

落石災害対策計画へのポートフォリオ理論の適用に関する研究

丸山 竜平¹・高木 朗義²・倉内 文孝³・北浦 康嗣⁴

¹正会員 岐阜県高山土木事務所（〒506-8688 高山市上岡本町7-468）

E-mail: maruyama-ryuhei@pref.gifu.lg.jp

²正会員 岐阜大学教授 工学部社会基盤工学科（〒501-1193 岐阜県岐阜市柳戸1-1）

E-mail: a_takagi@gifu-u.ac.jp

³正会員 岐阜大学准教授 工学部社会基盤工学科（〒501-1193 岐阜県岐阜市柳戸1-1）

E-mail: kurauchi@gifu-u.ac.jp

³正会員 帝塚山大学講師 経済学部（〒631-8501 奈良市帝塚山7-1-1）

E-mail: kkitauro@tezukayama-u.ac.jp

岐阜県飛騨圏域には山間地域が多く、常に落石災害の危険にさらされている。一方で、対策に用いることができる予算は厳しく、合理的に落石災害対策を行うことが求められる。このような際に、対策費用に対する効果、すなわち費用対効果に基づき対策箇所の優先順位決定が行われることが多いが、本研究では、このような評価の際に対策効果として一般的に用いられる期待損失額、すなわち災害リスクの減少値に加え、万が一損失が生じた際の影響を考慮する必要があると考え、不確実性下における最適投資を決定するポートフォリオ理論を適用することを提案する。所与の予算制約の下での不確実性を考慮した最適対策箇所の組み合わせを決定する最適化モデルを構築する。岐阜県飛騨圏域における落石災害対策計画に適用することで、提案した手法の有用性を確認する。

Key Words : risk management, modern portfolio theory, rock fall disaster

1. はじめに

岐阜県飛騨圏域には山間地域が多く、常に落石災害の危険にさらされている。一方で、対策に用いることができる予算は多くなく、合理的に落石災害対策を行うことが求められる。このような際には、対策費用に対する効果、すなわち費用対効果に基づき対策箇所の優先順位決定が行われることが多い。さらに、その効果は落石災害の発生確率に災害発生時の損失を乗じた期待損失、すなわち災害リスクが、対策を講じることでどの程度軽減するか、と定義することが多い。この際、災害が発生すれば甚大な被害が生じることがわかっていたとしても、その災害発生確率が非常に小さく見積もられる場合、期待損失額としては小さくなってしまい、対策が後回しになることも考えられる。しかしながら、このような災害が発生した場合の社会的影響の大きさを鑑みると、期待損失だけでなく、その結果生じうる損失の大きさも加味した評価が必要と考えられる。

以上の背景を踏まえ、本研究では落石による斜面災害を分析対象として、不確実性下における最適投資を決定

するポートフォリオ理論を適用することを提案する。所与の予算制約下での不確実性を考慮した最適対策箇所の組み合わせを決定する最適化モデルを構築するとともに、岐阜県飛騨圏域における落石災害対策計画に適用することで、提案した手法の有用性を確認する。

2. ポートフォリオ理論に基づく最適化モデルの構築

(1) ポートフォリオ理論の概要

ポートフォリオ理論とは、投資に対するリターンとリスクの尺度から最適な投資戦略を示すための理論であり、投資に対して得られる効果だけではなく、その投資の不確実な部分に関しても評価できるものである。仁科ら¹⁾によれば、経済活動を行う各主体にとって活動によって生じる利益や、損失に対する不確実性を考慮し、活動に対する合理的な意思決定がどのようなものかを示し、その特徴を明らかにするための理論としてポートフォリオ理論は示されている。

本研究ではMarkowitz²⁾が提唱した、ポートフォリオ理

論の基礎となるモデルである平均 - 分散モデルを用いた落石対策計画策定のための手法を開発する．平均 - 分散モデルでは，資産による収益率の期待値（平均）をリターン尺度，収益率の分散をリスク尺度として収益性の評価を行う．本研究での解釈としては，リターン尺度を対策による損失額の期待値の軽減分，リスク尺度を対策による損失額の分散の軽減分とする．ここでは，リターン尺度とリスク尺度をパラメータを介した重み付き和とし，その値を目的関数として定義する．ポートフォリオ理論を用いて損失額の分散を考慮することで，損失額の組み合わせと各斜面を対策することによって軽減される損失額の総和のバラツキを表し，その損失額の分散を対策効果の不確実性として算出することが可能となる．

(2) 対策効果の定義

本研究では，想起しうる被災シナリオについて，ある被災シナリオ k が生じる確率と被災した場合の損失を目的関数における各尺度の要素として，損失額の平均（損失額の期待値）と損失額の分散（損失額のバラツキ）の重み付き和について，各項目における対策を行ったことによる軽減を目的関数として設定する．

計算にあたっては，落石災害が発生する年確率は，斜面ごとに独立な事象としてとらえる．また，ある瞬間に同時に2つ以上の災害が発生しないものとし，1年に複数の斜面で被害が発生した場合の年間損失額は，各斜面で定義される損失額之和で示されることとする．生じうる斜面災害の場合の数は， N 個の斜面ならば 2^N 個となる．ここでは，これらの組み合わせのうちのある事象をシナリオ k と呼ぶこととし，シナリオ k における被災の有無をベクトル $y^k = (y_{1k}, y_{2k}, \dots, y_{Nk})^T$ で表現する．ただし， y_{ik} は，斜面 i がシナリオ k で被災していれば1，そうでなければ0をとる二値変数である．このとき，シナリオ k の発生確率 q_k およびその損失額 e_k は次のように表現できる．

$$q_k = \prod_{i=1}^N p_i^{y_{ik}} (1 - p_i)^{(1-y_{ik})} \quad (1)$$

$$e_k = \sum_{i=1}^N y_{ik} d_i \quad (2)$$

ただし， p_i ：斜面 i における落石の発生確率， d_i ：斜面 i における落石による社会経済的損失．なお，全確率の定理より，任意の N について下記が成立する．

$$\sum_{k \in \text{Bin}^N} q_k = 1 \quad (3)$$

ここで， Bin^N は， N 個の二値変数で構成される二値変数のすべての組み合わせと定義する．すなわち， N 個の斜面数がある場合には，それぞれの斜面崩壊の有無を考慮した 2^N 個のシナリオが考えられ，その総和が1であることを式(3)は示している．これらを用いて現状の年間の損失額の期待値 E_0 は，次のように記述・整理できる．

$$\begin{aligned} E_0 &= \sum_{k \in \text{Bin}^N} q_k e_k \\ &= \sum_{k \in \text{Bin}^N} \left(\prod_i p_i^{y_{ik}} (1 - p_i)^{(1-y_{ik})} \cdot \left(\sum_{j=1}^N y_{jk} d_j \right) \right) \\ &= \sum_{j=1}^N d_j \sum_{k \in \text{Bin}^N} \left(y_{jk} \prod_i p_i^{y_{ik}} (1 - p_i)^{(1-y_{ik})} \right) \\ &= \sum_j p_j d_j \sum_{k \in \text{Bin}^{N-1}} \left(\prod_{i \neq j} p_i^{y_{ik}} (1 - p_i)^{(1-y_{ik})} \right) \\ &= \sum_i p_i d_i \end{aligned} \quad (4)$$

ここで，式(4)の3～4行目の展開について補足説明しておく．3行目において，後半のシナリオ k での和の演算について， y_{jk} が全体にかかっていることから，この足し算は，斜面 j が被災した場合（ $y_{jk}=1$ ）のみ有効となる．そのため， k の和の演算から斜面 j のみとりだし，その発生確率 p_j をシグマの外に追いやっているのが4行目にあたる．この演算を行うことで， k のシグマの中から斜面数が $N-1$ 個の場合の全確率であるため，最終的に簡単な表現となる．

同様に，分散について記述し，整理する．対策前の損失額の分散 V_0 は，次の通り定義される．

$$V_0 = \sum_{k \in \text{Bin}^N} q_k e_k^2 - \left(\sum_{k \in \text{Bin}^N} q_k e_k \right)^2 \quad (5)$$

まずは，右辺第1項について式展開を行うと次の通り．

$$\begin{aligned} &\sum_{k \in \text{Bin}^N} q_k e_k^2 \\ &= \sum_{k \in \text{Bin}^N} \left(\prod_i p_i^{y_{ik}} (1 - p_i)^{(1-y_{ik})} \right) \left(\sum_j y_{jk} d_j \right)^2 \\ &= \sum_j \sum_l d_j d_l \sum_{k \in \text{Bin}^N} y_{jk} y_{lk} \left(\prod_i p_i^{y_{ik}} (1 - p_i)^{(1-y_{ik})} \right) \\ &= \sum_j p_j d_j^2 \sum_{k \in \text{Bin}^{N-1}} \left(\prod_{i \neq j} p_i^{y_{ik}} (1 - p_i)^{(1-y_{ik})} \right) \\ &\quad + \sum_j \sum_{l \neq j} p_j p_l d_j d_l \sum_{k \in \text{Bin}^{N-2}} \left(\prod_{i \neq j, l} p_i^{y_{ik}} (1 - p_i)^{(1-y_{ik})} \right) \\ &= \sum_i p_i d_i^2 + \sum_i \sum_{j \neq i} p_i p_j d_i d_j \end{aligned} \quad (6)$$

以上より対策前の損失額分散 V_0 は次の通り整理できる．

$$V_0 = \sum_i p_i d_i^2 - \sum_i (p_i d_i)^2 \quad (7)$$

さらに，これらを用いて対策効果を定義する．今，ある年度における対策斜面の集合を要素数 N の二値変数ベクトル $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ ，斜面 i を対策するなら1，しないなら0で表現するとしよう．ある年度の対策斜面が x で表現されるとき，年損失額期待値の軽減効果 $\Delta E[x]$ および年損失額分散の軽減効果 $\Delta V[x]$ は，次のようにかける．

$$\begin{aligned} \Delta E[x] &= \sum_i p_i d_i - \sum_i (1 - x_i) p_i d_i \\ &= \sum_i x_i p_i d_i \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \Delta V[x] &= \left\{ \sum_i p_i d_i^2 - \sum_i (p_i d_i)^2 \right\} \\ &\quad - \left\{ \sum_i (1 - x_i) p_i d_i^2 - \sum_i (1 - x_i) (p_i d_i)^2 \right\} \\ &= \sum_i x_i (p_i d_i^2 - (p_i d_i)^2) \end{aligned} \quad (9)$$

(3) 最適化問題の定式化

本研究では，所与の年予算制約の下で，損失額の平均

と分散の重み付き和を最小化する問題を解くこととする．式(8)，(9)より，損失額の期待値および分散は対策ベクトル x の線形結合となっていることから，この問題は二値整数線形計画問題として次のように定式化できる．

$$\text{Max } z = (1 - \alpha) \Delta E[x] / E_0 + \alpha \Delta V[x] / V_0 \quad (10)$$

Subject to

$$\sum_{i=1}^N c_i x_i \leq \text{Budget} \quad (11)$$

ここで， c_i ：斜面 i の対策費用， α ：平均と分散の重みを表すパラメータ，Budget：年間の落石対策予算．

本来，ポートフォリオ理論の平均 - 分散モデルをそのまま適用したモデルとするのであれば，平均の軽減量と分散の軽減量の重み和をとる必要があるが，この評価モデルでは，損失額の期待値と分散の軽減率の和とした．この理由としては，本研究における平均値と分散値のオーダーに大きな差があるため，このオーダーの差をなくすためである．損失額の期待値の軽減率と損失額の分散の軽減率として各尺度を定めるが，軽減率を算出する際分母は定数である．よって，定数を用いて各項目の正規化しスケーリングを行っているだけなので，本質的には平均 - 分散モデルと違いはなく，ポートフォリオ理論に基づいた目的関数の設定となっている．また，重み付き和としてモデルを定義し落石対策計画策定の最適化問題を解くことで，平均と分散の重みの付け方によって対策される斜面の変化にどういった特徴がみられるのかを分析することが可能である．

(4) 計算方法

本研究では，(3)で定式化された問題を繰り返し解くことで，年度ごとの最適対策箇所を決定していくこととする．対策年度1年目について，対策を行うべき全斜面を検討対象として計算を行う．得られた結果から，対策年度1年目に対策する斜面を全斜面の中から取り除き，残った斜面で同様な計算を2年目，3年目と続けて解いていき，この計算を全ての斜面に対策が行われるまで繰り返し行う．また，求解にあたり，Matlabを用い，整数計画問題を解く高速アルゴリズムであるGurobi³⁾をMatlabから呼び出すことにした．後述するケーススタディにおいては，1,595カ所の斜面を対策候補地点として計算を行った場合でも，全斜面に対する最適対策の計算は約1分程度で行うことができる．

3. 仮想データを用いた挙動確認

提案したモデルの挙動を確認するために，斜面数20の仮想地域を想定し，モデルを適用した．ここで設定した斜面の災害発生確率および災害発生時の損失額は表-1の

とおりである．対策費用は全斜面一律500万円とし，1000万円を予算制約とした．ここでは，損失額の期待値のみによる最適化 ($\alpha=0.0$) と損失額の分散のみによる最適化 ($\alpha=1.0$) の計算過程を示し，その違いを考察する．図-1に各ケースにおける対策年度と対策箇所の関係を，図-2にそれぞれのケースにおける期待値および分散の残存率を示す．なお，このケースでは，10年分の計算を行うことですべての斜面の対策を終え，損失額の期待値および分散はゼロとなる．表-2より，損失額の期待値のみによる評価と分散のみを考慮した場合では，各年度ごとに対策斜面に違いがあることがわかる．具体的には，期待値のみを考慮する場合には，災害発生確率と損失額の積が大きな斜面10，11を初年度に，その後もこの順位に従って対策を講じている．一方で，分散のみを考慮した場合には，対策斜面のIDが大きい，すなわち損失額が比較的大きな斜面を優先する傾向にある．また，図-2より，年を追うごとの期待値および分散の残存率も異なる．期待値のみを考慮する場合（図中青線）には，1年目で15%の期待値が減少するが，分散は10%強しか減少しない．一方で，分散のみを考慮する場合（図中緑線）には，1年目に分散が20%程度減少されるが，期待値は10%程度である．このように， α の設定によって，リターン尺度あるいはリスク尺度の重み付けが可能となっており，その結果として異なる対策戦略が策定できることがわかる．

表-1 モデルケースでの災害発生確率と損失額

ID	p_i	d_i	$p \times d$	ID	p_i	d_i	$p \times d$
1	0.95	100	95	11	0.45	4100	1845
2	0.9	500	450	12	0.4	4500	1800
3	0.85	900	765	13	0.35	4900	1715
4	0.8	1300	1040	14	0.3	5300	1590
5	0.75	1700	1275	15	0.25	5700	1425
6	0.7	2100	1470	16	0.2	6100	1220
7	0.65	2500	1625	17	0.15	6500	975
8	0.6	2900	1740	18	0.1	6900	690
9	0.55	3300	1815	19	0.05	7300	365
10	0.5	3700	1850	20	0.025	7700	192.5

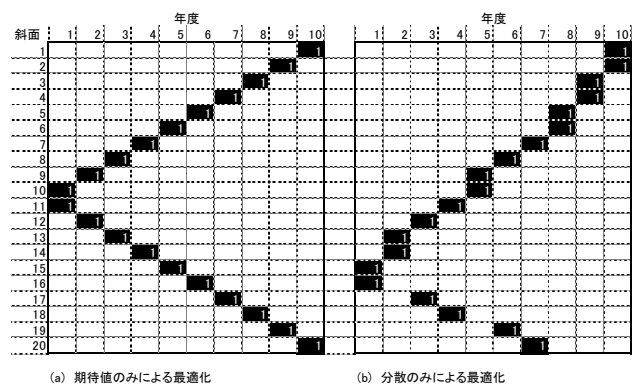


図-1 モデルケースでの年ごとの対策箇所

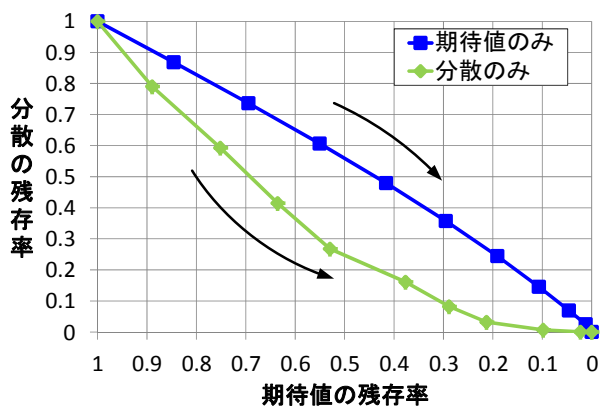


図-2 目的関数の違いによる計算過程の差

4. 岐阜県飛騨圏域における落石災害対策の評価と年次計画の策定

(1) 対象地域の概要

提案したモデルを、岐阜県飛騨圏域における斜面に適用した。岐阜県飛騨圏域には山間地域が多く、落石の危険がある斜面が1,595箇所と非常に多い。このような現状の中、落石災害対策を早急に行う必要があるが、国や他の自治体と同様に、岐阜県でも公共事業費の削減や県職員の削減などの影響により、全ての斜面に対して同時進行的に落石災害対策を講じることは困難な状況にあることから合理的な落石対策が求められている。

岐阜大学では、文部科学省特別教育研究経費として、「リスクに基づくアセット総合マネジメントによる社会基盤の戦略的整備意思決定に関する研究（以下RM研究プロジェクト）」を平成21年度より3年間の予定で実施している。この研究では、斜面災害を対象とし、対策便益を斜面災害発生リスク、すなわち期待損失額の軽減分として費用対効果から斜面对策の優先度を定めることを提案している。本研究は、この研究の一部として遂行しているが、検討に用いる各斜面の災害発生確率および損失額については、RM研究プロジェクトの成果として公表されている、本城ら⁴⁾および小坂ら⁵⁾の成果を活用することとした。

(2) 各斜面の優先順位の考察

式(10)の目的関数は、斜面对策実施の有無を表現する x_i で分離することが可能であるため、その目的関数に対する係数が大きければより対策優先度の高い斜面であると考えることができる。そのため、まずは各斜面に関する目的関数の係数を元に、パラメータ α の値ごとに斜面对策の優先順位を求めた。パラメータ α を変化させることで、損失額の期待値と分散の2つの評価尺度の比重を変えた場合の評価を行うことができる。 $\alpha = 0.0$ ならば損失額の期待値のみの評価、 $\alpha = 1.0$ ならば損失額の分

散のみの評価となる。図-3に、重みごとの対策優先順位の上位20斜面に関して、対策の優先順位の変化に同じような特徴を持つ斜面がいくつか存在した。それらの斜面をグループ分けしたものを示す。分析の結果より損失額の期待値で評価を行った場合と損失額の分散で評価を行った場合では、対策の優先順位が異なることがわかる。また、パラメータ α によって対策の優先順位が変化していくこともわかる。このことより、社会経済的損失の期待値と分散を考慮した評価によって、対策を行う斜面の優先順位が変化するといえる。次に、グループ分けされた斜面を、縦軸に落石の発生確率、横軸に落石によって生じる社会経済的損失（万円）を取ったグラフを図-4に示す。

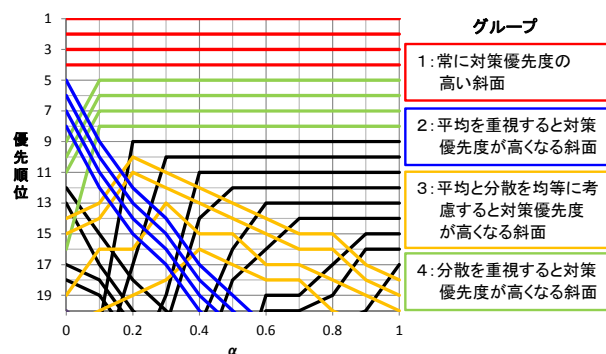


図-3 各斜面の対策優先順位の変移

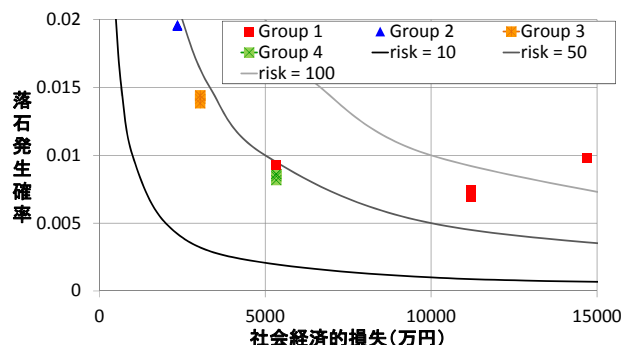


図-4 各グループの特性比較

グループ1の斜面を見てみると、グラフの右側に点がプロットされている。つまり、損失額が、他の斜面と比較して大きい。よって、社会経済的損失を計算過程に含む期待値・分散どちらの評価の場合でもこれらの斜面が常に上位となる。グループ2の斜面は、グラフの上側に点が位置しており、落石の発生確率が高いという共通点がある。グループ2の斜面は、分散を考慮していくに従い対策優先順位が低くなっていく。グループ4の斜面に関しては、確率の値はそれほど大きくはないが、社会経済的損失の値が全斜面の中でも5位以内に入るような斜面であり、グループ2の斜面とは逆の性質を示している。グループ3の斜面に関して、グループ2とグループ4の斜面のちょうど中間のような性質をもった斜面であると

いえる。グループ 2~4 に着目してみると、これらのグループは同じようなリスク線上（損失額の期待値が同じ線を結んだもの）にプロットされていることがわかる。つまり、グループ 2~4 の斜面は同じような損失額の期待値をとるといえる。このような場合、分散を考慮していくことで損失額の大きい斜面が選択される傾向にある。

(3) 最適化計算結果の分析

制約条件とパラメータの値を与え、各年度における対策箇所最適化を全斜面の対策が終了するまで行った。制約条件として与える年間の落石対策予算は、平成21年度の岐阜県の落石対策予算（1,769百万円）とする。各パラメータ α ごとに、本研究で提案した最適化モデルを用いて計算し、対策年度ごとに期待値の残存率と分散の残存率を求めた。その結果得られた計算過程を図-5に示す。損失額の期待値（ $\alpha=0.0$ ）のみによる最適化と損失額の分散（ $\alpha=1.0$ ）のみによる最適化では計算結果に違いが生じる。これは、モデル地域で試算を行った結果と同じように各ケースにおいて選択される斜面が異なることから、計算過程が評価尺度によって異なることを示している。しかし、モデル地域における計算結果ほど実データに基づく最適化では各尺度による差はみられなかった。本研究では、方法論構築のための検討を主たる目的としているため、この原因については深く追求せず、今後の課題に位置づけるが、その理由としては、実データにおける斜面ごとの落石発生確率の値や対策費用に大きな違いがないためであることなどが考えられる。

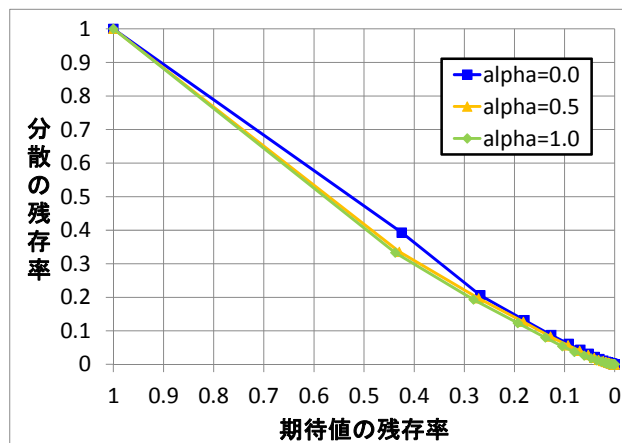


図-5 実際の斜面データを用いた場合の計算過程の変化

(4) 効率性の検討

本研究で提案した落石災害対策箇所に関する最適化モデルより社会経済的損失の分散を考慮することでその影響がどのようなものであるかを述べた。ここでは、効率性の観点からも提案した最適化モデルについて検討し、どの程度の効率性を有しているのかを示す。図-6 に落石災害対策への投資費用と未対策斜面における損失額の

期待値の総和の関係を表したグラフを示す。北浦ら⁶⁾より、リスクの大きい順（リスク最良順）で対策を行う場合よりも、費用対便益（B/C）による評価の方が対策に関する効率が良いことが示されている。その結果を示すのが期待値の大きい順の線（水色）と費用対効果の線（赤色）である。また、損失額の期待値のみ（ $\alpha=0$ ）で最適化を行った場合と損失額の分散のみ（ $\alpha=1$ ）で最適化を行った場合に対策に選択される斜面の損失額の期待値を、リスク・B/Cと同様に図中に示す。本研究で構築した最適化モデルによる評価と費用対便益（B/C）による評価の効率性に大きな差はなく、 $\alpha=0$ とした場合の期待値のみの評価でも、 $\alpha=1$ とした場合の分散のみの評価でも十分な効率性が得られるといえる。本研究で構築したモデルは、損失額の期待値と分散の重み付き和として定義しているため、図-6に示すとすれば、期待値飲みの評価で最適化（青線）と分散のみの評価で最適化の線（緑線）の間に示される。よって、本研究で構築したモデルは、効率性の観点からみても十分な評価が可能と考えられる。

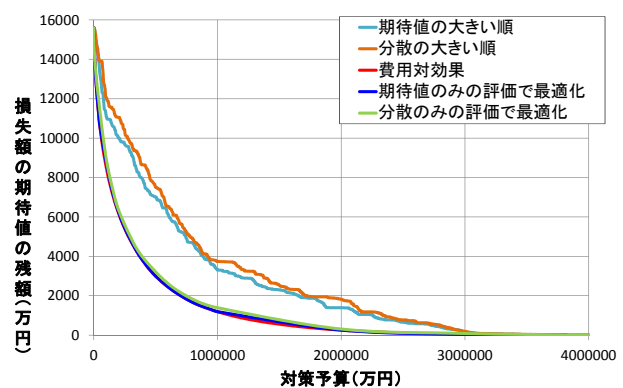


図-6 投資費用に対する便益の関係

5. おわりに

本研究では、落石災害対策の対策計画策定を行うための指標を作成すること目的として、ポートフォリオ理論に基づいて落石災害対策箇所決定に関する最適化モデルを二値整数線形計画問題として提案した。また、その最適化問題を解くツールとして、MatlabとGurobiを活用することで計算時間を大幅に短縮することができた。提案した最適化モデルを斜面数20の仮想地域と岐阜県飛騨圏域に適用し、考察を加えた。その結果、モデル地域における計算より、損失額の期待値とその分散の重みによって対策優先順位が異なること、分散を考慮するとより被害額が大きな斜面の優先度が高まる傾向にあることが明らかとなった。また、岐阜県飛騨圏域への適用結果より、1,500力所程度であれば十分実用的なスピードで解を求めることが可能であること、分散を考慮しても十分

効率的な維持管理戦略となることが確認された。

今後の課題としては、適用範囲の拡大や他の評価指標との組み合わせの検討、経年変化の考慮、複数の斜面が同時に破壊した場合を考慮した評価方法の検討などがあげられる。

謝辞

本研究は、文部科学省特別教育研究経費「リスクに基づくアセット総合マネジメントによる社会基盤の戦略的整備意思決定に関する研究（平成21～23年）」研究代表者：本城勇介岐阜大学教授」および平成22年度科学研究費補助金（基盤研究(B)，課題番号：21360243，研究課題名：社会的費用を考慮した社会資本アセットマネジメントに基づく地域リスクガバナンス，研究代表者：高木朗義）の成果の一部である。ここに、RM研究プロジェクト研究会にて貴重な意見をいただいた関係者の方々に感謝申し上げたい。

参考文献

- 1) 仁科一彦，倉沢資成：『ポートフォリオ理論 - 基礎と応用』，中央経済社，2009。
- 2) Harry Markowitz：Portfolio Selection, Reprinted for private circulate from The Journal Of Finance, Vol. VII, No.1, 1952.
- 3) Gurobi Optimization ホームページ (<http://www.gurobi.com/>) 2011/4/26 アクセス。
- 4) 本城勇介，町田裕樹，森口周二，原隆史，沢田和秀，八嶋厚：岐阜県飛騨圏域を対象とした道路斜面危険度評価，土木学会論文集（登載決定）。
- 5) 小坂宏彰，高木朗義，倉内文孝，北浦康嗣：道路途絶による社会経済損失を考慮した斜面災害リスク評価モデル，土木計画学研究・講演集，Vol.41，CD-ROM，2010。
- 6) 北浦康嗣，八嶋厚，本城勇介，高木朗義，倉内文孝：リスク評価に基づくアセットマネジメントによる社会基盤の戦略的整備意思決定に関する研究，土木計画学研究・講演集，Vol.41，CD-ROM，2010。