

混合マルコフ劣化ハザードモデルの 階層ベイズ推計

貝戸清之¹・小林潔司²・松岡弘大³

¹正会員 大阪大学准教授 大学院工学研究科 地球総合工学専攻 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)
E-mail: kaito@ga.eng.osaka-u.ac.jp

²フェロー会員 京都大学教授 経営管理大学院 経営管理講座 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)
E-mail: kkoba@psa.mbox.media.kyoto-u.ac.jp

³学生員 大阪大学大学院 工学研究科地球総合工学専攻 (〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1)
E-mail: k-matsuoka@civil.eng.osaka-u.ac.jp

混合確率モデルの発展により、これまで蓄積されてきた目視点検データから土木施設全体の劣化情報だけでなく、ある地区や施設群ごとといったグループ単位での劣化情報（異質性）の定量的評価が可能となってきた。一方で、個々の施設の異質性といったより詳細な情報は、使用可能なサンプル数が極めて少数となるために、これまでの方法論では獲得することが困難である。本研究ではそのような少ないサンプルから異質性を評価するための方法論を提示する。具体的には混合マルコフ劣化ハザードモデルに階層構造を有した事前分布を導入するとともに、MCMC 法により異質性を事後分布の統計量として算出する。

Key Words : *asset management, deterioration prediction, mixed Markov hazard model, hierarchical bayesian estimation*

1. はじめに

社会基盤施設に対する補修等の意思決定は目視点検を通して、点検員や専門技術者の経験的判断（暗黙知¹⁾）によってなされる場合が少なくない。一方で近年における社会基盤施設を取り巻く経済的状況は厳しく、このような意思決定プロセスの視覚化（形式知化）が重要な課題となっている。社会基盤施設やその構成部材によっては目視点検手法が確立し、長年に亘り点検データが蓄積されているものもある。目視点検データを用いて施設の劣化を予測し、管理対象となる施設間の劣化速度を相対的に比較することができれば、補修等の優先順位に対する定量的評価が可能となる。また、劣化予測と並行して劣化の要因分析を実施することで、予測精度の向上だけでなく、今後の目視点検で観測すべき項目選定の効率化にも貢献することができる。

一方で、施設間の劣化速度を相対的に比較するためには、何らかの形で施設ごとの相違（異質性²⁾）を考慮することが必要となる。本研究で扱うような統計的劣化予測手法では、蓄積された大量の点検データの背後に存在する規則性をモデル化している。当然のことながら、施設ごとのような細かい単位で異質性を評価する場合には、蓄積したデータの量が問題となる。本研究ではこのような施設個々の劣化の異質性を評価するための方法論を提示する。具体的には混合マルコフ劣化ハザードモデルのパラメータに事前分布を導入し、階

層ベイズ法により推計することで、事後分布の統計量によって異質性を評価する。

2. 本研究の基本的な考え方

(1) 目視点検と統計的劣化予測

社会基盤施設に対する目視点検の結果は、一般的に多段階の離散的な健全度（損傷度）として評価される。このような目視点検データを用いて、社会基盤施設の劣化を統計的に予測する手法は、マルコフ劣化ハザードモデル³⁾の開発により飛躍的な進歩を遂げた。同モデルでは、ハザード率^{4), 5)}によって、任意の健全度から次段階の健全度へ進展する劣化速度を定義する。ハザード率の特性変数として劣化要因を内包させることで、劣化要因に応じた劣化過程の記述が可能となる。このように伝統的なハザード解析では、確定的なハザード率を用いて、社会基盤施設の劣化過程を分析する。しかし、主な劣化要因を説明変数として取り込み、劣化過程に介在する不確実性をある程度記述できたとしても、個々の劣化過程をマルコフ劣化ハザードモデルにより完全に記述できるわけではない。なお劣化過程が多様に変動する場合、すなわちハザード率に異質性が存在する場合には、従来のハザード解析の方法を拡張することが必要となる。拡張の方向性は複数存在するが、本研究ではハザード率に確率分布を仮定した混合ハザードモデルを具体的な対象として、以降の議論を進める。

混合ハザードモデルでは、混合ハザード率を支配する異質性パラメータが、ある確率密度関数に従って分布すると考える。その上で、混合ハザードモデルを、ハザード率と異質性パラメータの確率分布の確率的コンボリューションにより定義する。このような混合確率モデル⁶⁾に関しては、貝戸等が路上障害物の到着過程をポアソンガンマモデル⁷⁾で記述するなど、アセットマネジメントへの適用事例もある⁸⁾。また、貝戸らは高速道路の管制システムのような大規模情報基盤施設を構成する、少数多品種の機器の故障発生過程をランダム比例ワイブル劣化ハザードモデル⁹⁾で表現した。本研究では、津田等が開発したマルコフ劣化ハザードモデル³⁾に対して、各健全度における劣化速度の異質性を明示的に考慮した混合マルコフ劣化ハザードモデル^{2),10)}を用いる。3.で説明するように、マルコフ劣化ハザードモデルでは、単位時間間隔あたりに健全度が1つ進展する（劣化が進展し、健全度が悪くなる）確率をハザード率を用いて表現する。混合マルコフ劣化ハザードモデルでは、各径間の施設の劣化特性の異質性を異質性パラメータという確率変数を用いて表現する。

(2) 劣化予測の精緻化

3.(2)で示すように、混合マルコフ劣化ハザードモデルでは、任意の健全度の劣化速度は、異質性パラメータとハザード率の積で評価することができる。

劣化速度（混合ハザード率）

$$= \text{異質性パラメータ} \times \text{ハザード率} \quad (1)$$

可観測な劣化要因であれば、特性変数という形でハザード率に内包することができる。異質性パラメータを考慮しない場合には、劣化速度は採用した劣化要因（特性変数）の多寡で決定される。したがって、特性変数のみを用いた劣化予測では、劣化速度が速くなるような条件下にありながらも、劣化速度が緩やかな施設の劣化過程を記述することはできない。一方で、異質性パラメータを考慮することによって、このような施設であっても、異質性パラメータの値により劣化速度を実際の劣化事象と整合的に評価できる。このことはまた、全ての施設に対して劣化速度を算出し、それらの相対評価を通して補修優先順位を決定することが可能であることを示している。混合マルコフ劣化ハザードモデルの推計には過去の日視点検データを用いる。当然のことながら、それらの中にはすでに補修が実施されたものも存在する。補修実績を有する施設や補修計画にリストアップされる施設に対して、相対評価の結果と比較することで、補修実施の妥当性を事後的に評価することが可能である。また、補修実施の妥当性を確認することができれば、劣化速度の相対評価に基づ

く補修優先順位決定手法を実務的な補修計画立案作業に試行的に適用することも可能である。すなわち、以上のような方法論を確立することで、点検員や専門技術者の経験的判断で実施されてきた補修の決定プロセスが形式知化されることになる。

3. 混合マルコフ劣化ハザードモデル

(1) モデル化の前提条件

カレンダー時刻 s_0 を初期時点とする離散的時間軸 $t = 0, 1, 2, \dots$ を考え、離散的時間軸上の点を時点と呼び、カレンダー時刻と区別する。単位時間幅を1に基準化する。施設の健全度を I 個の健全度 i ($i = 1, \dots, I$) で表現する。 i の値が大きくなるほど、劣化が進展している。時点 t における施設の健全度を状態変数 $h(t) = i$ ($i = 1, \dots, I; t = 0, 1, \dots$) を用いて表現する。施設の劣化過程がマルコフ連鎖に従うと仮定し、離散時間軸上の単位時間間隔における健全度間の推移確率をマルコフ推移確率を用いて表現する。推移確率は、時点 t における健全度 $h(t) = i$ を与件とし、次の時点 $t+1$ における健全度 $h(t+1) = j$ ($j \geq i$) が生起する条件付確率

$$\text{Prob}[h(t+1) = j | h(t) = i] = \pi_{ij} \quad (2)$$

を用いて定義される。このような推移確率をすべての健全度ペア (i, j) に対して定義することにより、マルコフ推移確率行列

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \cdots & \pi_{1I} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \pi_{II} \end{pmatrix} \quad (3)$$

を定義することができる。マルコフ推移確率 (2) は所与の2つの時点 $t, t+1$ の間において生じる健全度間の推移確率を示したものであり、当然のことながら、対象とする測定間隔が異なれば推移確率の値は異なる。補修がない限り常に劣化が進行するので、 $\pi_{ij} = 0$ ($i > j$) が成立する。また、推移確率の定義より $\sum_{j=i}^I \pi_{ij} = 1$ が成立する。すなわち、マルコフ推移確率に関して、

$$\left. \begin{aligned} \pi_{ij} &\geq 0 \quad (i, j = 1, \dots, I) \\ \pi_{ij} &= 0 \quad (i > j \text{ の時}) \\ \sum_{j=i}^I \pi_{ij} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

が成立しなければならない。状態 I は、補修のない限りマルコフ連鎖における吸収状態であり、 $\pi_{II} = 1$ が成立すると考える。なお、マルコフ推移確率は過去の劣化履歴には依存しない。マルコフ推移確率モデルでは、健全度が $i-1$ から i に推移した時点にかかわらず、時点 t から時点 $t+1$ の間に推移する確率は時点 t における健全度のみに依存するという性質（マルコフ性）を満足する¹¹⁾。マルコフ推移確率を用いれば、前回の観測時点 t から、 r 期経過した時点 $t+r$ に至る期間の間

に生起する劣化過程を推移確率行列

$$\pi(r) = \{\pi\}^r \quad (5)$$

を用いて表現できる．また， r 期推移確率行列 $\pi(r)$ の各要素を $\pi_{ij}(r)$ ($i, j = 1, \dots, I$) と表す．

(2) 混合マルコフ劣化ハザードモデル

施設の劣化速度の相対評価にあたっては，小濱らが提案した混合マルコフ劣化ハザードモデル²⁾を用いる．その詳細に関しては参考文献に譲り，ここでは読者の便宜を図るために，同モデルについて簡単に紹介しておく．分析の対象とする土木施設を K 個のグループに分割しよう．さらに，グループ k ($k = 1, \dots, K$) には，合計 L_k 個の要素が存在すると考える．グループ k ($k = 1, \dots, K$) に固有なハザード率の変動特性を表すパラメータ（以下，異質性パラメータと呼ぶ） ε^k を導入しよう．この時，グループ k の要素 l_k ($l_k = 1, \dots, L_k$) の健全度 i ($i = 1, \dots, I-1$) のハザード率を，混合ハザード関数

$$\lambda_i^{l_k} = \tilde{\lambda}_i^{l_k} \varepsilon^k \quad (i = 1, \dots, I-1; k = 1, \dots, K; l_k = 1, \dots, L_k) \quad (6)$$

を用いて表そう．ここに， $\tilde{\lambda}_i^{l_k}$ はグループ k の要素 l_k の平均的ハザード率（以下，標準ハザード率と呼ぶ）である．異質性パラメータ ε^k は，グループ k のハザード率の標準ハザード率 $\tilde{\lambda}_i^{l_k}$ からの乖離の程度を表す確率変数であり， $\varepsilon^k \geq 0$ が成立すると仮定す．異質性パラメータ ε^k の値が大きくなるほど，このグループ k に含まれるすべての要素の劣化速度が，個々の要素に対して定義される標準ハザード率よりも一律に大きいことを表す．さらに，式 (6) において，すべての健全度のランダム指数ハザード関数に，同一の確率変数 ε^k が含まれることに留意しよう．すなわち，他の要素に対して相対的に劣化速度が速い要素は，すべての健全度にわたり劣化速度が速くなることを表している．いま，異質性パラメータ ε^k が，ガンマ分布 $f(\varepsilon^k : \alpha, \gamma)$

$$f(\varepsilon^k : \alpha, \gamma) = \frac{1}{\gamma^\alpha \Gamma(\alpha)} (\varepsilon^k)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{\varepsilon^k}{\gamma}\right) \quad (7)$$

から抽出された確率標本であると考え．ガンマ分布 $f(\varepsilon^k : \alpha, \gamma)$ の平均は $\alpha\gamma$ で，分散は $\alpha\gamma^2$ である．また， $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数である．さらに，平均 1，分散 $1/\phi$ のガンマ分布の確率密度関数 $\bar{g}(\varepsilon^k : \phi)$ は

$$\bar{g}(\varepsilon^k : \phi) = \frac{\phi^\phi}{\Gamma(\phi)} (\varepsilon^k)^{\phi-1} \exp(-\phi\varepsilon^k) \quad (8)$$

と表される．

ここで，グループ k ($k = 1, \dots, K$) の異質性パラメータ ε^k の値を $\bar{\varepsilon}^k$ に固定しよう．この時，グループ k のある要素 l_k の健全度 i の寿命が $y_i^{l_k}$ 以上となる確率 $\tilde{F}_i(y_i^{l_k})$

は，指数指数ハザード関数 (6) を用いて

$$\tilde{F}_i(y_i^{l_k}) = \exp(-\tilde{\lambda}_i^{l_k} \bar{\varepsilon}^k y_i^{l_k}) \quad (9)$$

と書き換えることができる．さらに，グループ k の要素 l_k の第 1 回目の検査時刻 $\tau_A^{l_k}$ において健全度が i と判定され，次の検査時刻 $\tau_B^{l_k} = \tau_A^{l_k} + z^{l_k}$ においても健全度が i と判定される確率 $\pi_{ii}^{l_k}(z^{l_k} : \bar{\varepsilon}^k)$ は，

$$\pi_{ii}^{l_k}(z^{l_k} : \bar{\varepsilon}^k) = \exp(-\tilde{\lambda}_i^{l_k} \bar{\varepsilon}^k z^{l_k}) \quad (10)$$

となる．また，検査時刻 $\tau_A^{l_k}$ と $\tau_B^{l_k} = \tau_A^{l_k} + z^{l_k}$ の間で健全度が i から j ($j > i$) に推移するマルコフ推移確率 $\pi_{ij}^{l_k}(z^{l_k} : \bar{\varepsilon}^k)$ は，式 (6) より，

$$\begin{aligned} \pi_{ij}^{l_k}(z^{l_k} : \bar{\varepsilon}^k) &= \sum_{s=i}^j \prod_{m=i, \neq s}^{j-1} \frac{\tilde{\lambda}_m^{l_k}}{\tilde{\lambda}_m^{l_k} - \tilde{\lambda}_s^{l_k}} \exp(-\tilde{\lambda}_s^{l_k} \bar{\varepsilon}^k z^{l_k}) \\ &= \sum_{s=i}^j \psi_{ij}^s(\tilde{\lambda}^{l_k}) \exp(-\tilde{\lambda}_s^{l_k} \bar{\varepsilon}^k z^{l_k}) \end{aligned} \quad (11)$$

($i = 1, \dots, I-1; j = i+1, \dots, I; k = 1, \dots, K$)

と表すことができる．ただし， $\tilde{\lambda}^{l_k} = (\tilde{\lambda}_1^{l_k}, \dots, \tilde{\lambda}_{I-1}^{l_k})$ である．また， $\psi_{ij}^s(\tilde{\lambda}^{l_k})$ は

$$\psi_{ij}^s(\tilde{\lambda}^{l_k}) = \prod_{m=i, \neq s}^{j-1} \frac{\tilde{\lambda}_m^{l_k}}{\tilde{\lambda}_m^{l_k} - \tilde{\lambda}_s^{l_k}} \quad (12)$$

となり，平均的ハザード率のみの関数で表される．また， $\pi_{iI}^{l_k}(z^{l_k} : \bar{\varepsilon}^k)$ に関しては，

$$\pi_{iI}^{l_k}(z^{l_k} : \bar{\varepsilon}^k) = 1 - \sum_{j=i}^{I-1} \pi_{ij}^{l_k}(z^{l_k} : \bar{\varepsilon}^k) \quad (13)$$

と表すことができる．

つぎに，パラメータ ε^k がガンマ分布式 (15) に従って分布する場合を考える．まず，健全度 i の寿命が y_i 以上となる確率 (6) は生存関数 (16) を用いて，

$$\tilde{\pi}_{ii}^k(z^k) = \int_0^\infty \pi_{ii}^{l_k}(z^{l_k} : \varepsilon^k) \bar{g}(\varepsilon^k : \phi) d\varepsilon^k \quad (14)$$

と表すことができる．マルコフ推移確率 $\tilde{\pi}_{ii}^k(z^k)$ ハザード率の確率分布を考慮した検査間隔 z^k の平均的なマルコフ推移確率（以下，平均マルコフ推移確率と呼ぶ）を表している．同様に検査間隔 z_k の下で健全度 i から健全度 j へ推移する平均マルコフ推移確率は，

$$\tilde{\pi}_{ij}^k(z^k) = \int_0^\infty \pi_{ij}^{l_k}(z^{l_k} : \varepsilon^k) \bar{g}(\varepsilon^k : \phi) d\varepsilon^k \quad (15)$$

と表される．

(3) 目視点検データとハザード関数

いま，グループ k ($k = 1, \dots, K$) に属する要素 l_k ($l_k = 1, \dots, L_k$) に関して 2 回の目視検査が実施されたと考えよう．目視検査が実施されたカレンダー時刻を $(\tau_A^{l_k}, \tau_B^{l_k})$ と表す．ただし， $\tau_A^{l_k}$ は第 1 回の目視検査時刻であり， $\tau_B^{l_k}$ は第 2 回目の目視検査が実施されたカレンダー時刻である．グループ k に含まれる検査サンプル l_k ($l_k = 1, \dots, L_k$) には，第 1 回の目視検査から第 2 回目の目視

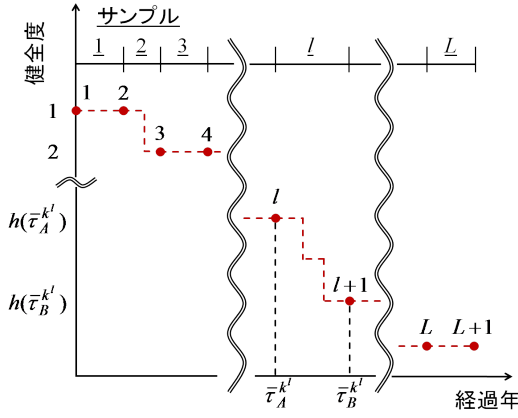


図-1 目視点検スキームと情報サンプル

検査が実施された時刻までの期間長 $\bar{z}_l^k$ と、これら2回の目視点検で計測された要素の健全度結果 $\bar{h}(\tau_A^{lk})$, $\bar{h}(\tau_B^{lk})$ に関する情報が記載されている。記号「 $\bar{\cdot}$ 」は、実測値であることを意味している。検査時点における健全度結果に基づいて、ダミー変数 δ_{ij}^{lk} ($i = 1, \dots, I-1, j = i, \dots, I; k = 1, \dots, K; l_k = 1, \dots, L_k$) を

$$\delta_{ij}^{lk} = \begin{cases} 1 & \bar{h}(\tau_A^{lk}) = i, \bar{h}(\tau_B^{lk}) = j \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases} \quad (16)$$

と定義する。さらに、ダミー変数ベクトルを $\bar{\delta}^{lk} = (\delta_{11}^{lk}, \dots, \delta_{I-1,I}^{lk})$ 、施設の劣化速度に影響を及ぼす施設の構造特性や環境条件を表す特性行ベクトルを $\bar{x}^{lk} = (\bar{x}_1^{lk}, \dots, \bar{x}_M^{lk})$ と表す。ただし、 $\bar{x}_m^{lk}$ ($m = 1, \dots, M$) はグループ k 、検査サンプル l_k の m 番目の説明変数に関する期間 $[\tau_A^{lk}, \tau_B^{lk})$ における観測値を表す。また、第1番目の説明変数は定数項に該当する変数であり、恒等的に $x_1^{lk} = 1$ である。グループ k ($k = 1, \dots, K$) に属する検査サンプル l_k ($l_k = 1, \dots, L_k$) が有する情報を $\xi^{lk} = (\bar{\delta}^{lk}, \bar{z}^{lk}, \bar{x}^{lk})$ と表そう。また、目視点検データ全体を Ξ と表す。

さらに、検査サンプル l_k ($l_k = 1, \dots, L_k$) の期間 $[\tau_A^{lk}, \tau_B^{lk})$ における劣化過程を混合指数ハザード関数 $\lambda_i^{lk} = \tilde{\lambda}_i^{lk} e^k$ ($i = 1, \dots, I-1$) を用いて表現しよう。健全度 I はマルコフ連鎖の吸収状態であり、 $\pi_{II}^k = 1$ が成立するためにハザード率 $\tilde{\lambda}_I^{lk}$ は必然的に $\tilde{\lambda}_I^{lk} = 0$ となる。土木施設の劣化過程を特徴づける標準ハザード率 $\tilde{\lambda}_i^{lk}$ ($i = 1, \dots, I-1; k = 1, \dots, K$) は施設の特性ベクトルに依存して変化すると考え、標準ハザード率 $\tilde{\lambda}_i^{lk}$ を特性ベクトル x^{lk} を用いて

$$\tilde{\lambda}_i^{lk} = \exp(x^{lk} \beta_i') \quad (17)$$

と表そう。ただし、 $\beta_i = (\beta_{i,1}, \dots, \beta_{i,M})$ は未知パラメータ $\beta_{i,m}$ ($m = 1, \dots, M$) による行ベクトル、記号「 $'$ 」は転置操作を表す。また、 $x_1^{lk} = 1$ より、 $\beta_{i,1}$ は定数項を表す。

4. 階層ベイズ推計

(1) 階層ベイズ

本研究では平均的なマルコフ推移確率とともに、土木施設が個々に有する劣化の異質性を評価する。任意の土木施設の異質性を評価するためにはその土木施設の目視点検データが必要となるが、一般的には、そのようなある土木施設に限定した目視点検データのサンプル数は十分に蓄積されていない。このような場合であっても、パラメータに事前分布を仮定するベイズ推計であれば事後分布としてパラメータを推計することが可能である。さらに推計結果の信頼性を事後分布の統計量から評価することも可能である¹²⁾。特に、本研究で取扱う混合マルコフ劣化モデルでは異質性パラメータ ε^k に平均1、分散 $1/\phi$ のガンマ分布を仮定している。これはベイズ推計における事前分布に他ならない。すなわち、混合マルコフ劣化モデルの未知パラメータに事前分布を設定する場合、すでに設定されている事前分布のパラメータ ϕ (ベイズ統計学では超パラメータと呼ばれる) にさらに事前分布を設定することになる。事前分布のパラメータ ϕ に対して設定される事前分布は超事前分布と呼ばれる。事前分布を階層化したそれらのモデルは階層ベイズモデルと総称され、主にマーケティング分析などの分野で研究が進められている¹²⁾。本研究でも混合マルコフ劣化モデルを階層ベイズモデルとして取扱うとともに、以下に述べる本モデルのパラメータ推計法を階層ベイズ推計と呼ぶ。

一般的なベイズ推計法では、パラメータの事前分布と、観測されたデータを用いて定義される尤度関数を用いて、パラメータの事後分布を推定する。いま、尤度関数を $\mathcal{L}(\theta|\Xi)$ を表そう。 $\theta = (\beta, \phi, \varepsilon)$ はパラメータベクトルを表す。ここで、 θ が確率変数で、事前確率密度関数 $\pi(\theta)$ に従うと仮定しよう。目視点検データ Ξ が与件であるときに、未知パラメータベクトル θ の同時事後確率密度関数 $\pi(\theta|\Xi)$ はベイズの定理より、

$$\pi(\theta|\Xi) = \frac{\mathcal{L}(\theta|\Xi)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} \mathcal{L}(\theta|\Xi)\pi(\theta)d\theta} \quad (18)$$

と表すことができる。ただし、 Θ はパラメータ空間である。この時、式(18)の分母は基準化定数であることから、同時事後確率密度関数 $\pi(\theta|\Xi)$ は

$$\pi(\theta|\Xi) \propto \mathcal{L}(\theta|\Xi)\pi(\theta) \quad (19)$$

となる。さらに、事前確率密度関数 $\pi(\theta)$ は、

$$\begin{aligned} \pi(\theta) &= \pi(\beta, \phi, \varepsilon) \\ &= \pi(\beta)\pi(\varepsilon|\phi)\pi(\phi) \\ &= \prod_{i=1}^{I-1} \prod_{k=1}^K \pi(\beta_i)\pi(\varepsilon^k|\phi)\pi(\phi) \end{aligned} \quad (20)$$

と展開され、本研究で扱う混合マルコフ劣化モデルの異

質性パラメータ ε の確率分布とその確率分布のパラメータ ϕ の事前分布が階層構造となっていることがわかる。階層ベイズ推計では、未知パラメータ $\theta = (\beta, \phi, \varepsilon)$ にそれぞれ事前分布を設定し、各パラメータの条件付き事後密度関数を算出する。しかしながら、ハザードモデルの場合、簡単な指数ハザードモデルを用いても、共役事前確率分布が存在しないことが知られている。共役事前確率密度分布が存在しない場合、基準化定数を解析的に求めることは不可能であり、数値解析により多重積分を求めることが必要になる。さらに、多重積分の算出以前に尤度関数と事前分布の解を明示的に示すことができないという問題も存在する。これに対して乱数を利用した数値解析法の一つである MCMC 法の台頭により、基準化定数を算出することなく、効率的に事後分布から乱数を発生させることが可能となってきた。階層ベイズモデルに対しては代表的な MCMC 法であるギブスサンプリング法やメトロポリス・ヘイスティング法を組み合わせることで事後分布を算出する階層ベイズ推計が提案されている¹³⁾。

(2) 事後分布の定式化

いま、パラメータ $\theta = (\beta_1, \dots, \beta_{I-1}, \phi, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^K)$ を与件としよう。この時、目視点検データ Ξ が観測される同時生起確率（尤度） $\mathcal{L}(\theta : \Xi)$ は、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta : \Xi) &= \prod_{i=1}^{I-1} \prod_{j=i}^I \prod_{k=1}^K \prod_{l_k=1}^{L_k} \left\{ \pi_{ij}^{l_k}(\bar{z}^{l_k}, \bar{x}^{l_k} : \beta, \phi, \varepsilon^k) \right\}^{\bar{\delta}_{ij}^{l_k}} \\ &= \prod_{i=1}^{I-1} \prod_{j=i}^I \prod_{k=1}^K \prod_{l_k=1}^{L_k} \left\{ \sum_{m=i}^j \psi_{ij}^m(\tilde{\lambda}^{l_k}) \exp(-\tilde{\lambda}_m^{l_k} \varepsilon^k \bar{z}^{l_k}) \right\}^{\bar{\delta}_{ij}^{l_k}} \end{aligned} \quad (21)$$

と表される。ただし、 $\tilde{\lambda}^{l_k} = (\tilde{\lambda}_1^{l_k}, \dots, \tilde{\lambda}_{I-1}^{l_k})$ である。

また、式 (20) の未知パラメータ $\theta = (\beta, \phi, \varepsilon)$ の事前確率密度関数 $\pi(\theta)$ をそれぞれ以下のように設定する。まず、 β_i の事前確率密度関数 $\pi(\beta_i)$ として多次元正規分布を用いる。すなわち、 $\beta_i \sim \mathcal{N}_M(\mu_i, \Sigma_i)$ である。ただし、 $\mathcal{N}_M(\mu_i, \Sigma_i)$ は期待値ベクトルを μ_i 、分散共分散行列を Σ_i とした M 次元正規分布である。 ε^k の事前確率密度関数 $\pi(\varepsilon^k | \phi)$ はガンマ分布 (15) としてすでに与えられている。さらに、式 (15) のガンマ分布の分散 $1/\phi = \omega$ の事前確率密度関数 $\pi(\omega)$ としてガンマ分布 $h(\omega : \alpha_0, \gamma_0)$ を設定する。すなわち、 $\varepsilon^k \sim \mathcal{G}(\omega^{-1}, \omega)$ 、 $\omega \sim \mathcal{G}(\alpha_0, \gamma_0)$ である。

したがって、同時事後確率密度関数は、

$$\begin{aligned} \pi(\theta | \Xi) &\propto \mathcal{L}(\theta | \Xi) \prod_{i=1}^{I-1} \prod_{k=1}^K \pi(\beta_i) \pi(\varepsilon^k | \phi) \pi(\phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\propto \prod_{i=1}^{I-1} \prod_{j=i}^I \prod_{k=1}^K \prod_{l_k=1}^{L_k} \left\{ \sum_{m=i}^j \psi_{ij}^m(\tilde{\lambda}^{l_k}) \exp(-\tilde{\lambda}_m^{l_k} \varepsilon^k \bar{z}^{l_k}) \right\}^{\bar{\delta}_{ij}^{l_k}} \\ &\cdot \prod_{i=1}^{I-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\beta_i - \mu_i) \Sigma_i^{-1} (\beta_i - \mu_i)' \right\} \\ &\cdot \prod_{k=1}^K (\varepsilon^k)^{\phi-1} \exp(-\phi \varepsilon^k) \cdot \left(\frac{1}{\phi} \right)^{\alpha_0-1} \exp \left(-\frac{1}{\phi \gamma_0} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

となる。これに基づき各パラメータの条件付き事後確率密度関数を計算する。しかしながら、上述したように、同時事後確率密度関数の基準化定数が解析的に定義ない。さらに同時事後確率密度関数も明示的に求めることが困難となっている。次節では事後分布に関する統計量を MCMC 法を用いて直接求める方法論を提示する。

(3) 多重ブロック MH 法

本研究では代表的な MCMC 法である MH 法を用いて、各パラメータの標本サンプルを事後確率密度関数から抽出する。MH 法では事後分布からのサンプリングが難しい場合に、これを近似するような分布（提案分布）からサンプリングを行う。さらに、目標分布と近似分布の差異を修正するステップを含めることにより、目標分布からランダムサンプリングを行う。一方で、混合マルコフ劣化モデルでは異質性をパラメータとして取扱うために、パラメータ空間が極めて高次元かつ階層化している。このような場合には近似精度の良い提案分布を見つけることが困難となるために、ギブスサンプリング法のように未知パラメータを $\theta = (\beta, \phi, \varepsilon)$ のようなグループに分割してサンプリングする多重ブロック MH 法¹³⁾を用いることとする。

多重ブロック MH 法のアルゴリズムを説明する。未知パラメータの部分ベクトル β から β_{e_1} を除いた未知パラメータベクトルを β^{-e_1} と表そう。また、同様に未知パラメータの部分ベクトル ε から ε^{e_2} を除いた未知パラメータベクトルを ε^{-e_2} と表そう。このとき、式 (22) より、 $\beta^{-e_1}, \phi, \varepsilon$ を既知とした時の β_{e_1} の条件付き事後確率密度関数 $\pi(\beta_{e_1} | \beta^{-e_1}, \phi, \varepsilon, \Xi)$ は、

$$\begin{aligned} \pi(\beta_{e_1} | \beta^{-e_1}, \phi, \varepsilon, \Xi) &\propto \prod_{i=1}^{e_1} \prod_{j=e_1}^I \prod_{k=1}^K \prod_{l_k=1}^{L_k} \left\{ \tilde{\lambda}_{e_1}^{l_k} \bar{\delta}_{ij}^{l_k} - \bar{\delta}_{ie_1}^{l_k} \right\} \\ &\cdot \sum_{m=i}^j \prod_{s=i}^{m-1} \frac{1}{\tilde{\lambda}_s^{l_k} - \tilde{\lambda}_m^{l_k}} \prod_{s=m}^{j-1} \frac{1}{\tilde{\lambda}_{s+1}^{l_k} - \tilde{\lambda}_m^{l_k}} \exp(-\tilde{\lambda}_m^{l_k} \varepsilon^k \bar{z}^{l_k}) \Big\}^{\bar{\delta}_{ij}^{l_k}} \\ &\cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\beta_{e_1} - \mu_{e_1}) \Sigma_{e_1}^{-1} (\beta_{e_1} - \mu_{e_1})' \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

と表せる。ただし、 $\bar{\delta}_{ie_1}^{l_k}$ は、検査サンプル k の事前健全度 $\bar{h}(\tau_A^{l_k}) = i$ とサンプリングする際の事前健全度 e が一致した場合に 1 を、そうでない場合に 0 をとるダミー変数である。また、 $\beta, \phi, \varepsilon^{-e_2}$ を既知とした時の ε_{e_2}

の条件付き事後確率密度関数 $\pi(\varepsilon_{e2}|\beta, \phi, \varepsilon^{-e2}, \Xi)$ は,

$$\begin{aligned} & \pi(\varepsilon^{e2}|\beta, \phi, \varepsilon^{-e2}, \Xi) \\ & \propto \prod_{i=1}^{I-1} \prod_{j=i}^I \prod_{l_{e2}=1}^{L_{e2}} \left\{ \sum_{m=i}^j \psi_{ij}^m(\tilde{\lambda}^{l_{e2}}) \exp(-\tilde{\lambda}_m^{l_{e2}} \varepsilon^{e2} \tilde{z}^{l_{e2}}) \right\}^{\tilde{\delta}_{ij}^{l_{e2}}} \\ & \cdot (\varepsilon^{e2})^{\phi-1} \exp(-\phi \varepsilon^{e2}) \end{aligned} \quad (24)$$

と表せる．さらに， β, ε を既知とした時の ϕ の条件付き事後確率密度関数 $\pi(\phi|\beta, \varepsilon, \Xi)$ は，

$$\begin{aligned} & \pi(\phi|\beta, \varepsilon, \Xi) \\ & \propto \prod_{k=1}^K (\varepsilon^k)^{\phi-1} \exp(-\phi \varepsilon^k) \cdot \left(\frac{1}{\phi} \right)^{\alpha_0-1} \exp\left(-\frac{1}{\phi \gamma_0}\right) \end{aligned} \quad (25)$$

と表すことができる．これらの条件付き確率密度関数から順次標本を発生させることを繰り返す．それらの標本を用いてパラメータ θ の事後分布に関する各種の統計量を計算することができる．

ただし，式 (23)，(24)，(25) の条件付き事後確率はいずれも直接サンプリングできる分布にはなっていない．そこで，これらの条件付き確率密度関数から標本を得る方法として MH 法を適用する．

式 (23)，(24)，(25) で表される分布はいずれも異なるものの，以下に示す MH 法の適用に際して根本的な違いはない．

ステップ 1 事前分布のパラメータ値 $\mu, \Sigma, \alpha_0, \gamma_0$ を任意に設定する．それらはこれから推計するパラメータの制約となる．本研究では無条件事前分布として分散のパラメータ値を大きく設定することとする．また，パラメータ値 θ の初期値 $\theta^{(0)}$ を任意に設定する．初期値の影響はサンプル数の増加とともに薄れていく．

ステップ 2 ステップ k のパラメータベクトルの候補値 θ' を提案分布から発生させる．本研究では，提案分布は式 (23)，(24)，(25) の事前分布にそれぞれ相当する．

ステップ 3 発生させたパラメータベクトルの候補値 θ' を用いて

$$\alpha^{(t)} = \min \left[\frac{\mathcal{L}(\theta'|\Xi)}{\mathcal{L}(\theta^{(k-1)}|\Xi)} \right] \quad (26)$$

を定義する．

ステップ 4 区間 $[0, 1]$ で定義される一様分布 $\mathcal{U}(0, 1)$ から，一様乱数 $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$ を発生させ， $\theta^{(k)}$ を以下のルールに従い決定する．

$$\theta^{(k)} = \begin{cases} \theta^{(k-1)} & u > \alpha^{(t)} \\ \theta' & u \leq \alpha^{(t)} \end{cases} \quad (27)$$

ステップ 5 以上により決定したパラメータベクトル $\theta^{(k)}$ を記録する． $k \leq \bar{k}$ の場合は $k = k + 1$ としステップ 2 へ戻る． $k = \bar{k}$ の場合はアルゴリズムを終了する．

以上の方法を十分ステップ k 繰り返した時，抽出されるサンプルは事後分布からのサンプルと見なすことができる． $\hat{\theta}$ を求めることができる．実際には，式 (23)，(24)，(25) で順次ステップ 2 からステップ 5 を実施するため，ステップ 5 では $k \leq \bar{k}$ の場合は他の事後分布のサンプリングを行い，すべてのパラメータでステップ k のサンプリングが終了した場合に $k = k + 1$ とする．

5. ベンチマーキングと評価指標

(1) 目視点検とベンチマーキング

混合マルコフ劣化ハザードモデルを推計し，混合マルコフ劣化ハザードモデルの未知パラメータの最尤推計量 $\hat{\theta}$ を獲得できたと考える．施設 k の特性変数 $\bar{x}^k$ と健全度 i のハザード率の事後分布の期待値 $\hat{\beta}_i$ を用いれば，当該施設の健全度 i ($i = 1, \dots, I - 1$) に対する平均的劣化速度を表す標準ハザード率は，

$$\tilde{\lambda}_i^k = \exp(\bar{x}^k \hat{\beta}_i') \quad (28)$$

と定義できる．式 (28) は，混合マルコフ劣化ハザードモデルにおいて，異質性パラメータを $\varepsilon = 1$ とした場合に他ならない．このように異質性パラメータの値を 1 に設定することにより，施設の平均的な劣化過程を表現することができる．さらに，標準ハザード率 $\tilde{\lambda}_i^k$ を用いれば，当該施設における各健全度の期待寿命（次段階の健全度に推移するまでの時間） ET_i^k は，式 (9) を用いて，

$$ET_i^k = \int_0^\infty d\tilde{F}_i(y_i^k) = \frac{1}{\tilde{\lambda}_i^k} \quad (29)$$

と表される．また，施設 k が供用開始時点（あるいは補修実施時点）から，任意の健全度 i ($i = 2, \dots, I$) に進展するまでに要する平均的時間 $E[T](i)$ は，

$$E[T](i) = \sum_{j=1}^i \frac{1}{\tilde{\lambda}_j^k} \quad (30)$$

と定義できる．特に， $i = I$ の場合を期待寿命と呼ぶ．

各施設の異質性パラメータの推計量 $\hat{\varepsilon}^k(\hat{\theta})$ に基づいて，劣化の進行が早い施設の集合を定義する．いま，全施設の中で，劣化速度が速い上位 $\alpha \times 100\%$ の中に入るような施設の集合 $\bar{\Omega}_\alpha$ （重点監視集合 $\bar{\Omega}_\alpha$ と呼ぶ）を

$$\bar{\Omega}_\alpha = \{k \in (1, \dots, K) | \hat{\varepsilon}^k(\hat{\theta}) \geq \bar{\varepsilon}_\alpha\} \quad (31)$$

と定義する．ここに， $\bar{\varepsilon}_\alpha$ は，信頼度 $(1 - \alpha) \times 100\%$ とした場合の異質性パラメータの上限値（以下では，臨界的異質性パラメータ値と呼ぶ）であり

$$\bar{\varepsilon}_\alpha = \min_c \left\{ c \left| \int_c^\infty \bar{f}(\varepsilon : \hat{\phi}) d\varepsilon \leq \alpha \right. \right\} \quad (32)$$

で定義される．異質性パラメータの推計量が信頼度 $(1 - \alpha) \times 100\%$ の重点監視集合 $\bar{\Omega}_\alpha$ に属する場合，当該施設は信頼度 $(1 - \alpha) \times 100\%$ で，劣化の進行が速いと判断す

ることができる．さらに，個別ハザード率 $\hat{\lambda}_i^k = \hat{\lambda}_i^k \varepsilon^k(\hat{\theta})$ 自体を管理する場合を考える．記号 $\hat{\lambda}_i^k$ は，推計量であることを示す．そこで，個別ハザード率の推計量 $\hat{\lambda}_i^k$ を大きい順番に $\hat{\lambda}_i^{l(1)}, \dots, \hat{\lambda}_i^{l(n)}, \dots, \hat{\lambda}_i^{l(L)}$ と並べ直す．ただし，上付き添字 $l(n)$ は，すべてのグループに属する施設の中で，個別ハザード率の推計量 $\hat{\lambda}_i^k$ が n 番目に大きい施設の添え字 l^k を表す．したがって， $\hat{\lambda}_i^{l(1)}$ は，もっとも劣化速度が大きい施設の混合ハザード率と対応する．また， $L = \sum_{k=1}^K L^k$ はサンプル総数である．以上の記号の定義の下で，劣化速度の速い施設の上位 $\alpha \times 100\%$ の中に入るような施設の集合 $\tilde{\Omega}_\alpha$ (重点監視集合 $\tilde{\Omega}_\alpha$ と呼ぶ) を

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_\alpha &= \{l(1), \dots, l(n^*(\alpha))\} \\ n^*(\alpha) &= \arg \sup_n \left\{ \frac{n}{L} \leq \alpha \right\} \end{aligned} \quad (33)$$

と定義する．ただし， n は自然数である．さらに， $\hat{\lambda}_i - \varepsilon^k$ 空間上で重点監視集合 $\tilde{\Omega}_\alpha$ の境界を表す曲線

$$\hat{\lambda}_i \varepsilon^k = \hat{\lambda}_i^{l(n^*(\alpha))} \quad (34)$$

を臨界基準曲線と呼ぶ．

以上の相対評価モデルを用いて，施設の劣化速度を評価した結果，ある施設の劣化速度が重点監視集合 $\tilde{\Omega}_\alpha$ ，あるいは $\tilde{\Omega}_\alpha$ に属することが判明した場合，そのグループに属する施設は何らかの理由で劣化速度が大きいと診断することができる．このような施設に対して，劣化の進行が早い原因に関する工学的検討を行うことが必要である．このように，目視点検データに基づいて，施設の劣化速度に関する相対評価を実施することにより，重点管理区間を抽出することが可能となる．さらに重点管理集合は補修を優先すべき施設集合であることから，集合内の施設に対して劣化速度に基づく相対的な順位付けを行うことで補修優先順位を決定できる．

6. おわりに

本研究では，異質性を考慮した混合マルコフ劣化ハザードモデルの推計でサンプル数により推計結果の信頼性が問題となるような場合を対象として，混合マルコフ劣化ハザードモデルの階層ベイズ推計法を定式化した．具体的には，未知パラメータに対して階層的に事前分布を設定するとともに，MCMC 法によってそれらを推計することで，最終的な推計結果を事後分布の統計量として評価する方法論を提示した．その一方で，実際の目視点検データに本研究で提示した方法論を適用し，その有効性を確認する必要がある．これについては，本研究の発表時に改めて公表・議論させて頂きたい．さらに今後の課題として，目視点検時に詳細情報を取得することによる効果を経済的側面からも分析

することがあげられる．異質性を評価可能な詳細情報を追加すれば，劣化予測精度が向上する．これまではそのような効果を定量的に評価することが困難であった．しかし，本研究で提示した方法論によれば情報の追加による劣化予測精度の向上効果は事後分布の分散の減少として定量的に評価可能となる．それらを用いることで，ライフサイクル費用に及ぼす影響，すなわらそれに見合う費用対効果を得られるかを検討すること，検討するための方法論を構築しておくことも重要である．

参考文献

- 1) 小林潔司：土木工学における実践的研究：課題と方法，土木技術者実践論文集，No.1，pp.143-155，2010.
- 2) 小濱健吾，岡田貢一，貝戸清之，小林潔司：劣化ハザード率評価とベンチマーキング，土木学会論文集 A，Vol.64，No.4，pp.857-874，2008.
- 3) 津田尚胤，貝戸清之，青木一也，小林潔司：橋梁劣化予測のためのマルコフ推移確率の推定，土木学会論文集，No.801/I-73，pp.68-82，2005．
- 4) Lancaster, T.: *The Econometric Analysis of Transition Data*, Cambridge University Press, 1990.
- 5) Gourieroux, C.: *Econometrics of Qualitative Dependent Variables*, Cambridge University Press, 2000.
- 6) Mikosch, T.: *Non-Life Insurance Mathematics*, Springer, 2000.
- 7) 貝戸清之，小林潔司，加藤俊昌，生田紀子：道路施設の巡回頻度と障害物発生リスク，土木学会論文集 F，Vol.63，No.1，pp.16-34，2007.
- 8) 起塚亮輔，貝戸清之，伊藤哲男，西川秀：目視点検データに基づく橋梁床版のかぶりコンクリートの剥離・剥落に関する統計分析，コンクリート工学年次論文集，日本コンクリート工学協会，Vol.32，No.2，pp.1441-1446，2010.
- 9) 貝戸清之，山本浩司，小濱健吾，岡田貢一，小林潔司：ランダム比例ワイブル劣化ハザードモデル：大規模情報システムへの適用，土木学会論文集 F，Vol.64，No.2，pp.115-129，2008
- 10) 青木一也，小田宏一，児玉英二，貝戸清之，小林潔司：ロジックモデルを用いた舗装長寿命化のベンチマーキング評価，土木技術者実践論文集，Vol.1，pp.40-52，2010.3
- 11) 森村英典，高橋幸雄：マルコフ解析，日科技連，1979.
- 12) 阿部誠，近藤文代：マーケティングの科学-POSデータの解析-，朝倉書店，2005.
- 13) 稲庭幸人，種村正美，大森裕浩，和合肇，佐藤整尚，高橋明彦：計算統計 II マルコフ連鎖モンテカルロ法とその周辺，岩波書店，2005.

(2011. 2. 15 受付)