

階層的隠れマルコフ劣化モデルを用いた舗装構造の劣化予測

起塚亮輔¹・小林潔司²・貝戸清之³・大井明⁴

¹学生会員 大阪大学大学院工学研究科地球総合工学専攻 (〒565-0871 吹田市山田丘 2-1)
E-mail: okizuka@civil.eng.osaka-u.ac.jp

²フェロー会員 京都大学経営管理大学院経営管理講座 (〒606-8501 京都市左京区吉田本町)
E-mail: kkoba@psa.mbox.media.kyoto-u.ac.jp

³正会員 大阪大学大学院工学研究科地球総合工学専攻 (〒565-0871 吹田市山田丘 2-1)
E-mail: kaito@ga.eng.osaka-u.ac.jp

⁴正会員 株式会社高速道路総合技術研究所 (〒194-8508 町田市忠生 1-4-1)
E-mail: a.oi.aa@ri-nexco.co.jp

舗装の劣化過程は路面の劣化過程と舗装全体の耐荷力の低下過程で構成される複合的過程である。耐荷力の低下は路面の劣化速度に影響を及ぼす。路面性状調査により路面の健全度を観測できる。一方、耐荷力の低下はFWD調査等により部分的に観測可能である。本研究では、このような特性を有する路面の劣化過程を、舗装耐荷力の状態に依存する混合マルコフ過程として記述する。その上で、路面の劣化過程と舗装耐荷力の低下過程により表現できる複合的な劣化過程を階層的隠れマルコフ劣化モデルとして表現する。さらに、具体的にNEXCOが運営する高速道路を対象とした適用事例を通じて、階層的隠れマルコフ劣化モデルを実際に推計するとともに、実務への適用可能性と有効性について実証的に検証する。

Key Words : pavement management, hierarchical hidden Markov model, Bayesian estimation

1. はじめに

舗装の劣化過程は、路面の劣化と耐荷力の低下という劣化メカニズムが異なる複合的な劣化現象である。路面の健全度は、道路利用者に対するサービス水準に直接影響を及ぼす。このため、路面の健全度が低下すれば、舗装のサービス水準を回復するために、オーバーレイ等、路面の維持補修が実施される。一方で、舗装構造全体(表層、基層、路盤、路床)も、繰り返し荷重等により耐荷力が低下する。耐荷力の低下により、路面の劣化速度が大きくなる場合、路面補修だけでなく舗装全体を補修することが必要となる。

路面性状調査等により、路面の健全度を測定することができる。一方、舗装耐荷力に関しても、たとえばFWD調査等により、構造的劣化状態に関する情報を獲得できる。しかし、FWD調査を実施するためには莫大な調査費用と交通規制等の社会的費用を要するために、道路管理者がすべての道路区間に対してFWD調査を実施することは現実的ではない。舗装の耐荷力が低下すれば、路面の劣化速度に影響を及ぼす。このため、路面性状調査の結果から、路面の劣化速度を評価し、舗装構造の耐荷力低下に関する重点管理区間を選定する。重点管理区間が抽出できれば、FWD調査等による舗装構造の診断を効率的に実施することが可能となる。

本研究では、舗装の劣化過程を路面の劣化と舗装耐荷力の低下に起因する複合的過程として位置づける。舗装耐荷力の低下は路面の劣化速度に影響を及ぼすという階層的関係が存在する。また、路面性状調査により路面の健全度は観測できるが、舗装の耐荷力は観測できない。このような舗装の劣化特性に考慮して、本研究では、路面の劣化過程を舗装の耐荷力の低下状態に依存する混合マルコフ過程として記述する。その上で、舗装全体の複合的な劣化過程を階層的隠れマルコフ劣化モデルとして表現する。以上の問題意識の下に、本研究では、舗装の複合的な劣化過程を階層的隠れマルコフ劣化モデルを用いて表現する。さらに、MCMC (Markov Chain Monte Carlo) 法を用いて、モデルのパラメータを推計する方法を提案する。以下、2. で階層的隠れマルコフ劣化モデルを定式化し、3. で、モデルの推計方法を提案する。

2. 階層的隠れマルコフ劣化モデルの定式化

(1) 前提条件

道路管理者がカレンダー時刻 a_0 に道路施設を建設(もしくは更新)し、それ以降の時刻にわたって道路舗装を管理する問題を考える。カレンダー時刻 a_0 を初期時点 $t = 0$ とする離散時間軸 $t = 0, 1, 2, \dots, \infty$ を導入する。

離散時間軸上の点を時点とよびカレンダー時刻と区別する．対象とする劣化過程は，路面健全度，耐荷力の劣化過程という 2 階層の複合的劣化システムで構成されていると考える．簡単のために，初期時点から舗装全体の補修は一度も実施されていないと考える．舗装全体の補修が実施されれば，そのカレンダー時刻を初期時点と考えればよい．離散時間軸上の時点 $t_1, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots$ において路面の補修が実施される．さらに，路面の補修が実施された時点 t_k を始点 $u_k = 0$ とする局所離散時間軸 $u_k = 0, 1, 2, \dots, T_k$ を導入する．ただし， T_k は時点 t_k で路面を補修し，次の補修時点に到達するまでの期間長であり $T_k = t_{k+1} - t_k$ で表される．局所離散時間軸上の時点 u_k を局所時点と呼ぶ．各離散時点における舗装構造の耐荷力を離散的状態変数 $g(t)$ ($t = 0, \dots, \infty$) を用いて表現する．ただし，離散的状態変数はレーティング $g(t) = s$ ($s = 1, \dots, S$) を用いて記述される．レーティング s ($s = 1, \dots, S$) は， s の値が大きくなるほど舗装構造の耐荷力が低下していることを意味している． $g(t) = S$ の場合は，耐荷力が使用限界に到達していることを意味する．初期時点 $t = 0$ において $g(0) = 1$ である．つぎに，路面の健全度を I 個のレーティング $h(u_k) = i$ ($i = 1 \dots I; u_k = 0, \dots, T_k$) で記述する．ただし，局所時点 $u_k = 0$ において $h(0) = 1$ が成立する． $h(u_k) = I$ は，路面の使用限界を表す．

本研究では，舗装システムを路面，舗装構造という 2 階層モデルで表現する．路面の劣化過程，舗装構造の耐荷力の低下過程をともにマルコフ劣化過程で表現する．舗装構造の耐荷力の低下過程は，過去の劣化過程に依存せず，斉次マルコフ過程で表現できると考える．しかし，路面の劣化過程は，舗装構造の耐荷力に依存する．このため，路面の劣化過程は，劣化速度が舗装構造の耐荷力に依存するような非斉次マルコフ劣化モデルを用いて表現される．

(2) 耐荷力の低下過程

道路舗装を建設・更新した初期時点 a_0 を起点とする離散時間軸 $t = 0, 1, \dots$ を考える．舗装構造の耐荷力を S 個のレーティング指標 s ($s = 1, \dots, S$) で表現する． s の値が大きくなるほど，耐荷力が低下した状況を表す．離散時間軸上の期間 $[t, t+1]$ における耐荷力の低下過程を表すマルコフ推移確率は，時点 t で評価された耐荷力 $g(t) = s$ を与件とし，次の $t+1$ 期において耐荷力 $g(t+1) = l$ が生起する条件付確率

$$\text{Prob}[g(t+1) = l | g(t) = s] = p^{sl} \quad (1)$$

として定義できる．期間長を 1 に基準化する．マルコフ推移確率は，津田等¹⁾が開発したマルコフ劣化ハザードモデルを用いて表現できる．そのために，時点 t における耐荷力 s ($s = 1, \dots, S-1$) のハザード率 (以下，

耐荷力ハザード率と呼ぶ) を

$$\lambda^s = x\beta^s \quad (2)$$

と表す．ただし， $x = (x_1, \dots, x_Q)$ は，説明変数ベクトルである． $\beta^s = (\beta_1^s, \dots, \beta_Q^s)'$ は未知パラメータベクトルである．記号 $'$ は転置を， Q は説明変数の数を表す．耐荷力ハザード率 λ^s は，期間 $[t, t+1]$ に対して定義されている．このとき，時点 t において耐荷力 s の状態から，時点 $t+1$ においても耐荷力 s が継続する確率は，

$$\begin{aligned} p^{ss} &= \text{Prob}[g(t+1) = s | g(t) = s] \\ &= \exp(-\lambda^s) \end{aligned} \quad (3)$$

となる．さらに，時点 t と時点 $t+1$ の間で耐荷力が s から l ($l > s$) に推移するマルコフ推移確率 p^{sl} ($s = 1, \dots, S-1; l = s, \dots, S$) は，

$$\begin{aligned} p^{sl} &= \text{Prob}[g(t+1) = l | g(t) = s] \\ &= \sum_{m=s}^l \prod_{z=s}^{m-1} \frac{\lambda^z}{\lambda^z - \lambda^m} \prod_{z=m}^{l-1} \frac{\lambda^z}{\lambda^{z+1} - \lambda^m} \exp(-\lambda^m) \\ &\quad (s = 1, \dots, S-1; l = s+1, \dots, S) \end{aligned} \quad (4)$$

と表すことができる¹⁾．ただし，表記上の規則として，

$$\begin{cases} \prod_{z=s}^{m-1} \frac{\lambda^z}{\lambda^z - \lambda^m} = 1 & (m = s \text{ の時}) \\ \prod_{z=m}^{l-1} \frac{\lambda^z}{\lambda^{z+1} - \lambda^m} = 1 & (m = l \text{ の時}) \end{cases}$$

が成立すると考える．さらに，表記の便宜上，

$$\begin{aligned} &\prod_{z=s, z \neq m}^{l-1} \frac{\lambda^z}{\lambda^z - \lambda^m} \exp(-\lambda^m) \\ &= \prod_{z=s}^{m-1} \frac{\lambda^z}{\lambda^z - \lambda^m} \prod_{z=m}^{l-1} \frac{\lambda^z}{\lambda^{z+1} - \lambda^m} \exp(-\lambda^m) \end{aligned}$$

と簡略化する．

(3) 路面の劣化過程

いま，時点 t_k ($u_k = 0$) に路面の補修が実施され，路面の健全度が $h(0) = 1$ に改善する．局所時点 u_k から $u_k + 1$ の間において生起する路面の劣化状態の推移状態を，マルコフ推移確率で表す．単位期間 $[u_k, u_k + 1]$ の期間長も 1 に基準化する．局所時点 u_k における耐荷力 s は観察可能ではないが，ひとまず既知であると考える．局所期間 $[u_k, u_k + 1]$ (離散時間軸上の期間 $[t_k + u_k, t_k + u_k + 1]$) における路面の劣化過程を表すマルコフ推移確率は，局所時点 u_k (時点 $t_k + u_k$) で評価された耐荷力 $g(t_k + u_k) = s$ と路面の健全度 $h(u_k) = i$ を与件とし，次の局所時点 $u_k + 1$ において健全度 $h(u_k + 1) = j$ が生起する条件付確率

$$\begin{aligned} &\text{Prob}[h(u_k + 1) = j | h(u_k) = i, g(t_k + u_k) = s] \\ &= \pi^{ij}(s) \end{aligned} \quad (5)$$

として定義できる．耐荷力 s を与件とした健全度 i ($i = 1, \dots, I-1$) の路面健全度ハザード率 $\mu^i(s)$ を

$$\mu^i(s) = \gamma_0^s y \gamma^i = \gamma_0^s \mu^i \quad (6)$$

と表す．ただし， γ_0^s ($s = 1, \dots, S-1$) は耐荷力 s に依存する路面劣化速度の異質性を表すスケールパラメータ， $y = (y^1, \dots, y^V)$ は説明変数ベクトル， $\gamma^i = (\gamma_1^i, \dots, \gamma_V^i)'$ は未知パラメータベクトル， $\mu^i = y\gamma^i$ である． $\gamma_0^1 = 1$ に基準化する．このとき，耐荷力 s の下で局所時点 u_k において健全度が i であり，局所時点 $u_k + 1$ においても健全度 i が継続する確率は，

$$\begin{aligned}\pi^{ii}(s) &= \text{Prob}[h(u_k + 1) = i | h(u_k) = i, g(t_k + u_k) = s] \\ &= \exp\{-\mu^i(s)\} \\ &= \exp(-\gamma_0^s \mu^i)\end{aligned}\quad (7)$$

となる．さらに，局所時点 u_k と局所時点 $u_k + 1$ の間で健全度が i から j ($j > i$) に推移するマルコフ推移確率 $\pi^{ij}(s)$ ($i = 1, \dots, I-1; j = i, \dots, I$) は，

$$\begin{aligned}\pi^{ij}(s) &= \text{Prob}[h(u_k + 1) = j | h(u_k) = i, g(t_k + u_k) = s] \\ &= \sum_{z=i}^j \prod_{r=i, \neq z}^{j-1} \frac{\mu^r(s)}{\mu^r(s) - \mu^z(s)} \exp\{-\mu^z(s)\} \\ &\quad (i = 1, \dots, I-1; j = i+1, \dots, I)\end{aligned}\quad (8)$$

と表すことができる．また， $\pi^{iI}(s)$ に関しては，マルコフ推移確率の条件より次式で表せる．

$$\begin{aligned}\pi^{iI}(s) &= 1 - \sum_{j=i}^{I-1} \pi^{ij}(s) \\ &\quad (s = 1, \dots, S-1)\end{aligned}\quad (9)$$

以上の推移確率を用いれば，局所期間 $[u_k, u_k + 1]$ で定義される条件付確率 (5) を要素とするマルコフ推移行列を次式のように定義することができる．

$$\Pi(s) = \begin{pmatrix} \pi^{11}(s) & \cdots & \pi^{1I}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \pi^{II}(s) \end{pmatrix}\quad (10)$$

(4) 舗装構造の劣化過程

いま，初期時点 $t = 0$ において，舗装全体が更新され，耐荷力が $g(0) = 1$ に，健全度が $h(0) = 1$ に確定したと考える．その後，時間の経過とともに，路面と舗装構造ともに劣化が進行していく．初期時点以降，舗装は更新されないが，路面に関しては，離散時間軸上の時点 t_k ($k = 1, 2, \dots$) で補修が実施されると考える．舗装耐荷力の低下過程は観測不可能であるが，マルコフ推移確率 (??) を用いれば，時点 t における舗装耐荷力分布 $\nu(t) = \{\nu_1(t), \dots, \nu_S(t)\}$ は

$$\nu(t) = \nu(0)P(t)\quad (11)$$

と表される．ただし， $\nu(0) = (1, 0, \dots, 0)$ は，初期時点における耐荷力分布である．

つぎに，時点 t_k に直近の路面補修が実施され， u_k 期が経過した時点 $t_k + u_k$ に着目する．時点 $t_k + u_k$ における舗装構造の耐荷力は観測できないが，耐荷力分布

$\nu(t_k + u_k)$ に従って分布していると考える．時点 $t_k + u_k$ から時点 $t_k + u_k + 1$ における路面の推移確率を混合マルコフ推移確率

$$\tilde{\pi}^{ij}(t) = \sum_{s=1}^S \nu_s(t) \pi^{ij}(s)\quad (12)$$

で表現する．式 (12) は複数の舗装構造の耐荷力に対する路面の推移確率を加重平均した推移確率を表しており，混合分布モデル (mixture distribution model)²⁾ と呼ばれる．当然のことながら， $\sum_{j=1}^I \tilde{\pi}^{ij}(t_k + u_k) = \sum_{s=1}^I \nu_s(t_k + u_k) \sum_{j=1}^I \pi^{ij}(s) = 1$ を満足するため $\tilde{\pi}^{ij}(t_k + u_k)$ は推移確率の条件を満足する．ここで， $\tilde{\pi}^{ij}(t_k + u_k)$ を (i, j) 要素とする推移確率行列 $\tilde{\pi}(t_k + u_k)$ を定義する．舗装構造の耐荷力分布 $\nu(t_k + u_k)$ が時間とともに変化するため路面の推移確率行列 $\tilde{\pi}(t_k + u_k)$ は時間に依存する．すなわち，舗装耐荷力の低下過程が斉次マルコフ連鎖で表現できる場合でも，路面の劣化過程は非斉次マルコフ連鎖に従うことになる．離散時間軸の局所時点 u_k における路面の健全度分布を $\rho(u_k) = \{\rho_1(u_k), \dots, \rho_I(u_k)\}$ と表す．また，局所離散時間軸の初期時点 $u_k = 0$ における健全度分布は $\rho(0) = \{1, 0, \dots, 0\}$ と表せる．したがって，時点 $t = t_k + u_k$ における路面の健全度分布は

$$\rho(u_k) = \rho(0) \prod_{v=0}^{u_k-1} \tilde{\pi}(t_k + v)\quad (13)$$

と表される．したがって，舗装の劣化過程は，任意の $t = t_k + u_k$ に対して

$$\nu(t) = \nu(0)P(t)\quad (14a)$$

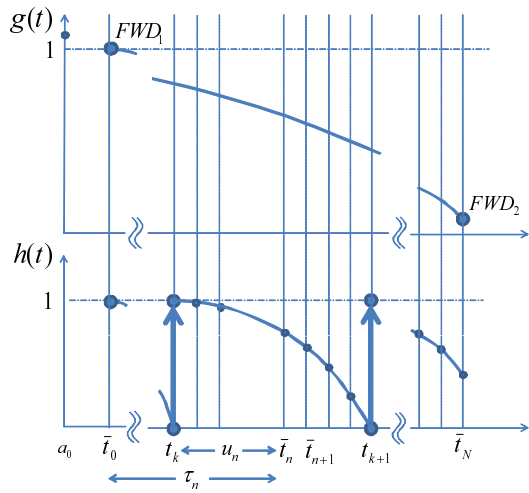
$$\rho(u_k) = \rho(0) \prod_{v=0}^{u_k-1} \tilde{\pi}(t_k + v)\quad (14b)$$

と表される．このように，舗装の劣化過程は斉次マルコフ連鎖モデル (14a) と非斉次マルコフ連鎖モデル (14b) を用いて表現できる．さらに，舗装構造のマルコフ連鎖モデル (14a) は直接的に観測不可能であり，舗装構造の耐荷力分布が路面の劣化過程 (14b) に影響を及ぼすという階層構造を有している．本研究では，このような特性を有するマルコフ連鎖モデルを階層的隠れマルコフ劣化モデルと呼ぶこととする．

3. モデルの推計方法

(1) 調査スキーム

いま，ある道路区間におけるデータ調査スキームを考える．図-1 に示すように離散時間軸上のある時点 $t = \bar{t}_0$ において FWD 調査が実施され耐荷力 $g(\bar{t}_0) = s$ と路面健全度 $h(\bar{t}_0) = i$ が観測されたと考える．時点 $\bar{t}_0$ が初期時点 $t = 0$ に一致する場合， $s = 1, i = 1$ と表記されることになる．時点 $\bar{t}_0$ から時間の経過に伴って耐



注) 図の上段は、耐荷力の低下過程、下段は路面健全度の低下過程を表す。●印は調査時点を表す。時点 $\bar{t}_0$ で FWD 調査が実施され、時点 $\bar{t}_N$ で次回の FWD 調査が実施される。時点 $\bar{t}_k$ で路面補修が実施され、期間 $[t_k, t_{k+1}]$ 中、時点 $\bar{t}_k, \dots, \bar{t}_n, \dots, t_{k+1}$ において路面性状調査が実施される。

図-1 調査スキーム

荷力が低下していく。図-1 に示すように離散時間上の時点 $\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_N$ に路面性状調査が実施され路面健全度 $h(\bar{t}_n)$ ($n = 0, \dots, N$) を観測する。さらに、最終時点 $\bar{t}_N$ に次回の FWD 調査が実施される。路面を補修した時点 t_k ($k = 1, \dots, t_K$) も路面性状調査が実施された時点に含まれ、路面の健全度 $h(t_k) = 1$ が観測されと考える。各調査時点 $\bar{t}_n$ ($n = 1, \dots, N$) において、前回の FWD 調査を実施した時点 $\bar{t}_0$ からの経過時間 τ_n 、直近の補修時点 $\bar{t}_k$ からの経過時間 $u_n = \bar{t}_n - \bar{t}_k$ 、観測された健全度 $h(\bar{t}_n) = \bar{m}_n$ に関する情報の組 $\bar{\xi}_n = (\tau_n, u_n, \bar{m}_n)$ に関する情報を獲得することができる。

(2) 混合分布モデル

初期時点 $\bar{t}_0$ 、最終時点 $\bar{t}_N$ とする期間 $[\bar{t}_0, \bar{t}_N]$ に着目する。期間長を $\bar{\tau} = \bar{t}_N - \bar{t}_0$ と表す。初期時点 $t = \bar{t}_0$ において、路面性状調査と FWD 調査が実施され、路面の健全度 $h(\bar{t}_0) = \bar{m}_0$ と舗装の耐荷力 $g(\bar{t}_0) = \bar{s}_0$ が観測されたとする。また、最終時点 $t = \bar{t}_N$ において路面の健全度 $h(\bar{t}_N) = \bar{m}_N$ と舗装の耐荷力 $g(\bar{t}_N) = \bar{s}_N$ が観測されたとする。この時、1) 階層的隠れマルコフ劣化モデル (14a) において、路面の健全度 $h(\bar{t}_n) = \bar{m}_n$ ($n = 0, \dots, N$) と 2) 時点 $\bar{t}_0$ と $\bar{t}_N$ における耐荷力 $g(\bar{t}_0) = \bar{s}_0$ と $g(\bar{t}_N) = \bar{s}_N$ が既知である。さらに、3) モデル (14b) において、任意の時点 $\bar{t}_n$ ($n = 1, \dots, N-1$) における耐荷力が少なくとも最終時点における最終耐荷力 $\bar{s}_N$ を下回らない、という情報が獲得できる。すなわち、時点 $\bar{t}_n$ ($n = 1, \dots, N-1$) の耐荷力を s_n とすれば、

$$\bar{s}_0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_{N-1} \leq \bar{s}_N \quad (15)$$

が成立する。このことより、時点 $\bar{t}_n$ において耐荷力が s となる確率 $\tilde{\nu}_s(\bar{t}_n : \bar{s}_0, \bar{s}_N)$ は、1) 初期時点 $\bar{t}_0$ において耐荷力 $\bar{s}_0$ であり、時点 $\bar{t}_N$ において $\bar{s}_N$ となる事象の中で、2) 初期時点 $\bar{t}_0$ において耐荷力 $\bar{s}_0$ であり、時点 $\bar{t}_n$ で耐荷力 s となり、かつ時点 $\bar{t}_N$ において $\bar{s}_N$ となる事象が生起する条件付き確率

$$\tilde{\nu}_s(\bar{t}_n : \bar{s}_0, \bar{s}_N) = \frac{p^{\bar{s}_0, s}(\bar{\tau}_n) p^{s, \bar{s}_N}(\bar{\tau} - \bar{\tau}_n)}{p^{\bar{s}_0, \bar{s}_N}(\bar{\tau})} \quad (16)$$

を用いて表すことができる。ただし、 $\bar{\tau}_n = \bar{t}_n - \bar{t}_0$ 、 $\bar{\tau} = \bar{t}_N - \bar{t}_0$ 、 $p^{s, l}(u)$ は u 期間において耐荷力が s から l に推移する推移確率を表しており、式 (??) により定義される。ここで、期間 $[\bar{t}_0, \bar{t}_N]$ の中に含まれる隣接する 2 つの任意の路面性状調査時点 $\bar{t}_n, \bar{t}_{n+1}$ に着目する。期間 $[\bar{t}_n, \bar{t}_{n+1}]$ の期間長を $z_n = \bar{t}_{n+1} - \bar{t}_n$ と表す。データ調査スキームの構造より、隣接する 2 点の間には補修作業は実施されていない。期間 $[\bar{t}_n, \bar{t}_{n+1}]$ に含まれる隣接する 2 つの時点 $\bar{t}_n + v, \bar{t}_n + v + 1$ の間に健全度が $h(\bar{t}_n + v) = h$ から $h(\bar{t}_n + v + 1) = w$ に推移する確率は混合マルコフ推移確率 (12) を用いて

$$\tilde{\pi}^{h, w}(\bar{t}_n + v) = \sum_{s=\bar{s}_0}^{\bar{s}_N} \tilde{\nu}_s(\bar{t}_n + v : \bar{s}_0, \bar{s}_N) \pi^{h, w}(s) \quad (17)$$

と表せる。ここで、調査時点 $\bar{t}_n$ に健全度 $h(\bar{t}_n) = \bar{m}_n$ が観測され、時点 $\bar{t}_{n+1}$ に健全度 $h(\bar{t}_{n+1}) = \bar{m}_{n+1}$ が観測される条件付き確率 (尤度) を、再帰的に

$$\mathcal{L}(\bar{m}_n, \bar{m}_{n+1}) = \sum_{w=\bar{m}_n}^{\bar{m}_{n+1}} \tilde{\pi}^{\bar{m}_n, w}(\bar{t}_n) \ell_w(\bar{t}_n + 1) \quad (18a)$$

$$\ell_h(\bar{t}_n + v) = \sum_{w=h}^{\bar{m}_{n+1}} \tilde{\pi}^{h, w}(\bar{t}_n + v) \ell_w(\bar{t}_n + v + 1) \quad (18b)$$

$$\ell_h(\bar{t}_n + z_n - 1) = \tilde{\pi}^{h, \bar{m}_{n+1}}(\bar{t}_n + z_n - 1) \quad (18c)$$

と定義する。また、最終時点 $\bar{t}_N$ において耐荷力が $\bar{s}_N$ となる尤度は、

$$\tilde{\ell}(\bar{t}_N) = p^{\bar{s}_0, \bar{s}_N}(\bar{\tau}) \quad (19)$$

と表現できる。道路管理者が獲得可能な情報集合を $\Xi = \{x, y, \bar{\xi}, \bar{s}\}$ と表す。ただし、 x, y は、ハザードモデル (2), (6) の説明変数ベクトル、 $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_0, \dots, \bar{\xi}_N)$ は路面性状調査結果に関わる情報ベクトル、 $\bar{s} = (\bar{s}_0, \bar{s}_N)$ は FWD 調査結果ベクトルである。この時、情報集合 Ξ が観測される尤度は次式で定義される。

$$\mathcal{L}(\Xi : \theta) = \prod_{n=0}^{N-1} \mathcal{L}(\bar{m}_n, \bar{m}_{n+1}) \cdot p^{\bar{s}_0, \bar{s}_N}(\bar{\tau}) \quad (20)$$

ただし、 $\theta = \{\beta^s, \gamma^i : s = 1, \dots, S-1, i = 1, \dots, I-1\}$ は未知パラメータベクトルである。

階層的隠れマルコフ劣化モデルの尤度関数 (18a)-(18c) は、 $\tilde{\pi}^{h, w}(\bar{t}_n + v)$ に関して高次の非線形多項式であり、1 階の最適化条件が非常に多くの零点解を有している。

推移確率 $\hat{\pi}^{hw}(\bar{t}_n + v)$ の推定値は 0 と 1 の間にある実数解を選択しなければならない．最尤法の代わりにベイズ推計法を用いれば，高次の非線形多項式を解く問題を回避できる．しかし，尤度関数 (18a)-(18c) が，極めて多くの項を含んでおり，計算量が膨大になってしまふ欠点がある．このような最尤法の難点を克服するために，尤度関数の完備化操作が必要となる．

(3) 完備化操作

観測期間 $[\bar{t}_0, \bar{t}_N]$ 中の時点 $\bar{t}_n, \bar{t}_{n+1}$ に健全度 $\bar{m}_n, \bar{m}_{n+1}$ が観測された場合を考える．一方，耐荷力 s_n, s_{n+1} は観測されない．階層的隠れマルコフ劣化モデルを推計するために，期間 $[\bar{t}_n, \bar{t}_{n+1}]$ を構成する局所時点 $\bar{t}_n + 1, \dots, \bar{t}_n + z_n - 1$ ($= \bar{t}_{n+1} - 1$) における健全度の推移パターンを潜在変数ベクトル $\tilde{m} = (\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_{z_n-1})$ を用いて表す．ただし， z_n は期間 $[\bar{t}_n, \bar{t}_{n+1}]$ の期間長である．また，舗装構造の耐荷力の推移パターンを潜在変数ベクトル $\tilde{s} = (\tilde{s}_0 (= s_n), \dots, \tilde{s}_{z_n} (= s_{n+1}))$ を用いて表す．劣化過程の性質より，施設が補修されない限り，

$$\bar{m}_n \leq \tilde{m}_1 \leq \dots \leq \tilde{m}_{z_n-1} \leq \bar{m}_{n+1} \quad (21a)$$

$$s_n = \tilde{s}_0 \leq \tilde{s}_1 \leq \dots \leq \tilde{s}_{z_n} = s_{n+1} \quad (21b)$$

を満足する．真の健全度 m ，耐荷力 s は本来観測できない潜在変数であるが，ひとまずこれらの潜在変数が仮に測定できたと考える．そこで，仮想的観測値 $\tilde{m}, \tilde{s}$ に基づいて，ダミー変数

$$\delta_{\tilde{m}_v}^m = \begin{cases} 1 & \tilde{m}_v = m \\ 0 & \tilde{m}_v \neq m \end{cases} \quad (22)$$

$$(v = 1, \dots, z_n - 1; m = \bar{m}_n, \dots, \bar{m}_{n+1})$$

$$\delta_{\tilde{s}_v}^s = \begin{cases} 1 & \tilde{s}_v = s \\ 0 & \tilde{s}_v \neq s \end{cases} \quad (23)$$

$$(v = 1, \dots, z_n - 1; s = \bar{s}_0, \dots, \bar{s}_N)$$

を導入する． $\bar{s}_0, \bar{s}_N$ は，時点 $\bar{t}_0, \bar{t}_N$ における耐荷力であり既知である．潜在変数ベクトル $\tilde{m}, \tilde{s}$ を与件とした尤度関数 (20) は

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{m}, \tilde{s}, \Xi, \theta) \\ &= \sum_{s=\bar{s}_0}^{\bar{s}_N} \sum_{m=\bar{m}_n}^{\bar{m}_{n+1}} \left\{ \tilde{\nu}_s(\bar{t}_n) \right\}^{\delta_{\tilde{s}_0}^s} \left\{ \pi^{\bar{m}_n m}(s) \right\}^{\delta_{\tilde{m}_1}^m} \sum_{v=1}^{z_n-2} \sum_{s=\bar{s}_0}^{\bar{s}_N} \\ & \quad \sum_{i=\bar{m}_n}^{\bar{m}_{n+1}} \sum_{m=i}^{\bar{m}_{n+1}} \left\{ \tilde{\nu}_s(\bar{t}_n + v) \right\}^{\delta_{\tilde{s}_v}^s} \left\{ \pi^{im}(s) \right\}^{\delta_{\tilde{m}_v}^i} \delta_{\tilde{m}_{v+1}}^m \\ & \quad \sum_{s=\bar{s}_0}^{\bar{s}_N} \sum_{i=\bar{m}_n}^{\bar{m}_{n+1}} \left\{ \tilde{\nu}_s(\bar{t}_n + z_n - 1) \right\}^{\delta_{\tilde{s}_{z_n-1}}^s} \\ & \quad \left\{ \pi^{i\bar{m}_{n+1}}(s) \right\}^{\delta_{\tilde{m}_{z_n-1}}^i} p^{\bar{s}_0 \bar{s}_N}(\bar{\tau}) \\ &= \prod_{v=1}^{z_n-1} \tilde{\nu}_{\tilde{s}_v}(\bar{t}_n + v) \pi^{\tilde{m}_v \tilde{m}_{v+1}}(\tilde{s}_v) p^{\bar{s}_0 \bar{s}_N}(\bar{\tau}) \end{aligned} \quad (24)$$

と表現できる．以上の操作を完備化 (completion) と言う．完備化された尤度関数 (24) (以下，完備化尤度関数と呼ぶ) (24) は，通常の尤度関数 (18a)-(18c) より大幅に簡略化されている．ただし，完備化尤度関数 (24) の中に含まれる潜在変数 $\tilde{m}, \tilde{s}$ は，測定できない変数である．そこで，完備化尤度関数を用いて，潜在変数の確率分布を推計することを考える．完備化尤度関数を展開すれば，潜在変数 $\tilde{m}, \tilde{s}$ に関する全条件付事後分布 (full conditional posterior distribution) を導出できる．

耐荷力の低下過程の特性により，補修が実施されない限り，条件 (21b) が成立する．ここで，潜在変数を用いて $\tilde{s}_{-v} = (\tilde{s}_0, \dots, \tilde{s}_{v-1}, \tilde{s}_{v+1}, \dots, \tilde{s}_{z_n}), \tilde{s}_{-v}^s = (\tilde{s}_0, \dots, \tilde{s}_{v-1}, s, \tilde{s}_{v+1}, \dots, \tilde{s}_{z_n})$ とすれば， $s_v = s$ ($s \in \{\tilde{s}_{v-1}, \dots, \tilde{s}_{v+1}\}$) の全条件付事後確率は，

$$\begin{aligned} \text{Prob}\{s_v = s | \tilde{s}_{-v}\} &= \frac{\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{m}, \tilde{s}_{-v}^s, \Xi, \theta)}{\sum_{s=\tilde{s}_{v-1}}^{\tilde{s}_{v+1}} \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{m}, \tilde{s}_{-v}^s, \Xi, \theta)} \\ &= \frac{\omega_s(\tilde{s}_{v-1}, \tilde{s}_{v+1})}{\sum_{s=\tilde{s}_{v-1}}^{\tilde{s}_{v+1}} \omega_s(\tilde{s}_{v-1}, \tilde{s}_{v+1})} \end{aligned} \quad (25)$$

と表される．ただし，

$$\begin{aligned} & \omega_s(\tilde{s}_{v-1}, \tilde{s}_{v+1}) \\ &= \begin{cases} p^{\tilde{s}_0 s} p^{s \tilde{s}_2} & v = 1 \\ p^{\tilde{s}_{v-1} s} p^{s \tilde{s}_{v+1}} & 2 \leq v \leq z_n - 2 \\ p^{\tilde{s}_{z_n-2} s} p^{s \tilde{s}_{z_n}} & v = z_n - 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (26)$$

と表される．同様に，舗装路面の劣化過程の特性により，条件 (21a) が成立する．ここで， $\tilde{m}_{-v} = (\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_{v-1}, \tilde{m}_{v+1}, \dots, \tilde{m}_{z_n-1}), \tilde{m}_{-v}^m = (\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_{v-1}, m, \tilde{m}_{v+1}, \dots, \tilde{m}_{z_n-1})$ とすれば， $m_v = m$ ($m \in \{\tilde{m}_{v-1}, \dots, \tilde{m}_{v+1}\}$) の全条件付事後確率は，ベイズの法則より

$$\begin{aligned} \text{Prob}\{m_v = m | \tilde{m}_{-v}\} &= \frac{\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{m}_{-v}^m, \tilde{s}, \Xi, \theta)}{\sum_{m=\tilde{m}_{v-1}}^{\tilde{m}_{v+1}} \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{m}_{-v}^m, \tilde{s}, \Xi, \theta)} \\ &= \frac{\omega_m(\tilde{m}_{v-1}, \tilde{m}_{v+1}, \tilde{s}_{v-1}, \tilde{s}_v)}{\sum_{m=\tilde{m}_{v-1}}^{\tilde{m}_{v+1}} \omega_m(\tilde{m}_{v-1}, \tilde{m}_{v+1}, \tilde{s}_{v-1}, \tilde{s}_v)} \end{aligned} \quad (27)$$

と表される．ただし，

$$\begin{aligned} & \omega_m(\tilde{m}_{v-1}, \tilde{m}_{v+1}, \tilde{s}_{v-1}, \tilde{s}_v) \\ &= \begin{cases} \pi^{\tilde{m}_n, m}(\tilde{s}_0) \pi^{m, \tilde{m}_2}(\tilde{s}_1) & v = 1 \\ \pi^{\tilde{m}_{v-1}, m}(\tilde{s}_{v-1}) \pi^{m, \tilde{m}_{v+1}}(\tilde{s}_v) & 2 \leq v \leq z_n - 2 \\ \pi^{\tilde{m}_{z_n-2}, m}(\tilde{s}_{z_n-2}) \pi^{m, \tilde{m}_{n+1}}(\tilde{s}_{z_n-1}) & v = z_n - 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (28)$$

である．

4. アルゴリズム

(1) MCMC 法

伝統的なベイズ統計学では，共役な事前・事後分布を用いて，パラメータを推計する方法が採用される．しか

し、ハザードモデルの場合、簡単な指数ハザードモデルを用いても、共役事前確率分布が存在しないことが知られている。共役事前確率分布が存在しない場合、数値解析により多重積分を求めることが必要となる。このことが、ベイズ統計学をハザード解析へ適用する際に、大きな障害になっていた。しかし、近年、MCMC 法がベイズ統計学の分野に導入され、多重数値積分により基準化定数を求めなくても、効率的に事後分布を求めることが可能となった。その結果、ベイズ推計法の適用範囲は大幅に拡大したと考えることができる。すでに、MCMC 法を用いたベイズ推計法に関して、いくつかの研究が蓄積されている。代表的な MCMC 法として、ギブスサンプリング法、メトロポリス・ヘイスティングス (MH と略す) 法等が提案されている。ギブスサンプリング法、MH 法は、いずれも事後確率密度関数を直接求めることが難しい場合に、各パラメータの条件付き事後確率密度関数を用いて、反復的にパラメータ β, γ のサンプルを乱数発生させることにより、事後分布からパラメータサンプルを獲得する方法である。すでに、筆者等は MCMC 法を用いて、マルコフ推移確率を効率的にベイズ推計できることを明らかにしている。本研究では、筆者等が提案したマルコフ劣化モデルのベイズ推計法を拡張し、MCMC 法を用いて階層的隠れマルコフ劣化モデルを推計する方法を提案する。

隠れマルコフ劣化モデル²⁾を含む混合分布モデルの推計では、前述したように尤度関数が特殊な形をしているため、通常の最尤法やベイズ推計法を用いることが困難である。このようなことから、混合分布モデルの推計方法として、通常の尤度関数ではなく、完備化尤度関数を定義するとともに、MCMC 法を用いて混合分布モデルを推計する方法が提案されている。しかし、既往の隠れマルコフ劣化モデルでは、マルコフ推移確率が定数で与えられ、これらの定数パラメータを集計的に推計するに留まっている。しかし、本研究では、2. で言及したように、多段階指数劣化ハザードモデルを用いて、マルコフ推移確率を推計する点に特徴がある。このような隠れマルコフ劣化モデルを推計するためには、既往の隠れマルコフ劣化モデルを推計するための MCMC 法の中に、マルコフ推移確率のベイズ推計アルゴリズムを内包したような MCMC アルゴリズムを開発することが必要になる。

(2) 事後確率密度

3. で議論したように、道路舗装を構成する道路区間 l において観測された路面性状調査結果に基づいて、離散時間軸上の隣接する 2 つの調査時点 $\bar{t}_n, \bar{t}_{n+1}$ に獲得されたデータのペア $\{\bar{\xi}_n^l, \bar{\xi}_{n+1}^l\}$ を 1 つのサンプルと考える。このようなサンプルに対して新しく添え字をつけ

直し、道路施設の路面性状調査に関するサンプルセット $\bar{\xi}^k$ ($k = 1, \dots, K$) を作成する。任意のサンプル $\bar{\xi}^k$ は、データ $\bar{\xi}_{n(k)}^{l(k)}, \bar{\xi}_{n(k)+1}^{l(k)}$ のペアで構成される。 $l(k)$ はサンプル k が対象とする道路区間の添え字を表し、 $n(k)$ は当該道路区間における調査履歴回数に該当する。すなわち、当該サンプルは道路区間 $l(k)$ において、調査時点 $\bar{t}_{n(k)}^{l(k)}$ と $\bar{t}_{n(k)+1}^{l(k)}$ の路面性状調査結果を対象としていることを表す。また、サンプル k の調査期間 $[\bar{t}_{n(k)}^{l(k)}, \bar{t}_{n(k)+1}^{l(k)}]$ を、期間長 1 の単位期間の列 $[v^k, v^k + 1]$ ($v^k = 0, \dots, z^k - 1$) に細分化する。 z^k はサンプル期間 $[\bar{t}_{n(k)}^{l(k)}, \bar{t}_{n(k)+1}^{l(k)}]$ を構成する単位期間の個数であり、 $z^k = \bar{t}_{n(k)+1}^{l(k)} - \bar{t}_{n(k)}^{l(k)}$ と定義できる。このようなデータを用いて、階層的隠れマルコフ劣化モデルをベイズ推計する問題を考える。

まず、耐荷力の劣化ハザードモデル (2) に含まれるパラメータ $\beta^s = (\beta_1^s, \dots, \beta_Q^s)$ は、未知パラメータである。これらの定数の事前確率密度関数として、正規分布を仮定しよう。すなわち、パラメータ β^s の事前確率密度関数が $\beta^s \sim \mathcal{N}_Q(\zeta^{s,\beta}, \Sigma^{s,\beta})$ である。ただし、 Q 次元正規分布 $\mathcal{N}_Q(\zeta^{s,\beta}, \Sigma^{s,\beta})$ の確率密度関数は、

$$\phi(\beta^s | \zeta^{s,\beta}, \Sigma^{s,\beta}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{Q}{2}} \sqrt{|\Sigma^{s,\beta}|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\beta^s - \zeta^{s,\beta}) \{\Sigma^{s,\beta}\}^{-1} (\beta^s - \zeta^{s,\beta})' \right\} \quad (29)$$

となる。ただし、 $\zeta^{s,\beta}$ は $\mathcal{N}_Q(\zeta^{s,\beta}, \Sigma^{s,\beta})$ の事前期待値ベクトル、 $\Sigma^{s,\beta}$ は事前分散共分散行列である。

同様に、 γ^i ($i = 0, \dots, I - 1$) の事前確率密度関数も多次元正規分布に従うと考える。ただし、 $\gamma^0 = (\gamma_0^1, \gamma_0^2, \dots, \gamma_0^S)$ 、 $\gamma^i = (\gamma_1^i, \dots, \gamma_{V^i}^i)$ ($i = 1, \dots, I - 1$) である。ここで、 $\gamma^i \sim \mathcal{N}_{V^i}(\zeta^{i,\gamma}, \Sigma^{i,\gamma})$ を仮定する。ただし、 V^i 次元正規分布 $\mathcal{N}_{V^i}(\zeta^{i,\gamma}, \Sigma^{i,\gamma})$ の確率密度関数は、

$$\psi(\gamma^i | \zeta^{i,\gamma}, \Sigma^{i,\gamma}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{V^i}{2}} \sqrt{|\Sigma^{i,\gamma}|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\gamma^i - \zeta^{i,\gamma}) \{\Sigma^{i,\gamma}\}^{-1} (\gamma^i - \zeta^{i,\gamma})' \right\} \quad (30)$$

となる。ただし、 $\zeta^{i,\gamma}$ は事前期待値ベクトル、 $\Sigma^{i,\gamma}$ は事前分散共分散行列である。この時、完備化事後確率密度関数 $\theta(\beta, \gamma | \tilde{m}, \tilde{s}, \tilde{\Xi})$ は、

$$\begin{aligned} \theta(\beta, \gamma | \tilde{m}, \tilde{s}, \tilde{\Xi}) &\propto \mathcal{L}(\beta, \gamma, \tilde{m}, \tilde{s}, \tilde{\Xi}) \\ &\prod_{s=1}^{S-1} \phi(\beta^s | \zeta^{s,\beta}, \Sigma^{s,\beta}) \prod_{i=0}^{I-1} \psi(\gamma^i | \zeta^{i,\gamma}, \Sigma^{i,\gamma}) \\ &\propto \prod_{k=1}^K \prod_{v^k=0}^{z^k-1} \left[\sum_{l=\tilde{s}_{v^k,k}}^{\tilde{s}_{v^k,k+1}} \left\{ \prod_{s=\tilde{s}_{v^k,k}, \neq l}^{l-1} \frac{\lambda_s^k}{\lambda_s^k - \lambda_l^k} \exp(-\lambda_l^k) \right\} \right. \\ &\quad \left. \sum_{l=\tilde{m}_{v^k,k}}^{\tilde{m}_{v^k,k+1}} \left\{ \prod_{i=\tilde{m}_{v^k,k}, \neq l}^{l-1} \frac{\mu_i^k}{\mu_i^k - \mu_l^k} \exp(-\mu_l^k) \right\} \right] \\ &\exp \left\{ -\sum_{s=1}^{S-1} \frac{1}{2} (\beta^s - \zeta^{s,\beta}) \{\Sigma^{s,\beta}\}^{-1} (\beta^s - \zeta^{s,\beta})' \right. \end{aligned}$$

$$-\sum_{i=0}^{I-1} \frac{1}{2} (\gamma^i - \zeta^{i,\gamma}) \{ \Sigma^{i,\gamma} \}^{-1} (\gamma^i - \zeta^{i,\gamma})' \} \quad (31)$$

となる．

(3) ギブスサンプリング

階層的隠れマルコフ劣化モデルでは，事後確率密度関数 $\theta(\beta, \gamma | \tilde{s}, \tilde{m}, \Xi)$ を直接解析的に求めることができない．そこで，代表的な MCMC 法であるギブスサンプリング法を用いて，パラメータ β, γ の標本サンプルを事後確率密度関数から抽出する．式 (31) において， β, γ は互いに独立であり，これらのパラメータの完備化条件付事後密度関数 $\theta(\beta^s | \tilde{s}, \Xi)$ ， $\theta(\gamma^i | \tilde{m}, \Xi)$ は

$$\begin{aligned} \theta(\beta^s | \tilde{s}, \Xi) &\propto \prod_{k=1}^K \prod_{v^k=0}^{z^k-1} \sum_{l=\tilde{s}_{v^k}}^{\tilde{s}_{v^k+1}-1} \left\{ \prod_{s=\tilde{s}_{v^k}, \neq l}^{l-1} \frac{\lambda_s^k}{\lambda_s^k - \lambda_l^k} \exp(-\lambda_l^k) \right\} \\ &\exp \left\{ -\frac{1}{2} (\beta^s - \zeta^{s,\beta}) \{ \Sigma^{s,\beta} \}^{-1} (\beta^s - \zeta^{s,\beta})' \right\} \end{aligned} \quad (32a)$$

$$\begin{aligned} \theta(\gamma^i | \tilde{m}, \Xi) &\propto \prod_{k=1}^K \prod_{v^k=0}^{z^k-1} \sum_{l=\tilde{m}_{v^k}}^{\tilde{m}_{v^k+1}-1} \left\{ \prod_{i=\tilde{m}_{v^k}, \neq l}^{l-1} \frac{\mu_i^k}{\mu_i^k - \mu_l^k} \exp(-\mu_l^k) \right\} \\ &\exp \left\{ -\frac{1}{2} (\gamma^i - \zeta^{i,\gamma}) \{ \Sigma^{i,\gamma} \}^{-1} (\gamma^i - \zeta^{i,\gamma})' \right\} \end{aligned} \quad (32b)$$

と表せる．また，潜在変数 m の全条件付事後分布は式 (27) で表される．以上のギブスサンプラーを用いた MCMC 法により，隠れマルコフ劣化モデルを推計することが可能となる．

a) ステップ 1 初期値設定

事前分布 (29),(30) のパラメータベクトル (行列) $\zeta^{s,\beta}, \Sigma^{s,\beta} (s=1, \dots, S-1)$, $\zeta^{i,\gamma}, \Sigma^{i,\gamma} (i=1, \dots, I-1)$ の値を任意に設定する．潜在変数の初期値 $\tilde{s}^{k(0)} = (\tilde{s}_v^{k(0)} : v=0, \dots, z_n^k), \tilde{m}^{k(0)} = (\tilde{m}_v^{k(0)} : v=1, \dots, z_n^k-1) (k=1, \dots, K)$ を設定する．ただし， $\tilde{s}^{k(0)}, \tilde{m}^{k(0)}$ は，それぞれ式 (21a),(21b) を満足する．さらに，パラメータ推計量の初期値 $\alpha^{(0)}, \beta^{(0)}$ を任意に設定する．これらの初期値の影響は，MCMC 法によるシミュレーション回数が蓄積されるにつれ，次第に薄れていく．MCMC のサンプル標本回数 r を $r=1$ とする．

b) ステップ 2 パラメータ $\beta^{(r)}$ の標本抽出

ステップ 2 で用いるギブスサンプラーは式 (32a) で表される完備化条件付事後密度関数 $\rho(\beta^{(r)} | \tilde{s}^{(r-1)}, \Xi)$ を用いて定義できる．仮想的健全度 $\tilde{s}^{(r-1)}$ と測定データ Ξ を与件としたとき，完備化された $\beta^{s(r)}$ に関するギブスサンプラーは，任意の $e=1, \dots, S-1, q=1, \dots, Q$ に対して

$$\hat{\theta}(\beta_q^e | \beta_{-q}^e, \tilde{s}^{(r-1)}, \Xi)$$

$$\begin{aligned} &\propto \prod_{k=1}^K \prod_{v^k=0}^{z^k-1} \prod_{s=1}^{S-1} \prod_{r=s}^S \prod_{l=s}^{i-1} \left[\prod_{q=1}^Q (\beta_q^s x_q^k)^{\delta_{sr}^{v^k} - \delta_{se}^{v^k}} \right. \\ &\sum_{h=s}^i \prod_{l=s, \neq h}^{h-1} \frac{1}{\lambda_l^k - \lambda_h^k} \exp(-\lambda_h^k) \left. \right]^{\delta_{sr}^{v^k}} \\ &\exp \left\{ -\frac{\sigma_{qq}^e}{2} (\beta_q^e - \hat{\zeta}_q^e)^2 \right\} \\ &\hat{\zeta}_q^e = \zeta_q^e + \sum_{h=1, \neq q}^Q (\beta_h^e - \zeta_h^e) \sigma_{hq}^e \end{aligned} \quad (33)$$

と表すことができる．ただし， $\delta_{se}^{v^k}, \delta_{sr}^{v^k}$ は

$$\begin{aligned} \delta_{se}^{v^k} &= \begin{cases} 1 & \tilde{s}_{v^k} = s = e \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases} \\ \delta_{sr}^{v^k} &= \begin{cases} 1 & \tilde{s}_{v^k} = s, \tilde{s}_{v^k+1} = r \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases} \end{aligned} \quad (34)$$

となるダミー変数である． ζ_q^e は事前期待値ベクトル ζ^e の第 q 要素であり， σ_{hq}^e は事前分散共分散行列 $\{\Sigma^{e,\beta}\}^{-1}$ の第 (h, q) 要素である．また， $\sum_{h=1, \neq q}^Q$ は 1 から Q までの要素のうち q を除いた要素の総和を意味する．このとき， $\beta^{(r)} = (\beta_1^{1(r)}, \dots, \beta_Q^{S-1(r)})$ を以下の手順でランダムサンプリングする．

- ・ステップ 2-1 $\hat{\theta}(\beta_1^{1(r)} | \beta_{-1}^{1(r-1)}, \tilde{s}^{(r-1)}, \Xi)$ から $\beta_1^{1(r)}$ を乱数発生する．
- ・ステップ 2-2 $\hat{\theta}(\beta_2^{1(r)} | \beta_{-2}^{1(r-1)}, \tilde{s}^{(r-1)}, \Xi)$ から $\beta_2^{1(r)}$ を乱数発生する．
- ・ステップ 2-3 以下，同様の手順を繰り返す．
- ・ステップ 2-4 $\hat{\theta}(\beta_Q^{S-1(r)} | \beta_{-Q}^{S-1(r-1)}, \tilde{s}^{(r-1)}, \Xi)$ から $\beta_Q^{S-1(r)}$ を乱数発生する．

なお，本研究では，式 (33) から事後分布のパラメータ β の標本をサンプリングする手法として，適応的棄却サンプリングを用いる．

c) ステップ 3 パラメータ $\gamma^{(r)}$ の標本抽出

多段階指数ハザードモデルのパラメータ $\gamma^{(r)}$ の標本を抽出する．未知パラメータベクトル $\gamma^f (f=0, \dots, I-1)$ から第 $q (q=1, \dots, V)$ 番目の要素 γ_q^f を除いた未知パラメータベクトルを γ_{-q}^f と表す．ただし， $f=0$ の時は， $q (q=2, \dots, S-1)$ である．この時，式 (32b) より， γ_{-q}^f を既知とした時の γ_q^f のギブスサンプラー $\hat{\theta}(\gamma_q^f | \gamma_{-q}^f, \tilde{m}^{(r-1)}, \Xi)$ は，任意の $f=0, \dots, I-1, q=1, \dots, V (f=0 \text{ の時は } q=2, \dots, S-1)$ に対して

$$\begin{aligned} &\hat{\theta}(\gamma_q^f | \gamma_{-q}^f, \tilde{m}^{(r-1)}, \Xi) \\ &\propto \prod_{k=1}^K \prod_{v^k=1}^{z^k-1} \prod_{i=1}^{I-1} \prod_{j=i}^I \prod_{l=i}^{i-1} \left[\prod_{q=1}^Q (\gamma_q^i x_q^k)^{\delta_{ij}^{v^k} - \delta_{if}^{v^k}} \right. \\ &\sum_{h=i}^i \prod_{l=i, \neq h}^{h-1} \frac{1}{\mu_l^k - \mu_h^k} \exp(-\mu_h^k) \left. \right]^{\delta_{ij}^{v^k}} \\ &\exp \left\{ -\frac{\sigma_{qq}^f}{2} (\gamma_q^f - \hat{\zeta}_q^f)^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\hat{\zeta}_q^f = \zeta_q^f + \sum_{h=1, \neq f}^V (\gamma_h^f - \zeta_h^f) \sigma_{hq}^f \quad (35)$$

と表せる．ただし， $\delta_{if}^{v^k}$ ， $\delta_{ij}^{v^k}$ は

$$\delta_{if}^{v^k} = \begin{cases} 1 & \tilde{m}_{v^k} = i = f \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases}$$

$$\delta_{ij}^{v^k} = \begin{cases} 1 & \tilde{m}_{v^k} = i, \tilde{m}_{v^k+1} = j \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases}$$

となるダミー変数である． ζ_q^f は事前期待値ベクトル ζ^f の第 q 要素であり， σ_{hq}^f は事前分散共分散行列 $\{\Sigma^{f, \gamma}\}^{-1}$ の第 (h, q) 要素である．以上のギブスサンプラーを用いて，ステップ 3 と同様の手順によりサンプル標本 $\gamma^{(r)}$ を得ることができる．

d) ステップ 4 潜在変数の更新

全条件付事後確率 (27) に基づいて，新しい潜在変数 $\tilde{s}^{(r)}, \tilde{m}^{(r)}$ をランダムサンプリングする．まず，潜在変数ベクトル $\tilde{s}_{-v^k}^{(r-1)} = (\tilde{s}_1^{(r-1)}, \dots, \tilde{s}_{v^k-1}^{(r-1)}, \tilde{s}_{v^k+1}^{(r-1)}, \dots, \tilde{s}_{z^k-1}^{(r-1)})$ を定義する．この時， $s_{v^k}^{(r)} \in \{\tilde{s}_{v^k-1}^{(r-1)}, \dots, \tilde{s}_{v^k+1}^{(r-1)}\}$ の全条件付事後確率は，

$$\text{Prob}\{s_{v^k} = s | \tilde{s}_{-v^k}^{(r-1)}\} = \frac{\omega_s(\tilde{s}_{v^k-1}^{(r-1)}, \tilde{s}_{v^k+1}^{(r-1)})}{\sum_{s=\tilde{s}_{v^k-1}^{(r-1)}}^{\tilde{s}_{v^k+1}^{(r-1)}} \omega_s(\tilde{s}_{v^k-1}^{(r-1)}, \tilde{s}_{v^k+1}^{(r-1)})} \quad (36)$$

と表される．ただし，

$$\omega_s(\tilde{s}_{v^k-1}^{(r-1)}, \tilde{s}_{v^k+1}^{(r-1)}) = \begin{cases} p_{\tilde{s}_0^{(r-1)}}^s p_{\tilde{s}_2^{(r-1)}}^s & v^k = 1 \\ p_{\tilde{s}_{v^k-1}^{(r-1)}}^s p_{\tilde{s}_{v^k+1}^{(r-1)}}^s & 2 \leq v^k \leq z^k - 2 \\ p_{\tilde{s}_{z^k-2}^{(r-1)}}^s p_{\tilde{s}_{z^k}^{(r-1)}}^s & v = z^k - 1 \end{cases} \quad (37)$$

と表される．同様に，舗装路面の劣化過程の特性により，条件 (21a) が成立する．ここで， $\tilde{m}_{-v^k}^{(r-1)} = (\tilde{m}_1^{(r-1)}, \dots, \tilde{m}_{v^k-1}^{(r-1)}, \tilde{m}_{v^k+1}^{(r-1)}, \dots, \tilde{m}_{z^k-1}^{(r-1)})$ を定義する．この時， $m_{v^k} = m$ ($m \in \{\tilde{m}_{v^k-1}^{(r-1)}, \dots, \tilde{m}_{v^k+1}^{(r-1)}\}$) の全条件付事後確率は，ベイズの法則より

$$\text{Prob}\{m_{v^k} = m | \tilde{m}_{-v^k}^{(r-1)}\} = \frac{\omega_m(\tilde{m}_{v^k-1}^{(r-1)}, \tilde{m}_{v^k+1}^{(r-1)}, \tilde{s}_{v^k-1}^{(r-1)}, \tilde{s}_{v^k}^{(r-1)})}{\sum_{m=\tilde{m}_{v^k-1}^{(r-1)}}^{\tilde{m}_{v^k+1}^{(r-1)}} \omega_m(\tilde{m}_{v^k-1}^{(r-1)}, \tilde{m}_{v^k+1}^{(r-1)}, \tilde{s}_{v^k-1}^{(r-1)}, \tilde{s}_{v^k}^{(r-1)})} \quad (38)$$

と表される．ただし，

$$\omega_m(\tilde{m}_{v^k-1}^{(r-1)}, \tilde{m}_{v^k+1}^{(r-1)}, \tilde{s}_{v^k-1}^{(r-1)}, \tilde{s}_{v^k}^{(r-1)}) = \begin{cases} \pi_{\tilde{m}_{n(k)}^{(r-1)}, m}(\tilde{s}_0^{(r-1)}) \pi_{\tilde{m}_2^{(r-1)}, m}(\tilde{s}_1^{(r-1)}) & (v^k = 1 \text{ の時}) \\ \pi_{\tilde{m}_{v^k-1}^{(r-1)}, m}(\tilde{s}_{v^k-1}^{(r-1)}) \pi_{\tilde{m}_{v^k+1}^{(r-1)}, m}(\tilde{s}_{v^k}^{(r-1)}) & (2 \leq v^k \leq z^k - 2 \text{ の時}) \\ \pi_{\tilde{m}_{z^k-2}^{(r-1)}, m}(\tilde{s}_{z^k-2}^{(r-1)}) \pi_{\tilde{m}_{n(k)+1}^{(r-1)}, m}(\tilde{s}_{z^k-1}^{(r-1)}) & (v^k = z^k - 1 \text{ の時}) \end{cases}$$

である．すべての k ($k = 1, \dots, K$) に対して， $v^k = 1$ より逐次，潜在変数 $\tilde{s}_{v^k}^{(r)}$ ($v^k = 1, \dots, z^k$), $\tilde{m}_{v^k}^{(r)}$ ($v^k = 0, \dots, z^k - 1$) を求める．

e) ステップ 5 アルゴリズムの終了判定

以上で求めたパラメータ推計量の更新値 $\beta^{(r)}, \gamma^{(r)}$ ，潜在変数の更新値 $\tilde{m}^{(r)}, \tilde{s}^{(r)}$ を記録する． $r \leq \bar{r}$ の場合， $r = r + 1$ として，ステップ 2 へ戻る．そうでない場合，アルゴリズムを終了する．

なお，以上のアルゴリズムの初期段階においては，パラメータの初期値設定の影響が残存している．このため，シミュレーション回数 r が十分大きな値になるまでは，パラメータ標本の発生過程が定常過程に到達していないと考え，発生したパラメータ標本を除去することが望ましい．ここで，パラメータ標本として採用するシミュレーション回数 r の最小値を $\underline{r}$ と表す．すなわち，ギブスサンプリングで求めたサンプル $\beta^{(r)}, \gamma^{(r)}$ ($r = \underline{r} + 1, \underline{r} + 2, \dots, \bar{r}$) を，事後確率密度関数 $\theta(\beta, \gamma | \Xi)$ からの標本と見なすこととする．したがって，これらの標本を用いて，パラメータベクトル β, γ の事後分布に関する各種の統計量を計算することも可能となる．なお，ギブスサンプリングの定常性に関しては，次節で述べる Geweke の検定統計量を用いて判断することができる．

5. おわりに

本研究では，路面健全度の劣化過程と耐荷力の低下過程で構成される複合的劣化過程を表現するために階層的隠れマルコフ劣化モデルを提案した．すなわち，舗装の耐荷力が低下することにより，路面健全度の劣化速度が大きくなるという階層的劣化仮説を設定し，耐荷力の低下過程を斉次マルコフ過程で表現し，路面健全度の劣化過程を耐荷力の状態に依存して路面健全度の劣化速度が変化するような非斉次マルコフ過程として表現した．さらに，路面性状調査と FWD 調査結果に基づいて，階層的隠れマルコフ劣化モデルを MCMC 法により推計する方法論を提案した．なお，講演会当日には高速道路への適用を通して，本研究の有効性を実証的に検証した事例を紹介する．

参考文献

- 1) 津田尚胤，貝戸清之，青木一也，小林潔司：橋梁劣化予測のためのマルコフ推移確率の推定，土木学会論文集，No.801/I-73，pp.68-82，2005.
- 2) 小林潔司，貝戸清之，林秀和：測定誤差を考慮した隠れマルコフ劣化モデル，土木学会論文集 D，Vol.64，No.3，pp.493-512，2008.

(2011. 5. 6 受付)