感度分析による経路集約化法を用いた 確率的利用者均衡配分の効率的計算

岡本　裕也[1]・中山　晶一朗[2]・高山　純一[3]

[1]学生会員　金沢大学大学院　自然科学研究科（〒920-1192 石川県金沢市角間町）
E-mail:doken-y@stu.kanazawa-u.ac.jp

[2]正会員　金沢大学准教授　理工研究域環境デザイン学系（〒920-1192 石川県金沢市角間町）
E-mail: snakayama@t.kanazawa-u.ac.jp

[3]フェロー会員　金沢大学教授　理工研究域環境デザイン学系（〒920-1192 石川県金沢市角間町）
E-mail: takayama@t.kanazawa-u.ac.jp

都市高速道路などでは，経路により料金を割り引く施策の検討が必要になるなど経路交通量の算出が必要な場面も多々ある．一方，広域を対象とした大規模道路網の交通量配分を行うには，多大な計算時間を要し，データ入力，結果表示のための作業量も膨大なものとなる．配分計算を何度も行う必要がある場合，何らかの計算の効率化は極めて重要である．ある程度の配分結果の精度を確保しつつ，計算費用を減らすための手法の一つにネットワーク集約化がある．本研究では，高速道路を含むネットワークの確率利用者均衡配分について，一般道路のみを通る経路を感度分析を用いて集約し，集約した一般道路の経路と高速道路を一部でも含む経路の間で配分を行う手法を提案し，さらに行列計算を簡略化する手法を提案する．

Key Words : *traffic assignment, sensitivity analysis, aggregated route, stochastic user equilibrium*

1. はじめに

高速道路は種々の主体により様々な道路が運営されている．高速道路料金体系に関して，高速自動車国道では走行距離に応じて料金が変動する「対距離料金制」が採用されている．これに対し，都市高速道路では大都市の膨大な交通をスムーズに処理する必要があり，また，出口に料金所を設けるスペースの確保が難しいこともあるため，それぞれの料金エリア内で走行距離にかかわらず一定の料金が設定される「均一料金制」が現時点では採用されている．しかし，都市高速道路で採用している均一料金制は，近年ネットワークの拡大とともに，同じ料金区間内で近距離を走行する利用者と長距離を走行する利用者で不公平感が増大している．また，ETC が普及してきたことにより，出入口での混雑が解消されつつあるとともに，出入り口の特定が容易になってきている．

このような現状を受けて，都市高速道路会社では，現行の料金体系の見直しを行い，均一料金制から対距離料金制の新たな料金体系への移行が検討されている．

このように料金設定を考える際には，都市高速道路ネットワークだけでなく，周辺の一般道路も考慮することは必須となる．しかし，広域を対象とした大規模道路ネットワーク(複数の県をまたぐネットワーク)の交通量配分を行うには，膨大な計算機容量と計算時間を要し，データ入力，結果表示のための作業量も膨大なものとなる．さらに，料金について考える場合は各料金設定ごとに配分を行ったり，均衡配分の制約下で料金に関する最適化を行う必要があったりするなど多数の配分計算を行う必要がある．したがって，配分結果の精度を確保しつつ，計算費用を減らすための工夫を行うことは非常に重要である．

本研究では，計算の効率や計算量の縮減の手法として，ネットワークの集約化に着目する．ネットワーク集約化の目的は，実際のネットワークよりも規模(リンク，ノード数)の小さい計算用のネットワークを合理的に作成することにあると考えられる．最も簡単な方法として，主要なリンク(幹線道路)のみを抽出し，他のリンクを削除する方法が挙げられるが，不要なリンクを削除しているため，計算費用の節約には寄与しても，配分結果に対する精度が保証されず，交通計画の基本データとしての利用価値が減ずることになる．

Chan[1)]は，実ネットワークから必要なリンク(たとえば幹線道路)を抽出あるいは不必要なリンク(細街路)を削除し，さらに何本かのリンクを束ねて仮想的なリンクを作

成することで計算時間の短縮を試みている．

飯田ら[2),3)]は，ネットワークをいくつかのブロックに分割し，ブロック間を関連づける上位ネットワークと，各ブロックごとの詳細道路網からなる下位ネットワークに階層化し，上位ネットワークでの配分結果を下位ネットワークへ配分するとともに，その結果得られる情報を再度上位ネットワークの配分に用いる手法を提案している．

佐々木ら[4)]や飯田ら[5)]は対象領域を要素ごとに分割し，シミュレーションを組み込んだ要素レベルの走行時間関数を作成し，交通量配分の連続体近似モデルを作成することで，ネットワークの簡略化を行っている．

以上の集約化手法は，リンクの抽出・削除方法，分割方法などはモデル作成者の職人芸的な技術に依存する部分があり，明確な基準を設けにくいように思われる．

Connors[6),7)]は，感度分析を用いたネットワークの集約化を提案した．有料道路または，公共交通と一般道路を含むネットワークにおいて，一般道路を一本の仮想リンクに集約することで，計算時間を短縮することができる．感度分析による集約のため，機械的に集約を行うことができる利点がある．しかし，Connors の手法では高速道路へのアクセスに一般道路を利用する場合に適用できないことが問題点として挙げられる．

本研究では，感度分析を用いたネットワーク集約方法を提案するとともに，高速道路へのアクセスに一般道路を利用する場合においても適用可能なネットワーク集約化手法を構築した．しかし，大規模ネットワークで本計算手法を適用する場合，計算に用いる行列が非常に大きくなり計算ができないという問題が挙げられる[8)]．そこで，本研究では膨大となる行列(勾配行列)の簡略化手法を提案する．

2. 確率的利用者均衡配分の定式化

(1) モデルの基本構造

前章で述べたように，高速道路の経路交通量を計算する必要から，本研究では確率的利用者均衡を採用する．ODペア rs 間の経路 k の効用関数の確定項を，経路コストのみの関数 $V_{rs,k}=-c_{rs,k}$ とおく．効用関数の誤差項をどのように仮定するかによって，ロジット型やプロビット型等が考えられるが，本研究では実用的に利用可能なロジットモデルによる経路選択を仮定する．このとき，ODペア rs 間の経路選択肢集合 K_{rs} から経路 k が選ばれる確率は以下の通りである．

$$P_{rs,k}=\frac{\exp\left(-\theta\cdot c_{rs,k}\right)}{\sum_{k\in K_{rs}}\exp\left(-\theta\cdot c_{rs,k}\right)} \quad (1)$$

ここで,

$P_{rs,k}$ ：ODペア rs 間において経路 k が選択される確率

$c_{rs,k}$ ：ODペア rs 間の経路 k の旅行コスト(道路料金の時間換算分を含む)

K_{rs} ：ODペア rs 間の経路選択肢集合

θ ：分散パラメータ

したがって，経路交通量は以下の式で表わされる．

$$f_{rs,k}=q_{rs}\cdot P_{rs,k} \quad (2)$$

ここで,

$f_{rs,k}$ ：ODペア rs 間において経路 k の経路交通量

q_{rs} ：ODペア rs 間のOD交通量

また，交通量保存則は,

$$\sum_{k\in K_{rs}} f_{rs,k}-q_{rs}=0 \quad (3)$$

なお，(2)式は常に $f_{rs,k}\geq 0$ であるから，経路交通量の非負条件は自明である．

経路交通量とリンク交通量の関係は,

$$x_a=\sum_{rs\in\Omega}\sum_{k\in K_{rs}}\delta_{a,rs,k}\cdot f_{rs,k} \quad (4)$$

ここで,

x_a ：リンク a の交通量

$\delta_{a,rs,k}$ ：ODペア rs 間の経路 k にリンク a が含まれるとき1，含まれないとき0となる変数

Ω ：ODペアの集合

ODペア rs 間の経路 k の旅行コスト $c_{rs,k}$ は，経路を構成するリンクの旅行コストの和を用いて，以下のように表わされる．

$$c_{rs,k}=\sum_{a\in A}\delta_{a,rs,k}\cdot t_a \quad (5)$$

ここで,

t_a ：リンク a の旅行コスト

(2) リンクコスト

均衡配分で用いることができる代表的なリンクパフォーマンス関数として，BPR関数やDavidson関数などが用いられるが，本研究では，BPR関数を用いる．また，有料道路の取り扱いは，道路利用者の経路選択要因として旅行時間と道路料金の2つが主要なものであると考え，旅行時間と道路料金の両方を考慮できるように，道路料金を時間に換算して旅行時間に加算することとする．本研究では，通常のBPR関数に料金の時間換算項を付加したものを用いることとする．よって，有料道路のリンクパフォーマンス関数は次の関数型で表される．

$$t_a(x_a) = t_{a0} \cdot \left\{ 1 + \alpha \cdot \left(\frac{x_a}{C_a} \right)^{\beta} \right\} + \frac{\pi_a}{\xi} \tag{6}$$

ここで,

t_{a0} ：リンクaの自由旅行コスト

C_a ：リンクaの交通容量

α, β ：BPR関数のパラメータ

π_a ：リンクaの道路料金

ξ ：料金時間換算パラメータ（時間価値）

⑶ 等価な最適化問題

式(1)，(2)，(3)，(4)で示したロジット型確率的利用者均衡条件は，以下の数理最適化問題の解として求めることができる．

$$\min_{x,f} Z = \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} t_a(w) \cdot dw - \sum_{rs \in \Omega} \frac{1}{\theta} \cdot q_{rs} \cdot \sum_{k \in K_{rs}} \left(- \frac{f_{rs,k}}{q_{rs}} \cdot \ln \frac{f_{rs,k}}{q_{rs}} \right) \tag{7}$$

制約条件：

$$f_{rs,k} \geq 0 \tag{8}$$

$$\sum_{k \in K_{rs}} f_{rs,k} - q_{rs} = 0 \tag{9}$$

$$x_a = \sum_{rs \in \Omega} \sum_{k \in K_{rs}} \delta_{a,rs,k} \cdot f_{rs,k} \tag{10}$$

この数理最適化問題(多次元非線形最適化問題)は，一般には解析的に解くことはできないため，未知変数$\{x_a\}$と$\{f_{rs,k}\}$を繰り返し更新することにより，徐々に目的関数Zの値を小さくしていくというアプローチを用いることになる．

3. 感度分析による経路集約

⑴ 一般経路の集約

感度分析は，モデルや式内の変数が変化した時，アウトプットにどの程度影響を与えるのかを調べる手法である．数理計画問題においては，目的関数や制約関数，パラメータを微小変化させたときの，最適解や最適値の変化や変化率等の近似的に調べることに多用されている．

本研究では，前章で述べた確率的利用者均衡配分をベースとし，複数の一般道路のみを利用する経路(以下，一般経路)を一つの経路に集約する．このように高速道路を一部でも利用する経路（以下，高速経路）はそのままで，一般経路（一般道路のみの経路）は一つの経路に集約すると，高速経路の交通量が分かると集約した一般経路の交通量は自動的にOD交通量から高速経路の交通量を減ずることで得られる．問題となるのは集約した一般経路の旅行時間をどのように取り扱うかである．一般経路の旅行時間は均衡を通じて高速経路の交通量にも影響を与えるため，取り扱いが難しい．つまり，変数としては，高速経路の交通量のみを取り扱うことで十分であるものの，集約した経路の旅行時間を確率利用者均衡の枠組みの中で考えなければならない．繰り返しになるが，高速経路交通量により集約した一般経路旅行時間が変化し，それが高速経路交通量に影響を与えるからである．そこで，本研究では，感度分析を用いることで確率的利用者均衡の枠組みの中で高速経路交通量の変化に対する一般経路交通量の変化を近似的に算出し，集約した一般経路の旅行時間を計算することで，高速経路と一つに集約した一般経路の間で確率的利用者均衡を行う方法を以下に提案する．

具体的には，一般経路交通量と高速経路交通量を異なる経路集合とみなし，リンク交通量はそのリンクを通過する経路交通量の総和として定義する．そして，一般経路交通量を感度分析を用いて高速経路交通量の関数として近似的に算出する式を導出する．一般経路交通量を高速経路交通量の関数とすることで，変数としては高速経路交通量のみを考えるだけでよく，一般経路交通量の配分計算を省き，変数自体も削減することによって，一般経路に関しては近似される部分はあるものの，計算時間の大幅な短縮が期待できる．

まず，経路交通量を一般経路交通量と高速経路交通量に分離し，リンク交通量を以下のように与える．

$$x_a = \sum_{rs \in \Omega} \sum_{m \in M_{rs}} \delta^h_{a,rs,m} \cdot h_{rs,m} + \sum_{rs \in \Omega} \sum_{n \in N_{rs}} \delta^g_{a,rs,n} \cdot g_{rs,n} \tag{11}$$

ここで,

$h_{rs,m}$ ：ODペアrs間において高速経路mの経路交通量

$\delta^h_{a,rs,m}$ ：ODペアrs間の高速経路mにリンクaが含まれるとき1，含まれないとき0となる変数

M_{rs} ：ODペアrs間の高速経路選択肢集合

$g_{rs,n}$ ：ODペアrs間において一般経路nの経路交通量

$\delta^g_{a,rs,n}$ ：ODペアrs間の一般経路nにリンクaが含まれるとき1，含まれないとき0となる変数

N_{rs} ：ODペアrs間の一般経路選択肢集合

式(11)をベクトル表示すると以下の通りとなる．

$$\mathbf{x} = \Delta^h \cdot \mathbf{h} + \Delta^g \cdot \mathbf{g} \tag{12}$$

ここで,

$\mathbf{x}$ ：x_aを要素に持つリンク交通量ベクトル

$\mathbf{h}$ ：$h_{rs,m}$を要素に持つ高速経路交通量ベクトル

Δ^h ：$\delta^h_{a,rs,m}$を要素に持つ高速経路のリンク・経路接続行列

$\mathbf{g}$ ：$g_{rs,n}$を要素に持つ一般経路交通量ベクトル

Δ^g ：$\delta^g_{a,rs,n}$を要素に持つ一般経路のリンク・経路接続行列

なお，本論文では，今後断りがない限り，ベクトルは列

ベクトルとし，基本的にブロック体の英文字はベクトルもしくは行列を表すこととする．また，式中の・は，内積ではなく，行列積もしくはベクトルの積を表すこととする．

ここで，一般経路のみでの経路選択について考えよう．OD ペア rs 間の一般経路選択肢集合 N_{rs} から経路 n が選ばれる確率は以下の式によって与えられる．

$$P_{rs,n} = \frac{\exp(-\theta \cdot c_{rs,n})}{\sum_{n \in N_{rs}} \exp(-\theta \cdot c_{rs,n})} \tag{13}$$

ここで，

$P_{rs,n}$ ：OD ペア rs 間において一般経路 n が選択される選択確率

$c_{rs,n}$ ：OD ペア rs 間における一般経路 n の旅行コスト

θ ：分散パラメータ

したがって，一般経路交通量は以下の式で表わされる．

$$g_{rs,n} = (Q_{rs} - H_{rs}) \cdot P_{rs,n} \tag{14}$$

ここで，

Q_{rs} ：OD 交通量

H_{rs} は高速経路交通量の合計

式(14)をベクトル表示すると，

$$\mathbf{g} = (\mathbf{Q} - \mathbf{H}) \cdot \mathbf{P}_g \tag{15}$$

ここで，

$\mathbf{g}$ ：$g_{rs,n}$ を要素に持つ一般経路交通量ベクトル

$\mathbf{Q}$ ：Q_{rs} を対角成分に持つ OD 交通量の対角行列

$\mathbf{H}$ ：H_{rs} を対角成分に持つ総高速経路交通量の対角行列

$\mathbf{P}_g$ ：$P_{rs,n}$ を要素に持つ一般経路選択確率ベクトル

以上の（各 OD ペアにある）複数の一般経路は（各 OD ペアごとに）一つの経路の集約する．**図-1** 及び**図-2** は一般経路集約の例を示している．集約した一般経路の交通量 $g_{rs,n}$ は $Q_{rs} - H_{rs}$ であるものの，**図-2** で例示した一般経路集約後の確率利用者均衡配分の際には集約した一般経路の旅行時間が必要になる．つまり，高速経路と集約した経路の間の確率的利用者均衡配分を行うには，集約した一般経路の旅行時間を与える必要がある．本研究では，それをログサムとして与えられる以下の式の期待最小旅行時間（期待最小コスト）とする．

$$S_{rs} = -\frac{1}{\theta} \ln \sum_{n \in N_{rs}} \exp(-\theta c_{rs,n}(x_a(\mathbf{h}))) \tag{16}$$

もし $x_a(\mathbf{h})$ が得られれば，集約した一般経路のコストを上式のように与えることができる（$x_a(\mathbf{h})$ は次節で近似的に与える）．そうすると，S_{rs} を用いて，求めたい高速経路の交通量は以下のように与えることができる．

$$\begin{aligned} h_{rs,m} &= q_{rs} \cdot P_{rs,m} \\ &= q_{rs} \cdot \frac{\exp(-\theta \cdot c_{rs,m})}{\sum_{m \in M_{rs}} \exp(-\theta \cdot c_{rs,m}) + \sum_{n \in N_{rs}} \exp(-\theta \cdot c_{rs,n})} \\ &= q_{rs} \cdot \frac{\exp(-\theta \cdot c_{rs,m})}{\sum_{m \in M_{rs}} \exp(-\theta \cdot c_{rs,m}) + \exp(-\theta \cdot S_{rs})} \end{aligned} \tag{17}$$

ここで，

$P_{rs,m}$ ：OD ペア rs 間において高速経路 m が選択される選択確率

$c_{rs,m}$ ：OD ペア rs 間における高速経路 m の旅行コスト

θ ：分散パラメータ

つまり，高速経路のコストは，$c_{rs,m}$ で集約した一般経路のコストを S_{rs} とした時の（一般経路を集約した）確率的利用者均衡配分を行うことができる．S_{rs} を配分によって求める，つまり，x_a を配分によって求めると計算量的に通常の確率的利用者均衡とほぼ同じになってしまうが，次節で述べるように，配分を通さず感度分析により近似的に $x_a(\mathbf{h})$ を与える．つまり，高速経路交通量 $\mathbf{h}$ のみを変数として，それをもとに $x_a(\mathbf{h})$ を感度分析により近似的に与え，S_{rs} を用いることで一般経路の集約とする．

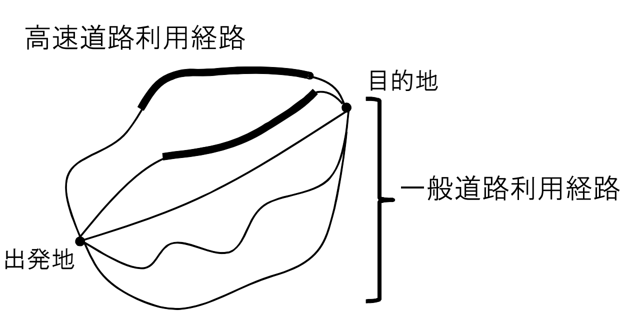

図-1　一般経路集約前ネットワーク

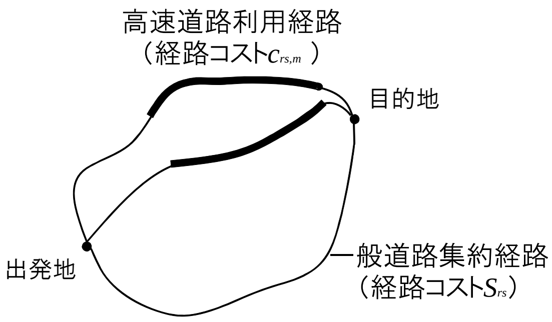

図-2　一般経路集約後ネットワーク

⑵ 一般経路交通量の感度分析による近似

まず，感度分析を適用するために式(15)の両辺の差をとり，それをギャップ関数 $\mathbf{d}(=\mathbf{0})$とすると，

$$\mathbf{d}(\mathbf{h},\mathbf{g})=\mathbf{g}-(\mathbf{Q}-\mathbf{H})\cdot\mathbf{P}_g(\mathbf{h},\mathbf{g}) \tag{18}$$

ここで，$\mathbf{d}$ は一般経路交通量式の両辺の差を表すギャップ関数（ベクトル値関数）であり，高速経路交通量 $\mathbf{h}$ と一般経路交通量 $\mathbf{g}$ の関数である．

式(18)に（$\mathbf{h}_0$, $\mathbf{g}_0$ の周りで）一次のテーラー展開を施すと，

$$\mathbf{d}(\mathbf{h},\mathbf{g})=\mathbf{d}(\mathbf{h}_0,\mathbf{g}_0)+\nabla_{\mathbf{g}}\mathbf{d}\cdot(\mathbf{g}-\mathbf{g}_0)+\nabla_{\mathbf{h}}\mathbf{d}\cdot(\mathbf{h}-\mathbf{h}_0) \tag{19}$$

となる．このとき，ギャップ関数 $\mathbf{d}$ は $\mathbf{0}$ でなければならないため，$\mathbf{d}(\mathbf{h},\mathbf{g})=\mathbf{0}$，$\mathbf{d}(\mathbf{h}_0,\mathbf{g}_0)=\mathbf{0}$ の条件を式(19)に適用すると以下の式が与えられる．

$$\mathbf{g}=\mathbf{g}(\mathbf{h})=\mathbf{g}(\mathbf{h}_0)-(\nabla_{\mathbf{g}}\mathbf{d})^{-1}\nabla_{\mathbf{h}}\mathbf{d}(\mathbf{h}-\mathbf{h}_0) \tag{20}$$

つまり，一般経路交通量 $\mathbf{g}$ は，高速経路交通量 $\mathbf{h}$ の関数として，上式のように与えられる．ここで，高速経路交通量の摂動を $\mathbf{h}_s$ とすると，高速経路交通量を $\mathbf{h}=\mathbf{h}_0+\mathbf{h}_s$ と表すことができる．また，勾配行列 G を以下の式(22)のように定義することとする．

$$\mathbf{g}(\mathbf{h})=\mathbf{g}(\mathbf{h}_0+\mathbf{h}_s)=\mathbf{g}(\mathbf{h}_0)-G\cdot\mathbf{h}_s \tag{21}$$

$$G=(\nabla_{\mathbf{g}}\mathbf{d})^{-1}\nabla_{\mathbf{h}}\mathbf{d} \tag{22}$$

次に，勾配行列 G についてもう少し考えよう．まず，ギャップ関数の式(18)を $\mathbf{g}$ で偏微分すると $\nabla_{\mathbf{g}}\mathbf{d}$ は,

$$\nabla_{\mathbf{g}}\mathbf{d}=\mathbf{I}-(\mathbf{Q}-\mathbf{H})\cdot\nabla_{\mathbf{g}}\mathbf{P}_g \tag{23}$$

となる．上式の $\nabla_{\mathbf{g}}\mathbf{P}_g$ に関して，$\mathbf{P}_g$ は $\mathbf{c}_g$ ($c_{rs,n}$ を要素に持つ一般経路の旅行コストベクトル)の関数，そして，$\mathbf{c}_g$ は $\mathbf{t}$(t_a を要素に持つリンク旅行コストベクトル)の関数，さらに $\mathbf{t}$ は $\mathbf{x}$ の関数，$\mathbf{x}$ は $\mathbf{h}$ が与えられた場合は $\mathbf{g}$ の関数であり，それらを偏微分する．ここで，$\nabla_{\mathbf{t}}\mathbf{c}_g$ に関しては，一般経路のリンク・経路接続行列の転置行列，$\nabla_{\mathbf{g}}\mathbf{x}$ に関しては，一般経路のリンク・経路接続行列になる．これらをまとめると，以下の式が与えられる．

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{g}}\mathbf{d}&=\mathbf{I}-(\mathbf{Q}-\mathbf{H})\cdot\nabla_{\mathbf{c}}\mathbf{P}_g\cdot\nabla_{\mathbf{t}}\mathbf{c}_g\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{t}\cdot\nabla_{\mathbf{g}}\mathbf{x}\\&=\mathbf{I}-(\mathbf{Q}-\mathbf{H})\cdot\nabla_{\mathbf{c}}\mathbf{P}_g\cdot\Delta^{\mathbf{g}^T}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{t}\cdot\Delta^{\mathbf{g}}\end{aligned} \tag{24}$$

$\nabla_{\mathbf{h}}\mathbf{d}$ に関しても，上記と同様に GAP 関数を $\mathbf{h}$ で偏微分する．

$$\nabla_{\mathbf{h}}\mathbf{d}=\nabla_{\mathbf{h}}\mathbf{H}\cdot\mathbf{P}_g-(\mathbf{Q}-\mathbf{H})\cdot\nabla_{\mathbf{c}}\mathbf{P}_g\cdot\Delta^{g^T}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{t}\cdot\Delta^{\mathbf{h}} \tag{25}$$

式(24)，(25)を式(22)に代入すると，

$$\begin{aligned}G=&\left(\mathbf{I}-(\mathbf{Q}-\mathbf{H})\cdot\nabla_{\mathbf{c}}\mathbf{P}_g\cdot\Delta^{\mathbf{g}^T}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{t}\cdot\Delta^{\mathbf{g}}\right)^{-1}\\&\cdot\left\{\nabla_{\mathbf{h}}\mathbf{H}\cdot\mathbf{P}_g-(\mathbf{Q}-\mathbf{H})\cdot\nabla_{\mathbf{c}}\mathbf{P}_g\cdot\Delta^{\mathbf{h}^T}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{t}\cdot\Delta^{\mathbf{h}}\right\}\end{aligned} \tag{26}$$

今度はリンク交通量について考えよう．式(12)，(21)をまとめると，リンク交通量 $\mathbf{x}$ は高速経路交通量 $\mathbf{h}$ の関数として，以下のように与えられる．

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(\mathbf{h})&=\Delta^h\mathbf{h}+\Delta^g\mathbf{g}(\mathbf{h})\\&=\Delta^h\mathbf{h}+\Delta^g\mathbf{g}(\mathbf{h}_0+\mathbf{h}_s)\\&\approx\Delta^h\mathbf{h}+\Delta^g(\mathbf{g}(\mathbf{h}_0)-G\cdot\mathbf{h}_s)\\&=\Delta^h\mathbf{h}+\Delta^g\mathbf{g}(\mathbf{h}_0)-\Delta^g\cdot G\cdot(\mathbf{h}-\mathbf{h}_0)\end{aligned} \tag{27}$$

ここで，$\Delta^g\mathbf{g}(\mathbf{h}_0)$ は計算時間を短縮するために事前に計算しておき，定数として与える．$\Delta^g\mathbf{g}(\mathbf{h}_0)$ を $\mathbf{x}(\mathbf{h}_0)$ とおくとリンク交通量は以下の式のように与えられる．

$$\mathbf{x}(\mathbf{h})=\mathbf{x}(\mathbf{h}_0)+\Delta^h\mathbf{h}-\Delta^g\cdot G\cdot(\mathbf{h}-\mathbf{h}_0) \tag{28}$$

4. 感度分析を用いた交通量配分計算法

本研究で用いる計算アルゴリズムは，逐次平均法を用いることとする．逐次平均法は，計算手順がシンプルであり，必要とする記憶容量も少ないという利点があり，実務的にも多用される手法を言える．ただし，計算の収束に必要な繰り返し計算回数がやや多くなる．

Step0：初期値の計算

予め，確率的利用者均衡配分を行い，ある状態(料金)におけるリンク交通量の初期値 $\mathbf{h}_0$, $\mathbf{x}(\mathbf{h}_0)$，およびその時の勾配行列 G を計算しておく．

Step1：初期実行可能解の設定

初期実行可能解を上述の $\mathbf{h}^0=\{h_{rs,m}^{(0)}\}$ として設定する．そして，高速経路交通量 $\mathbf{h}^0$ に対する以下の 4 つの計算を行う．

- ・リンク交通量　$\mathbf{x}(\mathbf{h}^0)$
- ・リンク旅行コスト　$\mathbf{t}(\mathbf{h}^0)$
- ・高速経路コスト　$\mathbf{c}_h(\mathbf{h}^0)$
- ・一般経路の期待最小コスト　$\mathbf{S}(\mathbf{h}^0)$

ここで,

$\mathbf{c}_h$ ：$c_{rs,m}$ を要素に持つ一般経路の旅行コストベクトル

$\mathbf{S}$ ：S_{rs} を要素に持つ一般経路の期待最小コストベクトル

全 OD 交通量をネットワーク上に確率配分し，得られた高速経路交通量を $\mathbf{h}^1$ とする．
繰り返し計算のカウントを n=1 とする．

Step2：高速経路交通量の更新

高速経路交通量 $\mathbf{h}^n$ に対する以下の 4 つの計算を行う．

- ・リンク交通量　$\mathbf{x}(\mathbf{h}^n)$
- ・リンク旅行コスト　$\mathbf{t}(\mathbf{h}^n)$
- ・高速道路の経路コスト　$\mathbf{c}_h(\mathbf{h}^n)$
- ・一般道路の期待最小コスト　$\mathbf{S}(\mathbf{h}^n)$

Step3：降下方向ベクトルの算出

STEP2 で得られた高速経路コスト $\mathbf{c}_h\left(\mathbf{h}^n\right)$ および一般経路の期待最小コスト $\mathbf{S}\left(\mathbf{h}^n\right)$ の下で全 OD 交通量をネットワーク上に確率的利用者配分を行い，得られた高速経路交通量を $\mathbf{h}^n$ とする．降下方向ベクトル $\mathbf{d}^n = \left\{d_{rs,m}^n\right\}$ を次式によって算出する．

$$\mathbf{d}^n = \mathbf{h}^n - \mathbf{h}^{n-1} \tag{29}$$

Step4：解の更新

これを次式に代入して，高速経路交通量を更新する．

$$\mathbf{h}^{n+1} = \mathbf{h}^n + \frac{1}{n+1} \cdot \mathbf{d}^n \tag{30}$$

Step5：収束判定

以下に示す収束条件が満たされていなければ，n=n+1 として Step2 に戻る．収束条件式が満たされていれば，計算を終了しリンク交通量 $\mathbf{h}^{n+1}$ を解として出力する．

Step5 の収束判定の方法については，やや注意が必要である．逐次平均法の場合，ステップサイズが徐々に減少するため，n 回目繰り返しでの解と n+1 回目繰り返し計算での解との乖離も徐々に減少するため，均衡状態への収束状況を把握が困難になる．通常，以下のような収束判定指標を用いられることから，本研究ではこの収束判定指標を採用した．

$$D^{(n)} = \max_{m \in M} \left| h_{rs,m}{}^{(n)} - h_{rs,m}{}^{(n-1)} \right| < \varepsilon \tag{31}$$

上式は交通量に基づく指標であり，比較的容易であることから実務で使われることが多い．直感的には，収束が進めばこれらの判定指標は次第に小さくなっていくことが予想される．しかし，実際には $D^{(n)}$ が小さくなっても必ずしも厳密解に近づいているとは限らず，また，この指標は解法によって異なった挙動を示すこともある．

5. 感度分析手法の問題点

感度分析を用いた交通量配分では，予め，式(26)で与えられる勾配行列を計算する必要がある．しかし，この勾配行列は，[一般経路交通量×高速経路交通量]の行列であり，ネットワークの規模が大規模になると計算機容量の関係で計算ができないという問題点が考えられる．そこで，本研究では勾配行列を簡略化した計算手法を提案する．

勾配行列の $\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{t}$ の各成分は，BPR 関数を交通量で微分した式(32)で与えられる．

$$\frac{\partial t_a}{\partial x_a} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{t_{a0}\left(1+\alpha\left(\frac{x_a}{C_a}\right)^{\beta}\right)\right\} = t_{a0} \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \frac{1}{C_a{}^{\beta}} \cdot \left(x_a\right)^{\beta-1} \tag{32}$$

ここで，t_a はリンク a の旅行コスト，t_{a0} はリンク a の自由旅行コスト，x_a はリンク a の交通量，C_a はリンク a の交通容量，α, β は BPR 関数のパラメータである．

式(32)では，交通量に対して交通容量が大きければ，$\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{t}$ の各成分は非常に小さくなると考えられる．このことから，$\nabla_{\mathbf{c}}\mathbf{P} \cdot \Delta^{\mathbf{g}^T} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{t} \cdot \Delta^{\mathbf{g}}$ を微小，つまり $\mathbf{0}$ と仮定すると，式(26)の勾配行列は以下のように与えることができる．

$$G = \nabla_{\mathbf{h}}\mathbf{H} \cdot \mathbf{P} \tag{33}$$

式(33)は[一般経路交通量×総高速経路交通量]の行列である．高速経路交通量は一般経路交通量に対して非常に小さくなることから，勾配行列を簡略化することで大幅な計算機容量を削減することができると考えられる．

6. まとめ

本研究では，感度分析を用いた交通量配分の問題点を勾配行列計算式の簡略化を行うことで解決する方法を提案した．今後，本研究で提案した計算手法を仮想ネットワークで適用し，検討を行うとともに，大規模ネットワークで適用して，その有意性を検討する．その結果については講演時に発表する．

参考文献

1) Chan,Y.: A Method to Simplify Network Representation in Transportation Planning，*Transportation Research*，Vol.10，pp.179-191，1976
2) 飯田恭敬，高山純一，横山日出男：メッシュ分割によるネットワーク表示の簡略化手法を用いた交通量配分計算法，土木計画学研究・論文集，No.2，pp.149-156，1985
3) 飯田恭敬，朝倉康夫，広川誠一，鷹尾和享：ネットワークの分割およびバンドリングによる交通量配分計算の効率化，土木計画学研究・講演集，No11，pp.227-234，1988
4) 佐々木綱，朝倉康夫，楊海：連続的空間における単一 OD ペアに関する交通量配分，土木計画学研究・講演集，No.11，pp.23-30，1988
5) 飯田恭敬，朝倉康夫，楊海，進士肇：ネットワークの連続体近似による交通量配分，土木計画学研究・講演集，No.12，pp.543-550，1989
6) Connors, R.D.: Sensitivity analysis of the variable demand probit stochastic user equilibrium with multiple user-classes，*Transportation Research Part B*，Vol.41，pp.593-615，2007.
7) Connors, R.D.: Aggregation Of Traffic Networks Using Sensitivity

Analysis, *UTSG*, January 2008, 2A1.1-2A1.11
8) 岡本裕也，中山晶一朗，高山純一：感度分析を用いた確率的利用者均衡配分の効率的計算，土木計画学研究・講演集，No.42，CD-ROM，2011

(2011. 5. 6 受付)

EFFICIENT CALCULATION OF STOCHASTIC USER EQUILIBRIUM WITH ROUTE AGGREGATION USING SENSITIVITY ANALYSIS

Yuya OKAMOTO, Sho-ichiro NAKAYAMA and Jun-ichi TAKAYAMA

Assignment of route flows is required when examining fare discount of some routes on urban expressways. In general, traffic assignment of a large-scale road network needs much computation capacity and computation time, and work of data entry and displaying results is also very tough. It is important to reduce computational cost and capacity especially when traffic assignment is made many times. Aggregation of traffic network is one of the methods for reducing the computation cost, maintaining the accuracy of the results. In this study, a method of aggregating the routes that consist solely of general links is developed using sensitivity analysis, and traffic assignment is made between the aggregated general link route and routes which wholey or partially include expressway link. Then, the above method is applied to a simple network and its validity and computational time reduction are examined.