感度分析を用いた確率的利用者均衡配分の効率的計算手法*
An Efficient Calculation of Stochastic User Equilibrium using Sensitivity Analysis*

岡本裕也**・中山晶一朗***・高山純一****
By Yuya OKAMOTO** ・Shoichiro NAKAYAMA***・Jun-ichi TAKAYAMA****

1. 研究の背景と目的

広域を対象とした大規模道路ネットワーク(複数の県をまたぐネットワーク)の交通量配分を行うには,膨大な計算機容量と計算時間を要し,データ入力,結果表示のための作業量も膨大なものとなる.配分結果の精度を確保しつつ,計算費用を減らすためには,計算の効率化とネットワーク表示の工夫が必要となる.

これまで,計算の効率化についての研究[1)~4)]は多くなされているが,ネットワークの簡略化,集約化についての研究は,それほど多くはないように感じられる.しかし,前者については,ある程度の大きさのネットワークまでは効率的に計算を行うことができるが大規模ネットワークでは計算機が限界に達し,計算できない可能性がある.それに対し,ネットワークの集約化では,ネットワークそのものを縮小させるため,配分にかかる計算費用を大幅に短縮できると考えられる.そこで,本研究では,ネットワーク集約化の観点から計算の効率化(計算費用の短縮)を図る.

ネットワーク集約化の目的は,実際のネットワークよりも規模(リンク,ノード数)の小さい計算用のネットワークを合理的に作成することにあると考えられる.最も簡単な方法として,主要なリンク(幹線道路)のみを抽出し,他のリンクを削除する方法が挙げられるが,不要なリンクを削除しているため,計算費用の節約には寄与しても,配分結果に対する精度が保証されず,交通計画の基本データとしての利用価値が減ずることになる.

これに対し,Connors[5)] の提案する感度分析を用いたネットワークの集約化は,有料道路または,公共交通と一般道路を含むネットワークにおいて,一般道路を一本の仮想リンクに集約することで,計算時間を短縮することができる.本研究では,前述の感度分析を用いたネットワーク集約方法を大規模ネットワークに適用し,感度分析を用いた集約化の妥当性を検証する.

*キーワーズ:交通ネットワーク分析

**学生員,工学,金沢大学大学院自然科学研究科
(石川県金沢市角間町,Mail:doken-y@stu.kanazawa-u.ac.jp)
***正会員,博(工),金沢大学環境デザイン学系
(TEL:076-423-4614,E-mail:snakayama@t.kanazawa-u.ac.jp)
****フェロー会員,工博,同上
(TEL:076-423-4613,E-mail:takayama@t.kanazawa-u.ac.jp)

2. 確率的利用者均衡配分モデル

(1) モデルの概要

確率的利用者均衡配分において,道路利用者が認識している旅行コストに誤差項を導入するという考え方は,ランダム効用理論に基づく離散選択モデル(いわゆる非集計選択モデル)と同様のものである.すなわち,道路利用者の経路選択ルールに非集計選択行動モデルを適用したものが,確率的利用者均衡配分であると考えてよい.

非集計選択行動モデルにおける選択肢集合に相当するのが,OD 間の経路集合である.OD ペア rs 間の経路 k の効用関数の確定項を,経路コストのみの関数 $V_{rs,k} = -c_{rs,k}$ とおく.効用関数の誤差項をどのように仮定するかによって,ロジット型やプロビット型等のさまざまなモデルが考えられるが,本研究では,誤差項にガンベル分布(期待値=0,分散=$\pi^2/6\theta^2$)を仮定したロジット型のモデルに限ることとする.

このとき,OD ペア rs 間の経路選択肢集合 K_{rs} から経路 k が選ばれる確率は,

$$P_{rs,k} = \frac{\exp(-\theta \cdot c_{rs,k})}{\sum_{k \in K_{rs}} \exp(-\theta \cdot c_{rs,k})} \tag{1}$$

ここで,$P_{rs,k}$ は OD ペア rs 間において経路 k が選択される確率,$c_{rs,k}$ は OD ペア rs 間の経路 k の旅行コスト(道路料金の時間換算分を含む),K_{rs} は OD ペア rs 間の経路選択肢集合,θ は分散パラメータである.したがって,経路交通量は以下の式で表わされる.

$$f_{rs,k} = q_{rs} \cdot P_{rs,k} = q_{rs} \cdot \frac{\exp(-\theta \cdot c_{rs,k})}{\sum_{k \in K_{rs}} \exp(-\theta \cdot c_{rs,k})} \tag{2}$$

ここで,$f_{rs,k}$ は OD ペア rs 間において経路 k の経路

交通量，q_{rs} はODペア rs 間のOD交通量である．

また，交通量保存則は

$$\sum_{k \in K_{rs}} f_{rs,k} - q_{rs} = 0 \quad \forall rs \in \Omega \tag{3}$$

ここで，Ω は OD ペアの集合である．なお，式(3)から常に $f_{rs,k} > 0$ であるから，経路交通量の非負条件は自明である．

経路交通量とリンク交通量の関係は，

$$x_a = \sum_{rs \in \Omega} \sum_{k \in K_{rs}} \delta_{rs,k}^a \cdot f_{rs,k} \quad \forall a \in A \tag{4}$$

ここで，x_a はリンク a の交通量，$\delta_{rs,k}^a$ はODペア rs 間の経路 k にリンク a が含まれるとき1，含まれないとき0となる変数，A はリンク a の集合である．

ODペア rs 間の経路 k の旅行コスト $c_{rs,k}$ は，経路を構成するリンクの旅行コストの和を用いて，以下のように表わされる．

$$c_{rs,k} = \sum_{a \in A} \delta_{rs,k}^a \cdot t_a \quad \forall rs \in \Omega, k \in K_{rs} \tag{5}$$

ここで，t_a はリンク a の旅行コスト(道路料金の時間換算分を含む)である．

⑵ リンクパフォーマンス関数

本研究では，リンク旅行時間の計算式として式(1)で与えられるBPR関数を用いることにする．式(1)は通常のBPR関数に有料道路を考慮し，料金項を付加したものである．ただし，一般道路では通行料金 ξ_a は0で設定する．

$$t_a(x_a) = t_{a0} \cdot \left\{ 1 + \alpha \cdot \left(\frac{x_a}{c_a} \right)^{\beta} \right\} + \frac{\xi_a}{\omega} \tag{6}$$

ここで，$t_a(x_a)$：リンク a の旅行時間，t_{a0}：リンク a の自由旅行時間($x_a = 0$)，c_a：リンク a の交通容量，α, β：BPR関数のパラメータ，ξ_a：リンク a の通行料金，ω：時間評価値である．

3. 感度分析の定式化

⑴ リンク交通量

経路交通量の式(1)をベクトル表示すると

$$\mathbf{f} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{P} \tag{7}$$

ここに，$\mathbf{f}$ はODペア rs 間において経路 k の経路交通量 $f_{rs,k}$ を要素に含む経路交通量ベクトル，$\mathbf{q}$ はODペア rs 間のOD交通量 q_{rs} を要素に含むOD交通量ベクトル，$\mathbf{P}$ は OD ペア rs 間において経路 k が選択される確率 $P_{rs,k}$ を要素に持つ選択確率ベクトルである．ここで，$\mathbf{f}$ は経路のベクトルで，$\mathbf{f} = (f_{11,1}, \cdots, f_{21,2}, \cdots)^T$ であり，Tは転置である．本論文では，今後断りがない限り，ベクトルは列ベクトルとし，基本的にブロック体の英文字はベクトルもしくは行列を表すこととする．

リンク交通量の式(4)をベクトル表示にすると，

$$\mathbf{x} = \Delta \cdot \mathbf{f} \tag{8}$$

ここで，$\mathbf{x}$ はリンク a の交通量 x_a を要素に持つリンク交通量ベクトル，$\mathbf{f}$ はODペア rs 間において経路 k の経路交通量 $f_{rs,k}$ を要素に含む経路交通量ベクトル，Δ は $\delta_{rs,k}^a$ を要素に持つリンク・経路接続行列（パス‐リンクインシデンスマトリックス）である．

経路コストの式(5)をベクトル表示すると

$$\mathbf{c}(\mathbf{f}) = \Delta^T \cdot \mathbf{t}(\Delta \cdot \mathbf{f}) \tag{9}$$

ここで，$\mathbf{c}(\mathbf{f})$ はODペア rs 間の経路 k のコスト $c_{rs,k}$ を含む経路コストベクトル，Δ^T はパス‐リンクインシデンスマトリックスの転置，$\mathbf{t}$ はリンク a の旅行コスト t_a を含む旅行コストベクトルである．

式(8)の両辺の差をギャップ関数 $\mathbf{d}$ と置くと，

$$\mathbf{d}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \mathbf{x} - \Delta \cdot \mathbf{q}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{c}(\mathbf{x})) \tag{10}$$

ここで，$\mathbf{d}$ は変数 $\mathbf{x}$，$\mathbf{s}$ を含むギャップ関数ベクトル，$\mathbf{s}$ は需要変動パラメータである．

このギャップ関数の要素は，確率的利用者均衡の制約条件より全て $\mathbf{0}$ である．$\mathbf{s}$ は変動パラメータであり，感度分析の際に変動するものである．つまり，式(10)は，需要の変動に焦点を置いているといえる．

式(8)を，リンク交通量 $\mathbf{x}$，需要変動パラメータ $\mathbf{s}$ で微分し，式(8)をテーラー展開する．また，OD需要 $\mathbf{q}$ は変動パラメータ $\mathbf{s}$ の関数として，$\mathbf{q}(\mathbf{s})$ と表現でき，本研究では最も簡単な場合を考えているため，$\mathbf{q}(\mathbf{s}) = \mathbf{q} + \mathbf{s}$ とみなすことができる．そのため，$\nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{q}(\mathbf{s})$ は $\mathbf{I}$ となる．以上から，以下の式が与えられる．

$$\mathbf{x}(\mathbf{q} + \mathbf{s}) = \mathbf{x}(\mathbf{q}) + \left(\mathbf{I} - \Delta \cdot \mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{c}} \mathbf{P} \cdot \Delta^T \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{t} \right)^{-1} \Delta \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{s} \tag{11}$$

式(11)の第2項については，変動パラメータ $\mathbf{s}$ に依存しない勾配行列 $\mathbf{G}$ を式(12)で与えることができる．

$$\mathbf{G} = \left(\mathbf{I} - \Delta \cdot \mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{c}} \mathbf{P} \cdot \Delta^T \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{t} \right)^{-1} \Delta \cdot \mathbf{P} \tag{12}$$

以上から，感度分析を用いたリンク交通量 $\mathbf{x}$ はOD需要 $\mathbf{q}(\mathbf{s})$ の関数として式(13)として定式化される．

$$\mathbf{x}(\mathbf{q} + \mathbf{s}) = \mathbf{x}(\mathbf{q}) + \mathbf{G} \cdot \mathbf{s} \tag{13}$$

⑵ 期待最小コスト（満足度）

確率的利用者均衡配分はランダム効用理論に基づいている．ランダム効用理論では，効用最大の選択肢（つまり認知旅行コスト最小の経路）が選択されると仮定しているので，道路利用者が経路選択によって得られると認識

している効用は$\max_{k\in K_{rs}} U_{rs,k}$（ただし，$U_{rs,k}$ は経路 k の効用）である．$U_{rs,k}$ はランダムに変動する誤差項を含んだ確率変数であるから，$\max_{k\in K_{rs}} U_{rs,k}$ も確率変数となる．$\max_{k\in K_{rs}} U_{rs,k}$ の平均値は「道路利用者が認識している効用」の平均値であると解釈できる．これを「期待最小効用」と呼ぶ．期待最大効用を$-\theta$で除して旅行コストの次元に変換したものが「期待最小コスト」であり，次式によって計算される．

$$S_{rs} = -\frac{1}{\theta}\ln\sum_{k\in K_{rs}}\exp\left(-\theta c_{rs,k}\right) \qquad (14)$$

ここで，S_{rs} は OD ペア rs 間の期待最小コスト，θ はロジットモデルのパラメータ，$c_{rs,k}$ は OD ペア rs 間において経路 k の経路コストである．

式(14)を感度分析で用いるリンク交通量を考慮し，ベクトル表示すると以下の式(15)になる．感度分析で集約したリンクコストには式(15)を用いることとする．

$$\mathbf{S} = -\frac{1}{\theta}\ln\sum_{k\in K_{rs}}\exp\left(-\theta\mathbf{c}\left(\mathbf{x}\left(\mathbf{q}+\mathbf{s}\right)\right)\right) \qquad (15)$$

ここで，$\mathbf{S}$ は OD ペア rs 間における期待最小コストベクトル，$\mathbf{c}$ は $c_{rs,k}$ を要素に含む経路コストベクトルである．

経路コストベクトル $\mathbf{c}\left(\mathbf{x}\left(\mathbf{q}+\mathbf{s}\right)\right)$ については，以下の式(16)で与えられる．

$$\mathbf{c}\left(\mathbf{x}\left(\mathbf{q}+\mathbf{s}\right)\right) = \Delta^T \cdot \mathbf{t}\left(\mathbf{x}\left(\mathbf{q}+\mathbf{s}\right)\right) \qquad (16)$$

ここで，Δ^T はパス - リンクインシデンスマトリックスの転置行列，$\mathbf{t}\left(\mathbf{x}\left(\mathbf{q}+\mathbf{s}\right)\right)$ は感度分析適用リンク交通量 $\mathbf{x}\left(\mathbf{q}+\mathbf{s}\right)$ におけるリンクコストベクトルである．

4. 仮想単純ネットワークにおける交通量配分

この節では，前節までに説明した計算アルゴリズムを用いて感度分析を用いてネットワークを集約する計算プログラムを構築し，その計算例を示す．その際に計算プログラムを適用するネットワークは**図 1** に示す仮想単純ネットワークとする．各リンクパラメータについては，図中の[自由旅行時間，交通容量]で示す．

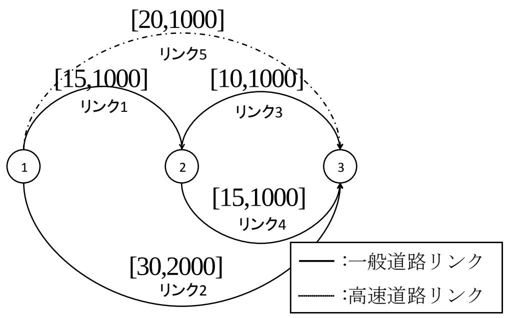


図 1　仮想単純ネットワーク図

このネットワークでは多起点 1 終点のトリップを考える．OD ペアは 2 組存在し，ノード 1 からノード 3 までのトリップを OD ペア 1，ノード 2 からノード 3 までのトリップを OD ペア 2 とする．また OD ペア 1 に対して経路が 4 つ，OD ペア 2 に対して経路が 2 つ存在し，OD ペア 1 についてリンク 1 とリンク 3 から成る経路を経路 1，リンク 1 とリンク 4 から成る経路を経路 2，リンク 2 のみから成る経路を経路 3，リンク 5 のみから成る経路を経路 4 とし，OD ペア 2 についてリンク 3 のみから成る経路を経路 4，リンク 4 のみから成る経路を経路 4 とする．ここで，リンク 1～4 を一般道路，リンク 5 を高速道路とし，一般道路ネットワークを集約化し，**図 2** のように高速道路リンクと一般道路リンクの二本と考え，配分計算を行う．BPR 関数のパラメータ α, β については，それぞれ 1.0，2.0 で設定する．

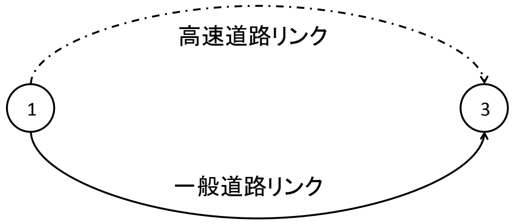


図 2　集約化後ネットワーク

図 1 の詳細なネットワーク(確率的利用者均衡配分 : SUE)と**図 2** の集約後のネットワーク(感度分析を用いた交通量配分 : SA)の高速道路リンクの配分結果を**表 1** に示す．また，確率的利用者均衡配分，感度分析を用いた交通量配分の OD 交通量については OD1, OD2 ともに 1000 台で数値実験を行う．配分計算には逐次平均法を用いて配分計算を行う．結果を以下の**表 1** に示す．

表 1　計算時間と配分結果の比較

	計算時間(s)	リンク交通量(台)
SUE	0.11	304
SA	0.06	303

表 1 より，高速道路のリンク交通量について，確率的利用者均衡配分では 304 台，感度分析を用いた交通量配分では 303 台とほぼ近似できている．また，計算時間(経路交通量初期値 : 100)については，感度分析を用いた交通量配分では 0.06 秒，確率的利用者均衡配分では 0.11 秒と感度分析を用いた交通量配分では 0.05 秒(45%)の短縮ができた．以上のことから，配分にかかる精度，計算時間共に良好であり，感度分析を用いた交通量配分は妥当であると考えられる．

5.　京阪神道路ネットワークへの適用

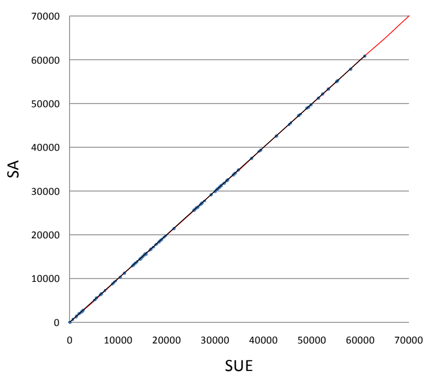
本節では計算プログラムを適用する京阪神道路ネットワークについて説明する．用いるネットワークデータについて，ノード数は全部で4254であり，そのうち一般道路が3797，旧JHが205，阪神高速道路が254である．リンク数は全部で 12567 であり，そのうち一般道路が11976，旧JHが305，阪神高速道路が286である．ゾーン数は807であり，セントロイドはゾーンに1つずつ存在する．OD数については，190045である．BPR関数のパラメータα,βについては，それぞれ0.42，2.82 とする．時間価値については，48.78円/分である．

ネットワークの概略図を**図3**に示す．図において，緑線が阪神高速道路，橙線が旧JH，青線が国道，その他が県道，市道等の道路を表している．

図3　京阪神道路ネットワーク概略図

図3のネットワークにおいて，阪神高速道路，つまり緑線を対象とし，その他の一般道路を集約し交通量配分を行う．

以上のデータを用いて，感度分析を用いた交通量配分(SA)と確率的利用者均衡配分(SUE)の配分結果を**図 4** に示す．ここで，**図4**は，対象とする阪神高速道路のみのリンク交通量を示している．



―：45度線

図4　SAとSUEのリンク交通量（阪高のみ）の比較

図4を見てみると，感度分析を用いた交通量配分(SA)と確率的利用者均衡配分(SUE)の配分結果は，ほぼ同じ値となり，相関係数は1と精度がよいことがわかる．

また，**表2**に計算時間と計算回数の比較を示す．

表2　計算時間と計算回数の比較

	計算時間(min)	計算回数(回)
SUE	2460	582466
SA	36	14473

表 2 を見てみると，計算時間(経路交通量初期値：10)については，感度分析を用いた場合が36分，確率的利用者均衡の場合が2460分と約98%の時間短縮が可能となり，計算スピードが非常に速くなったことがわかる．さらに，収束計算回数(収束条件：0.1)についても，感度分析を用いた場合が14473回，確率的利用者均衡の場合が582466回と大幅に減少している．

以上より，感度分析を用いた交通量配分(SA)は計算時間の短縮ができ，精度も維持できることから妥当な簡略化計算法であると考えられる．

6.　まとめ

本研究では，感度分析によるネットワーク集約化手法を用いた交通量配分計算法の妥当性の検討を行った．仮想ネットワーク，京阪神道路ネットワークにおいて，計算時間,推計精度ともに良好な結果が得られた.よって，感度分析を用いた交通量配分は確率的利用者均衡配分を効率的に計算する方法として妥当な手法であることが確認された．

参考文献

1) 飯田恭敬・高山純一・横山日出男：メッシュ分割によるネットワーク表示の簡略化手法を用いた交通量配分計算法，土木計画学研究・論文集，No.2，pp.149-156，1985
2) Chan,Y.：A Method to Simplify Network Representation in Transportation Planning，Transp．Res.，Vol.10，pp.179～191，1976
3) 佐々木綱・朝倉康夫・楊　海：連続的空間における単一ODペアに関する交通量配分，土木計画学研究・講演集，No.11，pp.23-30，1988
4) 飯田恭敬・朝倉康夫・楊　海・進士　肇：ネットワークの連続体近似による交通量配分，土木計画学研究・講演集，No.12，pp.543-550，1989
5) Connors，R．D：Aggregation Of　Traffic Networks Using Sensitivity Analysis，UTSG，January 2008，2A1.1‐2A1.11