

パーティクルフィルタの設計と交通流への適用に関する考察*

Design of Particle Filter and Application to Traffic Flow*

小林剛**・アンブルヴェル・アルラナンダム***・中辻隆****

By Takashi KOBAYASHI**・Anburuvel ARULANANTHAM***・Takashi NAKATSUJI****

1. はじめに

複雑な交通状態を把握する必要がある現代の交通流シミュレーションにおいては、観測データを用いたフィードバックによる動的推定が、広く用いられている。このフィードバック推定法において、最も代表的なものが、カルマンフィルタ (Kalman Filter : KF) である。KFは1960年代に提唱された方法論であり、コンピュータが発達する以前から一般的となってきた。しかし、KFは線形事象しか取り扱うことができないという点で制限が強く、実際に発生する諸事象に対応するための改良が数多く行われてきている。その例としては、拡張カルマンフィルタ (Extended Kalman Filter : EKF) や、Unscentedカルマンフィルタ (Unscented Kalman Filter : UKF) ¹⁾ などがあげられる。

パーティクルフィルタ (Particle Filter : PF) も同様に、KFの制限を克服すべく提案されたフィードバック推定法である。PFでは、ランダムサンプリングによるモンテカルロ近似法を導入し、非線形事象の動的推定を可能にしている³⁾。

本稿では、PFによるフィードバック推定システムの概要について述べた上で、交通流への適用可能性についての考察を行う。特に、この適用結果を元にして、PFにおいて重要な位置を占める、プロポザル分布とリサンプリングによる、システム設計および推定結果への影響を記述する。

2. パーティクルフィルタの設計

(1) フィルタによる動的推定システム³⁾

フィルタを用いて状態予測を行う動的推定を、フィルタリング (Filtering) と呼ぶ。これは、誤差を含む観測データから対象の状態を予測する方法論である。

いま、 \mathbf{x}_k を時刻 k における直接観測できない状態変量のベクトル、 \mathbf{y}_k を直接観測できる観測変量のベクトルとすれば、状態空間モデルは次の式であらわされる。

$$\text{状態方程式 } \mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{v}_k \quad (1)$$

$$\text{観測方程式 } \mathbf{y}_k = \mathbf{g}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{f}(\cdot)$ は非線形状態遷移行列関数、 $\mathbf{g}(\cdot)$ は非線形観測行列関数、また、 \mathbf{v}_k は時間変化に関する誤差、 \mathbf{w}_k は観測誤差である。状態方程式とは、時刻 k から時刻 $k+1$ への状態変量の時間発展を記述し、観測方程式とは、状態変量から観測変量が得られる様子を記述している。

時刻 k までの観測値の集合を $\mathbf{Y}_k = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k\}$ とすれば、求めるべき \mathbf{x}_k の最小分散推定量 (最確値) は事後確率分布 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k)$ を用いて次のようにあらわされる。

$$\hat{\mathbf{x}}_k = E(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k) = \int \mathbf{x}_k p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k) d\mathbf{x}_k \quad (3)$$

観測値 \mathbf{Y}_k から状態 \mathbf{x}_k の事後確率 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k)$ を直接推定することは困難であるため、フィルタリングではベイズの定理を用いて推定を行う。

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k) &= p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_k, \mathbf{Y}_{k-1}) = \frac{p(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k, \mathbf{Y}_{k-1})}{p(\mathbf{y}_k, \mathbf{Y}_{k-1})} \\ &= \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{k-1})}{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{Y}_{k-1})} \end{aligned} \quad (4)$$

$p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)$ は、ある状態 \mathbf{x}_k のときに、観測値 \mathbf{y}_k を得る確率であり、観測方程式から与えられる。また、 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{k-1})$ は、時刻 k における事前確率であり、次のようにあらわされる。

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{k-1}) &= \int p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{Y}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \\ &= \int p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{Y}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \end{aligned} \quad (5)$$

$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_{k-1})$ は時刻 $k-1$ における事後確率である。また、 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$ は時刻 $k-1$ から時刻 k への状態推移確率であり、状態方程式から与えられる。

フィルタリングでは、時刻 $k-1$ までの観測から時刻 k の状態を推定するステップ (Prediction : 予測) と、予測

*キーワード : パーティクルフィルタ、フィードバック推定、交通流

**学生員、工学、北海道大学大学院工学院

(北海道札幌市北区北13条西8丁目、

TEL: 011-706-6217、E-mail: go-goo-go@eng.hokudai.ac.jp)

***非会員、工修、北海道大学大学院工学院

(北海道札幌市北区北13条西8丁目、

TEL: 011-706-6217、E-mail: aanbu007@eng.hokudai.ac.jp)

****正員、工博、北海道大学大学院工学研究院

(北海道札幌市北区北13条西8丁目、

TEL: 011-706-6215、E-mail: naka@eng.hokudai.ac.jp)

と状態推移確率から事後確率を推定するステップ (Update : 更新) から成っている。フィルタリングとは、この二つのステップにより各時刻の事後確率 $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k)$ を求めることで、状態推定を行っていくシステムである。

(2) モンテカルロ近似法と重度サンプリング⁴⁾

PFにおいては、先に述べたベイズによる更新と、モンテカルロ積分を用いたモンテカルロ近似法 (Monte Carlo Approximation) による最適推定によって構成されている。ベイズ推定においては確率密度関数を求める際に、多重積分 $H = \int k(x)dx$ の計算を行うことがしばしば必要となる。モンテカルロ近似法を用いれば、大型計算機を必要とすることなく精度の高い結果を得ることができる。

確率密度関数 $\pi(x)$ が $k(x)$ の台を含むとすると、積分 H を次のように書き換える。

$$\begin{aligned} H &= \int k(x)dx = \int \frac{k(x)}{\pi(x)}\pi(x)dx \\ &= \int h(x)\pi(x)dx \\ &= E_{\pi}[h(x)] \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 $h(x) = \frac{k(x)}{\pi(x)}$ であり、 E_{π} は $\pi(x)$ に関する期待値である。このとき、 x_1, \dots, x_n を、 $\pi(x)$ を確率密度関数とする分布からの独立標本とすると、大数の法則より $n \rightarrow \infty$ のとき、

$$\hat{H} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(x_i) \rightarrow H \quad (7)$$

と収束するので、 \hat{H} によって多重積分 H を推定することができる。

ここで、 $\pi(x)$ からの確率標本の発生が難しい場合を考える。この場合、乱数発生が容易な別の確率密度関数 $g(x)$ を用いて、モンテカルロ積分と同様の操作を行うことができる。

まず、 E_{π} を次のように書き換える。

$$\begin{aligned} E_{\pi}(h(x)) &= \int h(x)\pi(x)dx \\ &= \int \left(\frac{\pi(x)}{g(x)} h(x) \right) g(x)dx \\ &= E_g \left[\frac{\pi(x)}{g(x)} h(x) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 E_g は $g(x)$ に関する期待値である。

次に x_1, \dots, x_n を、 $g(x)$ を確率密度関数とする分布からの独立標本として、

$$\hat{E}_{\pi}(h(x)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\pi(x_i)}{g(x_i)} h(x_i) \quad (9)$$

として求めればよい。このように、重み付きによってサンプリング近似を行う方法を、重度サンプリング (Imp

ortance Sampling) と呼んでいる。また、新たに発生させる別の分布関数のことを、プロポーザル分布 (Proposal Distribution) と呼ぶ。

(3) SISとパーティクルフィルタ

PFは先述した事後確率 $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k)$ と、事前確率 $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_{k-1})$ をこれらに従うランダムサンプリングによって近似するものである。そこでは、重度サンプリングを時刻推移の中で逐次的に用いる、逐次重度サンプリング (Sequential Importance Sampling : SIS) が広く用いられている。

いまタイムステップを $n=0,1,2,\dots$ とすれば、

1. イニシャルサンプリング

サンプル $\mathbf{x}_0^{(i)}$ を初期分布 $p(\mathbf{x}_0)$ から生成する。
($i = 1, \dots, N$)

2. 予測サンプルの生成

式 (1) の状態モデルによって時刻 $k-1$ のサンプル $\mathbf{x}_{k-1}^{(i)}$ を推移させ、予測サンプルを生成する。 \mathbf{v} はあらかじめ設定した誤差分布である。

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{(i)}) + \mathbf{v}_k^{(i)} \quad (10)$$

3. サンプルの重度計算

プロポーザル分布を用いてサンプルに重み付けする。

$$W_k^{(i)} = p(\mathbf{y}_k|\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)}) \quad (11)$$

ここで $p(\mathbf{y}_k|\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)})$ は、式 (2) の観測モデルによって推定する。

4. ノーマライズ

計算された重度は、すべてノーマライズしておく。

$$W_k^{*(i)} = \frac{W_k^{(i)}}{\sum_{j=1}^N W_k^{(j)}} \quad (12)$$

5. リサンプリングによる更新

サンプル集合 $\{\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)}\}$ から重度 $W_k^{*(i)}$ に比例する割合で N 個の新しいサンプル $\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)}$ を生成する。このリサンプリングが、いわばフィルタ機能を果たしている。

という1~5の手順を踏む。その後は、2~5の手順を繰り返し行ない、タイムステップを進めていく。図1は、Chen¹⁾によって示された、PFにおける予測サンプルの発生と、リサンプリングによる更新の様子である。

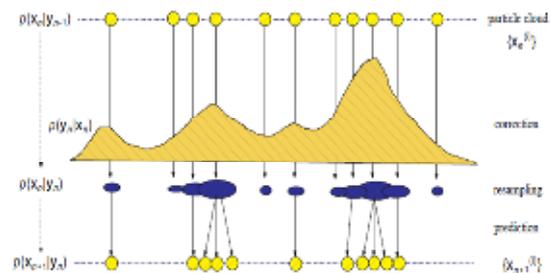


図1 PFによる予測と更新¹⁾

ある時刻 k における状態推定値 $\hat{\mathbf{x}}_k$ は、次のように重付き平均によって、期待値として求めることができる。

$$\hat{\mathbf{x}}_k = E(\mathbf{x}_k) \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} = \sum_{n=1}^N W^{*(i)} \hat{\mathbf{x}}_k^{(i)} \quad (13)$$

3. リサンプリングの影響

(1) リサンプリング手法について

リサンプリングはPFにおいて核を成す部分であり、コンピュータ処理をより速く、より正確に行うための改良及び提案が数多くなされている。本稿においては、Doucra²⁾によって示された4つのリサンプリング手法について評価を行う。

a) Multinomial Resampling

発生させるサンプルのインデックス番号を i とすれば、

1. (0,1]区間に一様乱数 u を発生させる
2. ノーマライズされた重度の累積分布関数 (Cumulative Distribution Function : CDF) を作成する
3. CDFによってソーティングされた後のインデックス s_i までの重度の和 $s_i = \sum_{j=1}^i W^{*(j)}$ を計算し、それぞれ計算していく
4. $s_{i-1} \leq u \leq s_i$ となるような s_i を見つけ、パーティクルのインデックス i を選択する
5. i が選択されたとき $\{\mathbf{x}^{(i)}, W^{*(i)}\}$ について、この $\mathbf{x}^{(i)}$ が新たなパーティクル $\mathbf{x}^{(j)}$ になる

この過程により、重度の高いサンプルが増え、重度の低いサンプルが消えることになる。

b) Stratified Resampling

Multinomial Resamplingを基本として、(0,1]区間を m 個の同じ長さの小区間に分け、小区間にひとつの一様乱数 $u^{(j)}$ ($j = 1, \dots, m$)を発生させる。

c) Systematic Resampling

同様にMultinomial Resamplingを基本として、サンプル数を N 個とすれば、(0,1/N]区間に1つサンプルを発生させ、あとは1/Nを足し算していく。

d) Residual Resampling

先に述べた三つのリサンプリングとは種が異なり、まず重度をサンプルに配分してから、配分しきれなかった一部分のみについてリサンプリングを行う。

(2) リサンプリング手法の選択評価

リサンプリングはコンピュータにとって非常に負荷のかかるパートであること、またリサンプリングによって、再現性に変化が出ること、これらから次の二つが最適な手法の候補に挙げられる。

- a) サンプル数が少ない (コンピュータへの負荷は少ない)、かつ再現性がよい

- b) サンプル数は多い (再現性はよい) が、コンピュータへの負荷は低い (処理時間が短い)

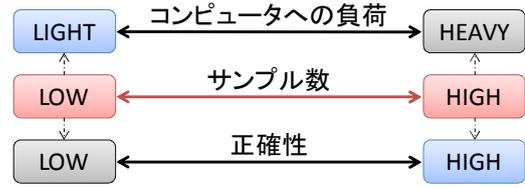


図2 リサンプリング手法の検討

a)について、サンプル数 100 個の場合の再現性を比較すると、RMSE、決定係数 R^2 ともに Systematic が最もよい値を示した。

b)について、サンプル数 1000 個の場合について、処理時間を比較した。4 つすべてが拮抗し、Residual のみが若干速いという状況である。しかし、Residual は再現性が極端に悪く、これはサンプル数を増やしても改善されなかった。

4. 交通流への適用性

(1) 誤差分布の設定とプロポーザル分布による近似

PFの強みの一つとして、フィルタリングにおける誤差分布が、正規分布にとられない設定が可能であるということが挙げられる。そこで、5分間交通量における車両感知器から得られるデータと、実際の観測量の間に存在する誤差の分布関数を、正規分布に形状の上で似ているラプラス分布として設定した上で、プロポーザル分布を正規分布としてフィルタリングを行うことにした (図3)。また、誤差はその分散を小さくするために、誤差率に換算して取り扱うことにした。

ある交差点における、車両感知器データと観測データ間の誤差 (誤差率) を48個得ることができた。図3には、実際の誤差率の分布と、正規分布、ラプラス分布の理論分布を示した。

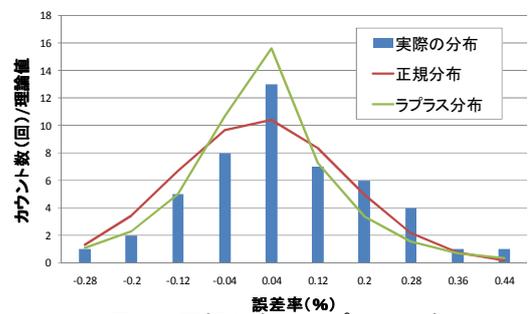


図3 正規分布とラプラス分布

プロポーザル分布を用いた近似計算が正しくできているかを、サンプル数を変えて確認したところ、サンプル数100個では十分な近似は行えていなかったが、サンプル数500個を超えると十分な近似が行えていた。また、サンプル数1000個になるとさらに精度が増し、サンプル数が増えるほど精度が増すこともわかった。

(2) 状態推定の結果

誤差データを得た交差点における、22のタイムステップにおいてPFによる5分間交通量推定を行った。サンプリングの確認をした際、サンプル数を増やしたほうが、精度が増すことがわかったので、サンプル1000個において推定を行った結果を図4に示す。結果としてRMSE、決定係数 R^2 ともに十分な推定値を得ることができた。

誤差分布をラプラス分布に変更しても十分な推定値が得られたことは、正規分布という制限があるKFに比べて、PFの汎用性が高いことを示す結果となりうる。

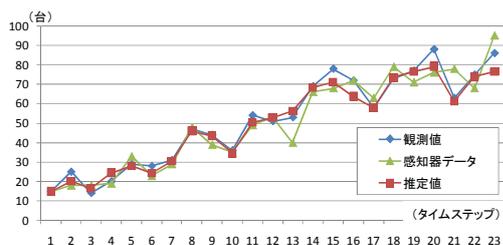


図4 PFによる推定値出力結果

5. プロポージアル分布による影響

プロポージアル分布によるPFへの影響を調べるため、再びサンプリングによる近似的を確認する。先ほどは正規分布がラプラス分布に近い形状を持っていたため、表現性の点でも問題はなかった。次は他の分布関数がプロポージアル分布としてなり得るのかどうか、検討を行う。理論上は、プロポージアル分布は正規分布にとらわれない設定が可能はずである。

(1) 一様分布

一様分布は発生範囲に制限を設けるため、今回はサンプリングに十分である $-5 \leq x \leq 5$ と設定した。そうすれば、いま0.5刻みで横軸をとれば、それぞれの発生確率は一律に1/20とすることができる。

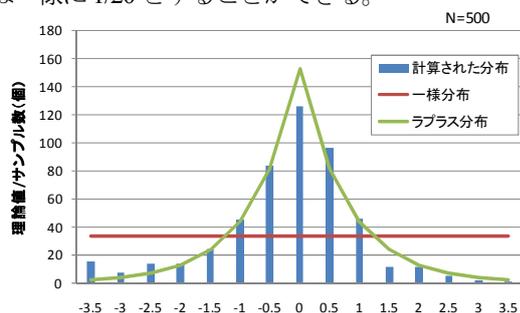


図5 一様分布からの近似 (サンプル500個)

サンプル数100個の場合はまるでサンプリングがうまくいかなかったものの、サンプル数500個を超えると正規分布の時とあまり変わらない結果が得られた(図5)。また、サンプル数1000個にしてもあまり変わらない結果が得られた。

ここから言えることとしては、KFでは正規分布に制

限されていたのに対し、PFでは一様分布にしても十分な結果が得られることができた。つまり、コンピュータへの負荷を調べ、負荷の軽いほうを選びたい。また、サンプル数500個の場合と1000個の場合が結果としてあまり変わらなかったことから、サンプル数500個付近が、精度とコンピュータ負荷を考慮した際に最も適当なサンプル数とも考えられる。

(2) ガンマ分布、カイ二乗分布

分布関数を発生させることが容易な例としては、表計算ソフトに元から入っている分布関数があげられる。Microsoft社のVisual Basicではカイ二乗分布(CHIDIST)や、ガンマ分布(GAMMADIST)を容易に発生させることができる。

しかし、これら二つの分布関数は発生範囲に制限があり、正の値を取ることが前提となっている。今回の場合は、誤差率をサンプリングにこれらはすべて正の値で構成されており、誤差率の分布サンプリングによって近似しようとしているので、負の値を取ること考えなければならない。よって、これら二つの分布関数をプロポージアル分布として取り扱うことはできない。プロポージアル分布を取り扱うには、形状だけではなく、その発生範囲を十分に考慮することが重要であると考えられる。

6. おわりに

本稿においては、PFの設計概要を示した上で、交通流推定への適用を行ない、その有用性を示したといえる。また、プロポージアル分布とサンプリングによる影響を調査し、PFのさらなる発展可能性を見出した。

今後の課題としては、他に数多くある発展型のPFによる検証や、速度データのフィードバック推定、路面状況や感知器の種類別の検証などが挙げられる。

最後に、車両感知器データを提供して下さった北海道警察本部交通管制センター杉本廣行様に、心から深謝の意を表します。

参考文献

- 1) Z. Chen : Bayesian filtering: From Kalman Filters to Particle Filters, and beyond
- 2) R. Douc, O. Cappé and E. Moulines : Comparison of resampling schemes for Particle Filtering, Proc. of Image and Signal Proceeding and Analysis (ISPA), pp.64-69, 2005
- 3) 加藤丈和 : パーティクルフィルタとその実装法、情報処理学会研究報告、2007
- 4) 小西貞則、越智義道、大森裕浩 : 計算統計学の方法ーブートストラップ・EM アルゴリズム・MCMCー、朝倉書店、2008