が 1 極集中パターン方向に集積する状況を考える。このとき、skilled worker 1 の集積に関する、次の特性が存在する。

- 1) skilled worker 1 の集積は、skilled worker 0 が集積する過程でしか起こらない。
- 2) skilled worker 1 が集積しない (i.e., 産業構造が階層化する) 条件は、(68) で与えられる。
- 3) 条件 (78a) が成立しない場合は都市 1 から 0 へ、条件 (78b) が成立しない場合は都市 2 から 0 に skilled worker 1 が集積する。

## 6. 数値計算例による大域的な分岐特性の確認

### (1) 数値実験方法

本節では、これまでに得られた理論解析結果をわかりやすく示すために、輸送費用の減少に伴い多都市・多産業 CP モデルで創発する典型的な集積パターン (i.e., 同時集積パターン、階層パターン) の数値計算例を示す。ここでは、数値計算により均衡解を求めるアルゴリズムとして、Ikeda, Akamatsu and Kono<sup>24)</sup>、池田ら<sup>25)</sup> と同様、計算分岐理論と群論的分岐理論を適切に組み合わせた方法を採用する (計算分岐理論・群論的分岐理論の詳細は、例えば、Ikeda and Murota<sup>26)</sup>、藤井・大崎・池田<sup>27)</sup> 参照)。

以降で示される数値計算例では、パラメータを  $H^{(t)} = 1/T, \sigma = 5.0, l = 1.0$  と設定し、relocation cost は都市間の距離に依存しない (i.e., 産業のみに依存する:  $\eta^{(t)} = \eta_{ij}^{(t)} \forall i, j \neq i$ ) ケースを扱う。ただし、階層パターンが創発する場合には、前節までで解析した 4 都市 2 産業のケースに加え、複数の階層が現れる 8 都市 4 産業とした場合の数値計算例も提示する。数値計算により得られる安定的な均衡解は、縦軸に人口最大都市における産業毎の skilled worker の割合 ( $h_i^{(t)}/H^{(t)}$ )、横軸に  $r$  を取った図により示す。また、図の赤、青、緑、黄色の実線は、各々、産業 0, 1, 2, 3 の skilled worker の割合を表す。

### (2) 同時集積パターンが創発する場合

命題 4.2 で示した両産業が同時に集積する条件を満たす  $\eta^{(1)} = 0.2$  とした場合の均衡立地パターンは、図-3-a で示すとおりである。この結果から、輸送費用の減少に伴い“分散・分散 2 極・2 極 1 極・1 極”と集積パターンが変化しており、両産業が常に同じ都市に集積することが分かる。さらに、図-3-b から、skilled worker 1 の集積は、必ず skilled worker 0 の集積過程で起こる、という命題 4.2 1) と整合的な結果も確認できる。

図-3 が示すように、分散均衡状態  $\bar{h}$  から両産業が同時に 2 つの都市に集積する場合、必ず、その後の (1 都市への) 集積も同時に起こる。これは、分散均衡状態から 2 極集中パターンに人口分布が変化するより、2 極集中パターンから 1 極集中パターンに変化する方が、移動する人口 (skilled worker 0) が多いためである。その結果として、skilled worker 1 の都市間効用差は、“分散 2 極”より“2 極 1 極”の方が大きくなり、常に両産業が同時に集積する。

### (3) 階層パターンが創発する場合

#### a) 4 都市 2 産業のケース

まず、前節までで解析した 4 都市 2 産業のケースにおいて、命題 4.2 で示した階層パターンが創発する条件を満たす  $\eta^{(1)} = 0.3, 0.5$  とした場合を考える。図-4-a は、命題 5.2 で示した条件 (78b) のみが満たされないケースである、 $\eta^{(1)} = 0.3$  とした場合の結果である。この図から、skilled worker の分布が“分散・分散 2 極・分散 1 極・3 極”と進展しており、輸送費用の低下により、階層的な産業構造が形成されていることが分かる。より具体的には、輸送費用が中程度 ( $r$  が 0.35 ~ 0.65 程度) であれば「両産業が立地する都市」と「産業 1 のみが立地する都市」の 2 段階、輸送費用が低い ( $r > 0.65$ ) 場合は「両産業」「産業 1」「産業なし (農業部門のみが立地)」という 3 階層からなる産業構造が創発している。

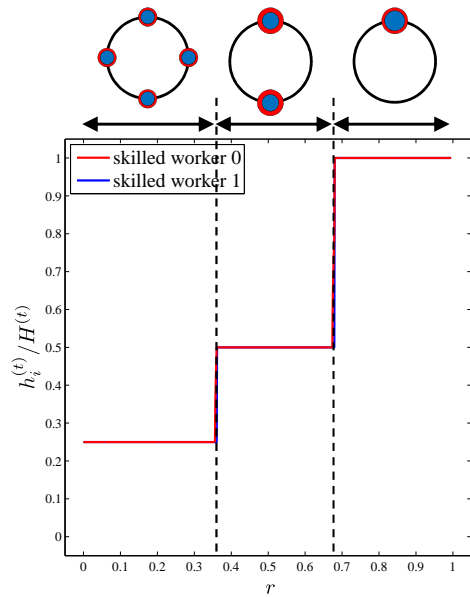


図-3-a  $r \in (0, 1]$  の範囲の集積パターン

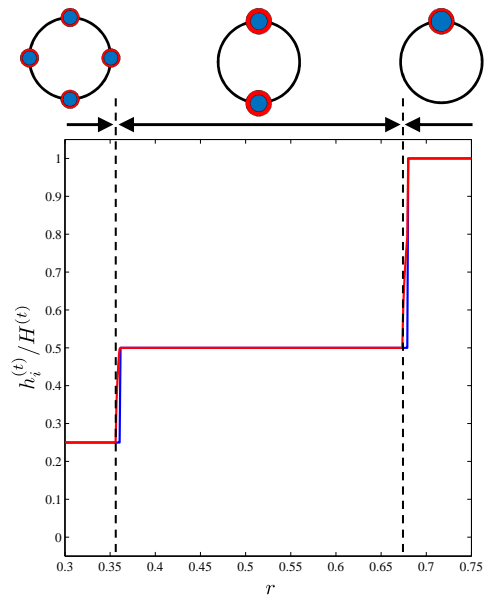


図-3-b 集積の進展過程

図-3 両産業が同時に集積する場合:  $\eta^{(1)} = 0.2$

さらに、 $\eta^{(1)} = 0.5$  とした場合の安定的な均衡状態を図-4-b に示そう。このケースでは、条件 (68), (78) が常に満たされるため、図-4-a と異なり、skilled worker 1 は常に分散する。具体的には、輸送費用の低下に伴い、“分散・分散 2 極・分散 1 極・分散”と集積パターンが進展しており、命題 4.2, 5.2 と整合的な結果が確認された。

#### b) 8 都市 4 産業のケース

これまでで解析した 4 都市 2 産業から、都市数・産業数を増加させると、より多くの階層をもつ都市システムが形成されると考えられる。そこで、次に、都市

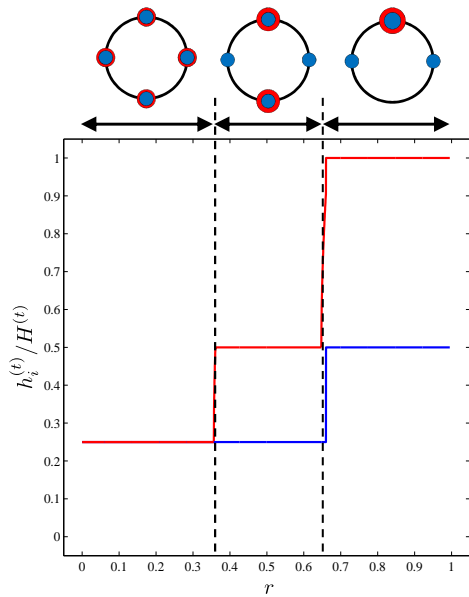


図-4-a 3段階の階層:  $\eta^{(1)} = 0.3$

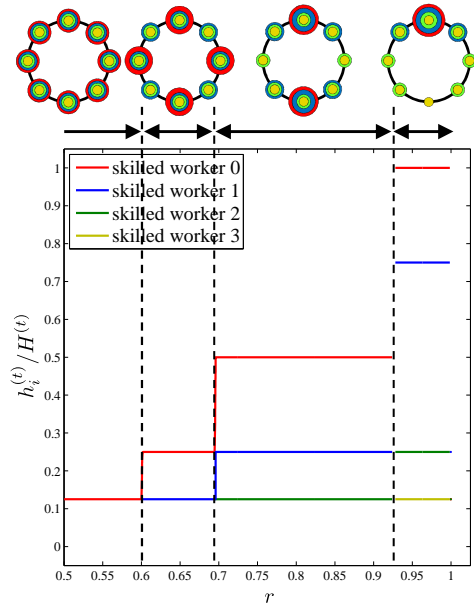


図-5-a 4段階の階層構造:  $\eta^{(2)} = 0.2$

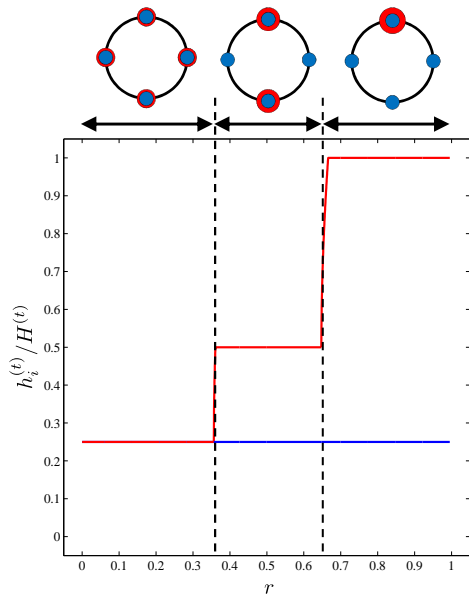


図-4-b 2段階の階層:  $\eta^{(1)} = 0.5$

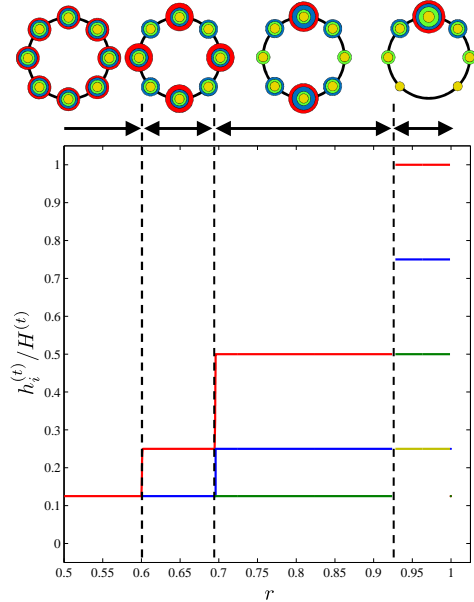


図-5-b 5段階の階層構造:  $\eta^{(2)} = 0.18$

図-4 階層パターンが創発する場合

図-5 8都市4産業での安定的な集積パターン

数を8, 産業数を4とした場合の数値計算例を示そう. 図-5-aは  $\eta \equiv [\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \eta^{(3)}] = [0.0, 0.1, 0.2, 0.3]$  とした場合, 図-5-bは  $\eta = [0.0, 0.1, 0.18, 0.3]$  とした場合の数値計算結果である. これらの図から, 産業の階層が, 輸送費用の減少に伴う skilled worker の集積により, 徐々に増加していることが分かる. より具体的には, 均衡解の分岐により, 産業の階層が“1段階 2段階 3段階 4(5)段階”へと増加している. この結果から, 都市数・産業数の増加に伴い, より複雑な都市システム内の産業の階層構造が表現できることが分かる.

## 7. おわりに

本章では, relocation cost を導入した多産業 CP モデルを構築し, その分岐特性を解析的に示した. その結果, 階層的な産業構造が, 安定的な均衡状態として創発し得ることが明らかにされた. これは, 産業毎に異なる“立地変更の慣性力”が, 産業構造を階層化させ得ることを意味している. この階層化メカニズムは, 従来研究では全く知られていない新たな知見である.

本研究では, 産業構造の階層化メカニズムを明快に示すために, myopic な労働者を仮定して分析した. た

だし、移住に伴う不確実性を認識できる状況を考える場合、労働者が完全予見的 (perfect foresight) であると仮定した状況を考えるのがより自然であろう。したがって、完全予見的な労働者を仮定した分析を行い、本章の結果の頑健性を確認することは、今後の重要な研究課題である。

## 付録 I 補題 5.1 の証明

式 (32) に  $\bar{h}_{(2,4)}$  を代入し、置換行列  $P$  の相似変換を施すと、 $\nabla_m^\# F(\bar{h}_{(2,4)}) \equiv P \nabla_m^\# F(\bar{h}_{(2,4)}) P^T$  は

$$\nabla_m^\# F^{(0)}(\bar{h}_{(2,4)}) = \begin{bmatrix} \nabla_m F^{(0,0)} & \nabla_m F^{(0,1)} \\ \mathbf{0} & \nabla_m F^{(1,1)} \end{bmatrix}, \quad (\text{I.1})$$

$$\nabla_0 F^{(0,i)} \equiv 2h \left( \mathbf{I} - \frac{1}{2} E_{[2]} \right) \nabla_0 v^{(0,i)} - \frac{v_i^{(0)}(\bar{h}_{(2,4)})}{2} E_{[2]}, \quad (\text{I.2})$$

$$\nabla_0 F^{(1,1)} \equiv \left\{ \bar{v}(\bar{h}_{(2,4)}) - v_1(\bar{h}_{(2,4)}) \right\} \mathbf{I} \quad (\text{I.3})$$

$$\nabla_1 F^{(0,i)} \equiv 2h \left( \mathbf{I} - \frac{1}{2} E_{[2]} \right) \nabla_m v^{(0,i)} \quad (\text{I.4})$$

$$\nabla_1 F^{(1,1)} \equiv \mathbf{0} \quad (\text{I.5})$$

で与えられる。 $\nabla_m v^{(0,i)}$  は、以下のように表される  $\nabla_m^\# v^{(0)}(\bar{h}_{(2,4)}) \equiv P \nabla_m v^{(0)}(\bar{h}_{(2,4)}) P^T$  の  $0, i$  ブロックの部分行列である:

$$\begin{aligned} \nabla_m^\# v^{(0)}(\bar{h}_{(2,4)}) &= \nabla_m^\# S^{(0)} + \sigma^{-1} \left[ \nabla_m^\# w^{(0),(H)} + \nabla_m^\# w^{(0),(L)} \right] \\ &= \begin{bmatrix} \nabla_m^\# v^{(0,0)} & \nabla_m^\# v^{(0,1)} \\ \nabla_m^\# v^{(1,0)} & \nabla_m^\# v^{(1,1)} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{I.6})$$

$$\nabla_m^\# S^{(0)} \equiv (\sigma - 1)^{-1} M^\#, \quad (\text{I.7})$$

$$\nabla_m^\# w^{(0),(H)} \equiv \begin{cases} \{M^\#\}^T - \{M^\#\}^T H_{(2)}^\# M^\# & \text{if } m = 0, \\ M^\# & \text{if } m = 1, \end{cases} \quad (\text{I.8})$$

$$\nabla_m^\# w^{(L)} \equiv \begin{cases} -l \{M^\#\}^T M^\# & \text{if } m = 0, \\ \mathbf{0} & \text{if } m = 1, \end{cases} \quad (\text{I.9})$$

ここで、 $M^\#, H_{(2)}^\#$  は、各々  $M, \text{diag}[\bar{H}_{(2,4)}] \equiv \text{diag}[3h, h, 3h, h]$  を  $P$  で置換した行列である:

$$\begin{aligned} M^\# &\equiv P M P^T \\ &= \frac{1}{2h} \text{circ}[\hat{D}/\hat{d}, \hat{E}_{[2]}/2] = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} \hat{D}/\hat{d} & \hat{E}_{[2]}/2 \\ \hat{E}_{[2]}/2 & \hat{D}/\hat{d} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{I.10})$$

$$H_{(2,4)}^\# \equiv P \text{diag}[\bar{H}_{(2,4)}] P^T = \text{diag}[3h, 3h, h, h]. \quad (\text{I.11})$$

以上の結果から、 $v^{(i,j)}$  が巡回行列であることが確認できるため、式 (I.1) の各ブロックの部分行列  $F^{(i,j)}$  も巡回行列であることがわかる。したがって、 $\nabla^\# F(\bar{h}_{(2)})$  は、 $2 \times 2$  の DFT 行列  $Z_{[2]}$  を対角ブロックに持つ  $\hat{Z} \equiv \text{diag}[Z_{[2]}, Z_{[2]}]$  による相似変換により、全てのブロッ

クを対角化できる。さらに、各ブロック行列を対角化した行列は、上三角行列であるため、その対角要素が  $\nabla F(\bar{h}_{(2)})$  の固有値となる。これを計算すると、式 (70) が得られる。

## 参考文献

- Burda, M. C.: The Determinants of East-West German Migration, *European Economic Review*, Vol. 37, pp. 452–461, 1993.
- Fujita, M.: on the Self-Organization and Evolution of Economic Geography, *The Japanese Economic Review*, Vol. 47, No. 1, pp. 34–61, 1996.
- Sjaastad, L. A.: The Costs and Returns of Human Migration, *The Journal of Political Economy*, Vol. 70, pp. 80–93, 1962.
- 久武昌人: 東アジアにおける日本の過去・現在・未来 都市集積の変容から見た一考察, *RIETI Policy Discussion Paper Series 05-P-003*, 2005.
- Akamatsu, T., Takayama, Y. and Ikeda, K.: Spatial Discounting, Fourier, and Racetrack Economy: A Recipe for the Analysis of Spatial Agglomeration Models, *MPRA Paper, University Library of Munich, Germany*, 2009.
- 高山雄貴, 赤松隆: 一次元空間における産業構造の階層化メカニズム: コミュニケーション外部性を考慮した多産業立地モデルの分岐解析, *土木計画学研究・論文集*, Vol. 27, pp. 285–295, 2010.
- Krugman, P.: History Versus Expectations, *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 106, pp. 651–667, 1991.
- Baldwin, R. E.: Core-periphery Model with Forward-looking Expectations, *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 31, pp. 21–49, 2001.
- Ottaviano, G. I. P.: Monopolistic Competition, Trade, and Endogenous Spatial Fluctuations, *Regional Science and Urban Economics*, Vol. 31, pp. 51–77, 2001.
- 織田澤利守, 赤松隆: 集積経済下における地域間移住タイミング選択の均衡ダイナミクス, *土木学会論文集 D*, Vol. 63, No. 4, pp. 567–578, 2007.
- Oyama, D.: History Versus Expectations in Economic Geography Reconsidered, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 33, pp. 394–408, 2009.
- Melitz, M. J.: The Impact of Trade on Intra-industry Reallocations and Aggregate Industry Productivity, *Econometrica*, Vol. 71, pp. 1695–1725, 2003.
- Baldwin, R. E. and Okubo, T.: Heterogeneous Firms, Agglomeration and Economic Geography: Spatial Selection and Sorting, *Journal of Economic Geography*, Vol. 6, pp. 323–346, 2006.
- Christaller, W.: *Die Zentralen Orte in Süddeutschland*, Gustav Fischer Verlag (English translation: Central Place in Southern Germany, Prentice Hall, 1966), 1933.
- Lösch, A.: *Die Räumliche Ordnung der Wirtschaft*, Gustav Fischer (English translation: The Economics of Location, Yale University Press, 1954), 1940.
- Eaton, B. C. and Lipsey, R. G.: An Economic Theory of Central Places, *The Economic Journal*, Vol. 92, pp. 56–72, 1982.
- Fujita, M., Krugman, P. and Mori, T.: On the Evolution of Hierarchical Urban Systems, *European Economic Review*, Vol. 43, pp. 209–251, 1999.
- Tabuchi, T. and Thisse, J. F.: A New Economic Geography Model of Central Places, *Journal of Urban Economics*, Vol. 69, pp. 240–252, 2011.

- 19) Krugman, P.: Increasing Returns and Economic Geography, *The Journal of Political Economy*, Vol. 99, No. 3, pp. 483–499, 1991.
- 20) Hsu, W. T.: Central Place Theory and City Size Distribution, *mimeograph, chinese University of Hong Kong*, 2010.
- 21) Krugman, P.: Intraindustry Specialization and the Gains from Trade, *The Journal of Political Economy*, Vol. 89, pp. 959–973, 1981.
- 22) Zeng, D. Z.: Redispersion is Different from Dispersion: Spatial Economy of Multiple Industries, *The Annals of Regional Science*, Vol. 40, pp. 229–247, 2006.
- 23) Takatsuka, H. and Zeng, D. Z.: Dispersion Forms: an Interaction of Market Access, Competition, and Urban Costs, *Journal of Regional Science*, Vol. 49, pp. 177–204, 2009.
- 24) Ikeda, K., Akamatsu, T. and Kono, T.: Spatial Period-Doubling Agglomeration of a Core-Periphery Model with a System of Cities, *MPRA Paper, University Library of Munich, Germany*, 2010.
- 25) 池田清宏, 河野達仁, 赤松隆, 柳本彰仁, 八巻俊二: 都市の集積・分散モデルの対称性破壊分岐: 群論的分岐理論によるアプローチ, *土木学会論文集 D*, Vol. 63, No. 4, pp. 553–566, 2007.
- 26) Ikeda, K. and Murota, K.: *Imperfect Bifurcation in Structures and Materials*, Springer, 2010.
- 27) 藤井文夫, 大崎純, 池田清宏: 構造と材料の分岐力学, コロナ社, 2005.

(2011.8.5 受付)