

# 渋滞と混雑を解消する交通需要管理施策の確率的インプリメンテーション\*

## Stochastic Convergence of Road User's Learning Process under a Hybrid Scheme of Tradable Bottleneck Permits and Congestion Pricing\*

和田健太郎\*\*・赤松隆\*\*\*・長江剛志\*\*\*\*

By Kentaro WADA\*\*・Takashi AKAMATSU\*\*\*・Takeshi NAGAE\*\*\*\*

### 1. はじめに

従来の混雑料金制度（CP）は、理論的には優れた交通混雑解消スキームであるが、そのスキームをインプリメントする際には、いくつかの前提条件が満たされなければならない：(1) 道路管理者が利用者の需要関数情報を正確に把握可能、(2) 均衡状態が実現する、(3) 道路上の混雑現象が統計学的な関数として表現される（i.e., speed-flow relationship）。しかし、この前提条件が現実に満たされることを保証するのは難しい。

従来のCPの理論が持つ上記の問題に対して、近年、CPを進化的に（試行錯誤的に）インプリメントする方法論（ECP）が複数提案されている[1, 2]。この方法論は、日々実現する観測交通量に基づいて混雑料金レベルを計算し、利用者に課するものであり、利用者の需要関数情報を必要としない：前提条件(1)が取り除かれる。さらに、これらのモデルでは（混雑料金を含む）交通費用に対する利用者の行動をモデル化することにより、社会的最適状態に至る交通流の調整プロセスを明示的に分析している。：前提条件(2)を保証することができる。

ECPの方法論は、一見すると、CPの理論の問題点を解消しているように見える。しかし、ECPでは前提条件(3)を解消することはできない。これは、ECPが（静学的な）交通混雑を解消することはできるが、（動学的な）交通渋滞を解消することができないことを意味している。なぜなら、2種類の混雑現象は外部不経済の発生メカニズムが全く異なるためである。ここで、交通混雑は交通量増加に伴う速度低下により負の外部性を生み出す。一方、交通渋滞は容量超過による待ち行列の発生により負の外部性を引き起こす。さらに、交通混雑に比べ交通渋滞の方がより深刻な負の外部性を生み出すため、後者を解消することがより重要である。

そこで、和田・赤松[3]は、交通渋滞と交通混雑を同時に解消し、かつ、詳細な利用者情報を必要としない交通需要管理スキームを提案した。これは、利用者の需要

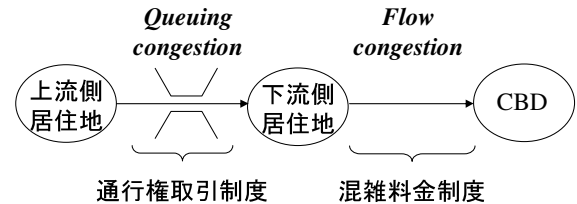


図-1 交通空間条件

関数情報を必要としない動的混雑制御スキーム“ボトルネック通行権取引制度”（TBP）[4, 5]を拡張したものである。TBPは次の2つのパートから構成される制度である：(a) 渋滞が頻発しているボトルネックを対象として、その地点を特定の時刻のみに通行できる権利（ボトルネック通行権）を道路管理者が設定・発行し、(b) その時刻別の通行権を自由に売買取引できる市場を創設する。具体的には、和田・赤松は、このTBPと観測交通量ベースの混雑料金制（FBCP）を整合的に組み合わせた合成スキームを提案し、その進化的なインプリメンテーション法を構築した。そして、単一ボトルネック・ネットワークを対象として、提案スキーム下の交通流のday-to-dayダイナミクスが、社会的余剰が最大となる社会的最適状態へと収束することを明らかにしている。

上記の結果は、確定論的な枠組みにおいて証明されたものである。即ち、利用者が現在の状況のみを参照してその振舞を確定論的に決定すると仮定されていた（myopic best response model）。一方で、現実の利用者の交通行動は“確率的”であり（i.e., 時に最適でない行動をとり）、また、日々の交通行動を通して“学習”している（i.e., 各選択肢に関する予測を立てている）と考えられる。そこで、本稿では、上記で示した合成スキームを確率的な状況下でインプリメントすることを考える。具体的には、利用者の交通行動を確率論的な学習モデル stochastic fictitious play を用いて表現する。そして、その利用者行動の結果生じる交通流の確率的なday-to-dayダイナミクスが社会的最適状態へ安定的に収束することを示す。

### 2. 状況設定

#### (1) 交通空間条件

本稿では、線形に2つの居住地が並ぶ道路ネットワークを対象とする（図-1）。ネットワーク内には、上流側、

\* キーワード：TDM, 交通制御, 交通流, 学習モデル

\*\* 学生員, 情修, 東北大学大学院情報科学研究科  
(〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-6,  
TEL: 022-795-7420; E-mail: wadaken@plan.civil.tohoku.ac.jp)

\*\*\* 正会員, 工博, 東北大学大学院情報科学研究科  
(同上, E-mail: akamatsu@plan.civil.tohoku.ac.jp)

\*\*\*\* 正会員, 情博, 電気通信大学大学院情報システム学研究科  
(〒198-8585 東京都調布市調布ヶ丘 1-5-1,  
TEL: 042-443-5667; E-mail: nagae@is.uec.ac.jp)

下流側の2つの居住地が存在し、各居住地に住む利用者は1つのCBDへとトリップを行う。このネットワークは、都心部と郊外部を結ぶ道路ネットワークを表したものである。また、交通渋滞と交通混雑が共存し、かつ、相互に影響を及ぼす最も基本的なケースである。相互作用は、下流側リンクを通行する各居住地の利用者を通して発生する。

上流側リンクのボトルネックは交通容量  $\mu$  を持つ *point queue* モデルで表現されていると仮定する。一方、下流側リンクは都市内道路ネットワークと流入交通量との定常的な関係が成り立つと仮定し、発生する交通混雑を平均的な遅れとして表現する。これは、複雑なリンク集合における混雑現象を、空間的に集約していることを意味する。下流側リンクの旅行時間は、単位時間当たりの交通量  $x$  に対する関数  $c(x)$  で表されると仮定する。また、各リンクにおいて追い越しが無い状況を想定し、First in First Out 条件は満たされていると仮定する。

本稿では、within-day における交通流パターンと、その交通流パターンの day-to-day ダイナミクスを考える。従って、時間の流れを日付  $t \in T$  及び、 $t$  内での時刻  $i \in I$  の2つの変数として区別する。ここで、 $i, t$  は共に離散的な変数とし、時間の流れに沿った整数の連番で区別する。

## (2) 主体

道路管理者は、ネットワークで発生しうる交通混雑及び交通渋滞を抑制し、社会的余剰の最大化を目指す主体である。そのために、交通混雑の発生する下流側リンクでは“時刻別混雑料金”を利用者から徴収する。混雑料金の設定は以下の(3)節でより詳しく述べる。また、道路管理者は、交通渋滞の発生しうるボトルネック (*i.e.*, 上流側リンク) に対して、“時刻別ボトルネック通行権”を設定・発行する。通行権の設定・発行・取引法については、以下の(4)節でより詳しく述べる。

道路利用者は、上流側居住地、下流側居住地の各々からCBDへ毎日1回のトリップを行う2種類の通勤者である。そのトリップに際して、各利用者は、自分が“予測する”効用が最大となるように、終点到着時刻  $i \in I$  を選択する。より具体的には、下流側の利用者  $\beta \in R$  は、予測に基づく効用が最大となるように、終点到着時刻を選択する。一方、上流側の利用者  $\alpha \in L$  は、その通勤経路上にあるボトルネックを通過するために、ボトルネック通行権を“通行権取引市場”で購入する必要がある。従って、終点到着時刻の選択は、終点到着時刻に対応した時刻別通行権の購入と連動している。通行権取引市場と通行権の購入法については、以下の(4)節及び5章で詳述する。

各 day において利用者の行動を集計することにより下流側リンクの交通量  $x_i$  が決まる。ここで、 $m_i, n_i$  は、各々、時刻  $i$  を選択している上流側、下流側の利用者数である。また、各居住地の交通需要は上流側、下流側とも、定数  $M, N$  で与えられているとする。

## (3) フローベース混雑料金制度

本稿で用いる“観測交通量ベースの混雑料金制度”は、Sandholm[1] によって提案された、需要関数情報を必要としない混雑料金制度と同様の考えに基づくものである。具体的には、day  $t$  で時刻  $i$  に終点に到着する利用者に対する混雑料金  $\lambda_i(x_i(t))$  は次式によって設定される：

$$\lambda_i(x_i(t)) = \gamma \cdot x_i(t) \frac{\partial c(x_i(t))}{\partial x_i} \quad \forall i \in I. \quad (1)$$

ここで、 $\gamma$  は旅行時間を金銭費用に変換する時間価値係数である。この混雑料金制度は、従来の静学的な混雑料金とは異なり、道路管理者は最適な交通流配分パターンを知る必要はない。即ち、観測交通量に応じて料金レベルを設定すればよい。

## (4) ボトルネック通行権取引制度

道路管理者は、上流側リンクでの交通渋滞を解消するために、時刻別通行権を、ボトルネック容量  $\mu$  に等しい枚数発行する。時刻別通行権の定義より、利用される時刻別通行権の枚数は、ボトルネック流入率となる。従って、この発行条件下では、ボトルネックへの流入率が常に交通容量以下となり、交通渋滞は原理的に発生しない。また、時刻別通行権は、利用者に市場販売される。取引市場では、時刻別通行権に対して、オークションによって価格と購入者が決定される。この具体的なルールについては、5章で示す。

## 3. 実現目標とする交通流配分パターン

### (1) 利用者の交通費用及び効用の定義

提案スキーム導入下のネットワークにおいて、利用者が1回のトリップで費やす交通費用は、以下の4つの費用から構成される：スケジュール費用、下流側リンクの旅行費用、下流側リンクで賦課される時刻別混雑料金、そして、上流側リンクを通行するために必要となるボトルネック通行権購入費用。“スケジュール費用  $s_i$ ”は、終点への希望到着時刻  $w$  と実際の到着時刻  $i$  との差異に応じて決まる。ここで、 $s_i$  は  $i = w$  で最小値をとる凸関数であると仮定する。なお、本稿では記号の煩雑さを避け、理論的展開をわかりやすく示すために、利用者の希望到着時刻は同一とする。“下流側リンクの旅行費用”は、下流側リンク旅行時間  $c(x_i)$  を金銭換算したものである。下流側リンクにおける“時刻別混雑料金  $\lambda_i(x_i)$ ”は、式(1)によって、終点到着時刻別に両居住地の利用者に賦課される。上流側リンクにおける“ボトルネック通行権購入費用  $p_i$ ”は、利用者が通行権市場において取引することによって決まる。

さらに、本稿では、各利用者の知覚する効用はそれぞれ異なると考える。即ち、各利用者の効用には、他人からは観測不可能な情報 (*e.g.*, 支払意思額) が含まれている。これを“私的効用”と呼ぶ。より具体的には、上流側の利用者  $\alpha$  の効用には、確率的な私的効用  $\zeta_i^\alpha$  が含まれ、同様に、下流側の利用者  $\beta$  の効用には確率的な私的

効用  $\zeta_i^\beta$  が含まれる．ここで，各々の確率的な私的効用は i.i.d の Gumbel 分布に従うと仮定する．また，利用者の効用は準線形効用関数であると仮定する．従って，上記で定義した費用及び私的効用を用いて，各利用者の（純）効用は，次の式で定義される：

$$U_i^\alpha(x_i, p_i) \equiv \zeta_i^\alpha - \pi_i(x_i) - p_i \quad (2)$$

$$U_i^\beta(x_i) \equiv \zeta_i^\beta - \pi_i(x_i) \quad (3)$$

$$\text{where } \pi_i(x_i) \equiv \gamma \cdot [c(x_i) + s_i] + \lambda_i(x_i) \quad (4)$$

## (2) 社会的に最適な交通流配分

本稿で目標とする交通流配分は，利用者全体での効用の総和を最大化する配分である．社会的に最適な配分パターンを定義するために必要な各利用者の効用は，

$$u_i^\alpha(x_i) \equiv \zeta_i^\alpha - \gamma \cdot [c(x_i) + s_i] \quad (5)$$

$$u_i^\beta(x_i) \equiv \zeta_i^\beta - \gamma \cdot [c(x_i) + s_i] \quad (6)$$

と定義される．この効用には，混雑料金やボトルネック通行権購入費用は含まれない．なぜなら，これらの料金は，利用者から道路管理者への所得移転に過ぎず（i.e., 社会全体では費用ではない），社会的最適配分を決める上で必要がないためである．

従って，社会的に最適な利用者の配分（又は，交通配分）を求める問題は，以下の最適化問題 [SO-P] として表現される：

$$\max_{y \in \Omega} \Pi(y^\alpha, y^\beta) \equiv \sum_{i \in I} \sum_{\alpha \in L} u_i^\alpha(x_i) y_i^\alpha + \sum_{i \in I} \sum_{\beta \in R} u_i^\beta(x_i) y_i^\beta \quad (7)$$

ここで， $\Omega$  は，次の制約条件からなる実行可能領域である：i) 利用者の保存則，ii) 上流側ボトルネックの容量制約，iii) 非負制約条件．

問題 [SO-P] は，ネットワーク性能及び，状況設定から決まる制約条件の下，社会的余剰を最大化する利用者別配分パターンを求める問題である（そして，これを集計することにより交通配分が決まる）．しかし，道路管理者は [SO-P] を直接解くことはできない．なぜなら，観測不可能な個々人の私的効用  $\zeta_i^\alpha, \zeta_i^\beta$  が含まれているためである．従って，以下では，この最適割当を達成するためのインプリメンテーション法を示す．

## 4. 合成スキームの枠組と利用者行動モデル

### (1) 合成スキームの枠組み

合成スキームの枠組みは図 2 に示される．この図は，提案スキームのミクロ・モデルと，そこから生じるマクロな交通状態との関係を表している．ミクロ・モデルは，観測交通量ベースの混雑料金制度，ボトルネック通行権取引制度，及び，利用者の行動モデル（stochastic fictitious play）であり，これらの一連のプロセスを通して各利用者の行動が決定する．一方，ミクロ・モデルによって記述される利用者の行動変化の結果として生じる交通流配分パターンの調整過程が，day-to-day ダイナミクスとして表される．

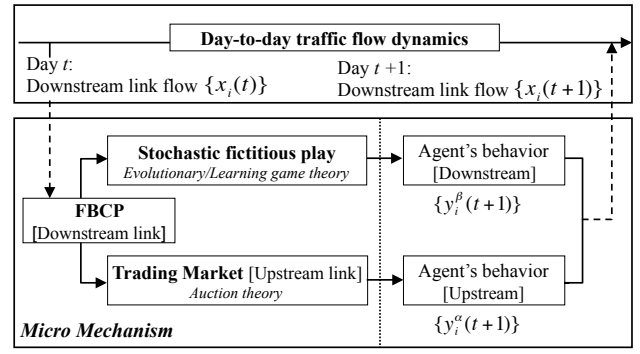


図-2 合成スキームの枠組み

### (2) 利用者の学習プロセスと選択行動モデル

本稿では，各利用者が過去に実現した交通量情報  $\{x(1), \dots, x(t)\}$  を基に次期の交通量を予測していると仮定する（これを *prediction* と呼ぶ）．そして，利用者は“予測される効用”を最大化するように終点到着時刻を選択する．ここで，day  $t$  において利用者が持つ *prediction*  $\bar{x}(t)$  は，day  $t$  までに実現した交通量の時間平均で与えられる：

$$\bar{x}(t) = \bar{m}(t) + \bar{n}(t) \quad (8)$$

$$\text{where } \bar{m}(t) = \frac{1}{t} \sum_{i=0}^t m(i), \quad \bar{n}(t) = \frac{1}{t} \sum_{i=0}^t n(i).$$

上流側居住地の利用者  $\alpha$  は，day  $t$  のトリップ後，後述のオークション市場（i.e., 通行権取引市場）において day  $t+1$  の通行権を購入する．ここで，通行権市場における通勤者の通行権購入行動は，*prediction* に基づいて行われるとする．即ち，各通勤者が付ける各終点到着時刻に対する入札額  $b^\alpha$  は，

$$b_i^\alpha(\bar{x}_i(t)) = \zeta_i^\alpha(t) - \pi_i(\bar{x}_i(t)) \quad (9)$$

と定義される．また，取引市場で決まる通行権価格を  $p(t)$  とすると，利用者  $\alpha$  が得ると予測される効用は次式で与えられる：

$$\bar{U}_i^\alpha(\bar{x}_i(t)) = b_i^\alpha(\bar{x}_i(t)) - p_i(t) = \zeta_i^\alpha(t) - (\pi_i(\bar{x}_i(t)) + p_i(t)). \quad (10)$$

このとき，5章で示す通行権市場の性質より，利用者の通行権の割当は“予測される効用”を最大化するように決まる．従って，day  $t+1$  で利用者  $\alpha$  が時刻  $i$  の通行権を落札する（i.e.,  $y_i^\alpha(t+1) = 1$ ）確率  $A_i^\alpha$  は次のように示される：

$$A_i^\alpha(\bar{x}_i(t), p(t)) = \Pr\left(i = \arg \max_{i \in I} \bar{U}_i^\alpha(\bar{x}_i(t))\right) = \frac{\exp(-\theta^\alpha(\pi_i(\bar{x}_i(t)) + p_i(t)))}{\sum_{i \in I} \exp(-\theta^\alpha(\pi_i(\bar{x}_i(t)) + p_i(t)))}, \quad (11)$$

ここで， $\theta^\alpha$  は， $\zeta_i^\alpha$  に対応する分散パラメータである．

一方、下流側利用者 $\beta$ の行動ルールは、進化・学習ゲーム理論の学習モデルの1つである stochastic fictitious play (SFP) [6] によって記述されるとする。SFP では、各利用者は他の利用者の行動の時間平均で表される“信念”を持ち、信念に基づいて perturbed best response を行う。本稿で扱うモデルでは、他の利用者の行動は交通流パターンに集約される。即ち、他の利用者の行動に対する信念は、式 (8) 定義した *prediction* に帰着する。このとき、下流側利用者の“予想される利得”は次のように形成される：

$$\bar{U}_i^\beta(\bar{x}_i(t)) = \zeta_i^\beta(t) - \pi_i(\bar{x}_i(t)). \quad (12)$$

そして、式 (12) で表される利得を最大化するように終点到着時刻を選択する (i.e., perturbed best response)。即ち、利用者 $\beta$ が終点到着時刻 $i$ を選ぶ (i.e.,  $y_i^\beta(t+1) = 1$ ) 確率は、

$$\begin{aligned} B_i^\beta(\bar{x}(t)) &= \Pr\left(i = \arg \max_{i \in I} \bar{U}_i^\beta(\bar{x}_i(t))\right) \\ &= \frac{\exp(-\theta^\beta \pi_i(\bar{x}_i(t)))}{\sum_{i \in I} \exp(-\theta^\beta \pi_i(\bar{x}_i(t)))} \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、 $\theta^\beta$  は、 $\zeta_i^\beta$  に対応する分散パラメータである。

## 5. 通行権取引市場のオークション・メカニズム

通行権取引市場はオークション・メカニズムの1つである Vickrey-Clarke-Groves (VCG) メカニズムに基づいて設計される (より詳しくは、和田・赤松 [3] を参照)。VCG メカニズムは次のように定義される：(1) 各利用者は、全ての時刻の通行権に対して入札額を申告する、(2) 道路管理者は、通勤者から申告された入札額の総和を最大化するように、通行権の割当を決定する、(3) 通行権を落札した通勤者の支払額は、自分が入札することによって生じる他者の社会的余剰の減少分である。

VCG メカニズムは、ある条件下では、次の望ましい性質を持つことが知られている [7]：(a) 効率的な資源配分が達成できる、(b) 各利用者にとって、自分の選好を表明することが支配戦略となる (*strategy-proof*)。性質 (b) は、入札者が虚偽の選好表明を行うインセンティブが働かないことを意味する。

ここからは、具体的に、VCG メカニズムを用いて通行権取引市場を設計しよう。VCG メカニズムは、割当を決める勝者決定問題と、通行権価格を表す Vickrey payments を計算する2つの枠組みからなっている。

道路管理者は、利用者によって申告された各時刻の通行権の入札額の総和を最大化するように決定する。従って、day  $t$  の通行権取引市場において、その割当を決める勝者決定問題は、4章で定義された入札額 (9) を用いて、次の最適化問題 [A-P] として定式化される：

$$F(t) = \max_{y^{(t+1)} \in \Omega^\alpha} \sum_{\alpha \in L} \sum_{i \in I} b_i^\alpha(t) y_i^\alpha(t+1), \quad (14)$$

ここで、 $\Omega^\alpha$  は次の制約条件を満たす許容領域である：利用者が1日1回トリップをする条件、容量制約条件、そして、非負条件である。この問題 [A-P] を解くことにより、各 day において、効率的な通行権の配分が達成される。また、[A-P] の最適性条件を導出することにより、“予測された効用”が最大となるような割当が実現していることが確認できる (i.e., (11))。

各利用者が支払うことになる通行権価格は、Vickrey payments により計算される。Vickrey payments は VCG メカニズムの性質 (b) を保証する重要なメカニズムである。具体的には、Vickrey payments は次式で計算される：

$$p_{vcg}^\alpha = F^{-\alpha}(t) - \left( F(t) - \sum_{i \in I} b_i^\alpha(t) y_i^{\alpha*}(t+1) \right). \quad (15)$$

ここで、上付き添え字  $-\alpha$  は、利用者 $\alpha$ を除いた利用者集合を表している。式 (15) の右辺の第一項  $F^{-\alpha}$  は利用者 $\alpha$ が入札に参加しなかったときの社会的余剰であり、第二項は現在の社会的余剰  $F$  から利用者 $\alpha$ の余剰を除いた値である。この価格の下では、自分の虚偽の申告によって支払額を減少させることはできない。従って、利用者にとっては正直な選好を表明することが支配戦略となる。

命題 1：通行権取引市場において実現する通行権の割当は効率的であり、利用者にとって正直な選好を表明することは支配戦略である。

証明：Cramton *et al.* [7]、和田・赤松 [3] を参照。

## 6. 交通流の Day-to-Day ダイナミクス

ここまでの章では、個々の利用者を区別したマイクロ・モデルを示した。このマイクロ・モデルにより利用者の振舞  $y$  が記述される。ただし、この利用者の行動は必ずしも3章で示した最適な利用者の割当  $y^*$  に一致しない。なぜなら、利用者の行動基準となる“予測された効用  $\bar{U}(\bar{x})$ ”が交通量パターンの *prediction* に依存しているためである。

そこで、本章では、*prediction* が従う確率プロセスを分析する。このプロセスは、利用者行動  $y$  を集計した結果である交通流  $x$  の変化に依存するものである。まず、6.1章では *prediction* の確率プロセスを定義し、その期待値のダイナミクスを導出する。6.2章では、その期待値のダイナミクスの性質を調べる。そして、元の確率プロセスが社会的最適状態へ収束することを確率近似理論によって証明する (6.3章)。なお、この確率プロセスが収束すれば、交通流配分パターンは *prediction* に一致する (i.e.,  $x = \bar{x}^*$ )。そして、この時、マイクロ・モデルを通して利用者の最適な配分パターン  $y^*$  が達成される。

### (1) Prediction の従うダイナミクス

4章で示したように、day  $t+1$  の各利用者の行動  $y$  は、day  $t$  に形成した *prediction*  $\bar{x}(t)$  のみを参照して行われ

る．従って，まずは day  $t$  までの *prediction* と day  $t+1$  の交通流の関係を定式化しよう．

*Prediction*  $\bar{x}$  が従う確率的なダイナミクスは定義 (8) より，

$$\bar{x}(t+1) = \frac{1}{t+1} (\bar{x} + x(t+1)) \quad (16)$$

である．また，day  $t+1$  で交通量  $x(t+1)$  が実現する確率は，各々の利用者の終点到着時刻選択確率 (i.e., 式 (11), (13)) を用いて次のように表される：

$$\begin{aligned} \Pr \left( x(t+1) = \sum_{\alpha \in L} y^\alpha(t+1) + \sum_{\beta \in R} y^\beta(t+1) \mid \bar{x}(t) = \bar{x} \right) \\ = \prod_{\alpha \in L} \prod_{i: y_i^\alpha(t+1)=1} A_i^\alpha(\bar{x}(t), p(t)) \prod_{\beta \in R} \prod_{i: y_i^\beta(t+1)=1} B_i^\beta(\bar{x}(t)) \quad (17) \end{aligned}$$

この時， $\bar{x}$  の期待変化は，(17) を用いて，次のように計算することができる：

$$\begin{aligned} E(\bar{x}(t+1) - \bar{x}(t) \mid \bar{x}(t) = \bar{x}) &= \frac{1}{t+1} \left[ E(x(t+1) \mid \bar{x} = \bar{x}(t)) - \bar{x} \right] \\ &= \frac{1}{t+1} \left[ (MA(\bar{x}(t), p(t)) + NB_i(\bar{x}(t))) - \bar{x} \right] \quad (18) \end{aligned}$$

ここで， $A_i = y_i^\alpha$ ， $B_i = y_i^\beta$  である．さらに，日付を表す  $t$  をパラメータ化し，式変形を行うと，上記の期待変化は，以下の連続時間ダイナミクスとして表現される：

$$\dot{\bar{x}} = (MA(\bar{x}, p) + NB_i(\bar{x})) - \bar{x} \quad (19)$$

## (2) Prediction の期待値のダイナミクスの性質

ここでは，先に示した *prediction* の期待値のダイナミクスを分析する．まず，期待値のダイナミクスの停留点を示し，その停留点の *prediction* と社会的最適状態の関係を明らかにする．続いて，Lyapunov の安定性理論を用いて，期待値のダイナミクスが停留点に大域的に収束することを示す．期待値のダイナミクスの性質が得られれば，確率近似理論を用いることにより *prediction* が従うオリジナルの確率プロセスを特徴付けることができる．

式 (19) で定式化された常微分方程式の停留点は  $\dot{\bar{x}} = 0$  を満たす．ここで，和田・赤松 [3] により，期待値のダイナミクスの停留点について次の命題が得られる：

命題 2 : *Prediction* の期待値のダイナミクスの停留点は，3 章で示した社会的最適状態  $y^*$  の集計結果として生じる交通流配分パターン  $x^*$  に一致する．

一方，この結論は，問題 [SO-P] を，deterministic perturbation 関数  $H(y)$  を用いて再定式化することによっても得られる（詳しくは Hofbauer and Sandholm[8] を参照）：

$$\begin{aligned} \max_{y \in \Omega} \Pi(y^\alpha, y^\beta) &= - \sum_{\alpha \in L} \sum_{i \in I} \gamma(c_i(x_i) + s_i) y_i^\alpha + \sum_{\alpha \in L} H^\alpha(y^\alpha) \\ &\quad - \sum_{\beta \in R} \sum_{i \in I} \gamma(c_i(x_i) + s_i) y_i^\beta + \sum_{\beta \in R} H^\beta(y^\beta), \quad (20) \end{aligned}$$

ここで，目的関数の第 2 項，第 4 項の deterministic perturbation 関数は，次のエントロピー関数で与えられる：

$$H^\alpha(y^\alpha) = -\frac{1}{\theta^\alpha} \sum_{i \in I} y_i^\alpha \ln y_i^\alpha, \quad H^\beta(y^\beta) = -\frac{1}{\theta^\beta} \sum_{i \in I} y_i^\beta \ln y_i^\beta.$$

上記の問題は，その目的関数が狭義凹関数であることが容易に確認できる．従って，社会的に最適な利用者の配分パターンは唯一であることが分かる．そしてこのことは，期待値のダイナミクスの停留点も同様に唯一であることを意味している．さらに，上記の問題はダイナミクスの安定性を議論する上でも有用である．

期待値のダイナミクス  $\bar{x}$  が安定的に（大域的に）均衡点に収束することを保証するために，許容領域の中で定義される連続・微分可能な次のような関数  $\Pi_L(y^\alpha, y^\beta)$  を考える：

$$\Pi_L(y^\alpha, y^\beta) \equiv \Pi(y^\alpha, y^\beta) - \Pi(y^{\alpha*}, y^{\beta*}). \quad (21)$$

定理 1 : 関数  $\Pi_L(y^\alpha, y^\beta)$  は，期待値のダイナミクスの Lyapunov 関数である．

証明 : 和田・赤松 [3] の付録 VI を参照．

よって，*prediction* の期待値のダイナミクスについて次の命題が成立する：

命題 3 : 本稿の提案スキーム下では，*prediction* の期待値のダイナミクスは，3 章で示した社会的最適状態  $y^*$  の集計結果として生じる交通流配分状態  $x^*$  に大域的に収束する．

証明 : 命題 2，定理 1，及び，Lyapunov 安定性の理論よりただちに証明される．

## (3) Prediction の確率的な day-to-day ダイナミクスの収束性

前節で示したように，*prediction* の期待値のダイナミクスは唯一の停留点に収束した．しかしながら，*prediction* が従うオリジナルな確率過程は，常にランダム・ショックの影響を受けており，仮に停留点に収束したとしても，そこから正の確率で他の点へ移行する．そこで，確率近似理論を用いて，期待値のダイナミクスの極限の振舞とオリジナルな確率過程を関連づけることを考える．結論を先に述べれば，次の命題が成立する：

命題 4 : *Prediction* の確率プロセスは，3 章で示した社会的最適状態  $y^*$  の集計結果として生じる交通流配分状態  $x^*$  に確率 1 で収束する：

$$\Pr \left( \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}(t) = x^* \right) = 1. \quad (22)$$

証明 : 命題 2 と命題 3 により，期待値のダイナミクスが大域的に停留点に収束し，また，その停留点が社会的最適状態に一致することが示された．一方，Benaïm and Hirsch[9] の定理 3.3，及び，Benaïm[10] の命題 5.3 は，*prediction* の確率プロセスが期待値の

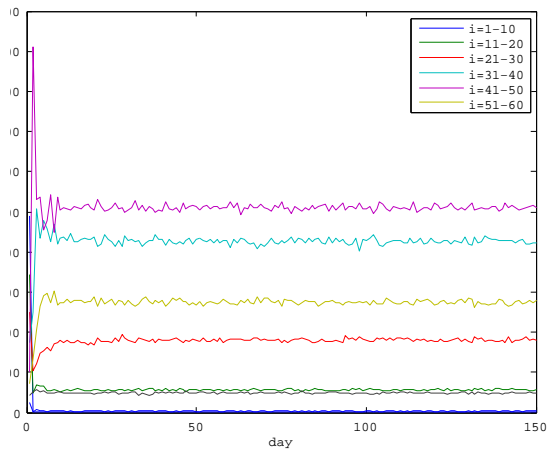


図-3 交通流の Day-to-Day ダイナミクス

ダイナミクスの停留点の集合に収束することを意味している。ここで、本稿のモデルでは、期待値のダイナミクスの停留点は唯一であった。従って、命題 4 が成立することが証明された。

## 7. 簡単な数値例

最後に、交通流  $x$  (*prediction* ではない) の day-to-day ダイナミクスの収束過程を直感的に理解するために、数値計算例を示す。状況設定としては、朝の定常的な通勤を想定する。すべての利用者は希望到着時刻  $w = 8:00$  を持つとし、終点到着時刻の選択を行い、CBD へ通勤する。また、時間間隔  $\Delta i = 1$ , day  $T = 150$  と設定した。他のパラメータ設定は和田・赤松 [3] と同様である。

結果を、図 3, 図 4 に示す。図 3 は (結果的に) 利用者が選択した終点到着時刻を 10 時間帯ごとに集計した交通流の day-to-day ダイナミクスであり、縦軸は交通量、横軸は day を表している。この図より、各時間帯の交通流がある均衡点に収束していく様子が見える。図 4 は、社会的交通費用の day-to-day ダイナミクスであり、縦軸に総交通費用、横軸に day をとっている。ここで、図中の赤い線は社会的最適状態における総交通費用の値を示している。この図から、社会的交通費用は、社会的最適状態へ収束していることがわかる。従って、上記の 2 つの結果から、交通流のダイナミクスは、大域的に収束し、その収束点 (*i.e.* 均衡点) は社会的最適状態であることが見て取れる。

## 8. おわりに

本稿では、交通渋滞と交通混雑の 2 つの外部性が存在するネットワークを対象として、両外部性を解消する合成スキームが確率的な環境においてもロバストに機能することを示した。より具体的には、利用者の学習プロセス、及び、確率的な行動を stochastic fictitious play によってモデル化し、各々の利用者が持つ交通量に対する

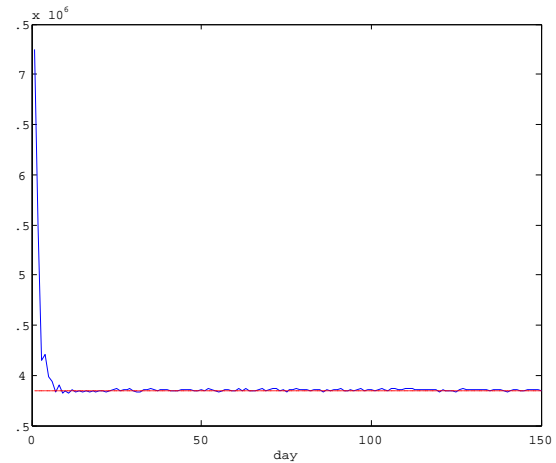


図-4 社会的交通費用のダイナミクス

*prediction* が従う確率プロセスを導出した。そして、交通量の *prediction* の確率的な day-to-day ダイナミクスは大域的に社会的最適状態へ収束し、その収束点では社会的最適状態が達成されることを明らかにした。

## 参考文献

- 1) Sandholm, W. H.: Evolutionary Implementation and Congestion Pricing, *Review of Economic Studies*, Vol. 69, pp. 667–689 (2002).
- 2) Yang, H., Meng, Q. and Lee, D.-H.: Trial-and-Error Implementation of Marginal-Cost Pricing on Networks in the Absence of Demand Functions, *Transportation Research B*, Vol. 38, pp. 477–493 (2004).
- 3) 和田健太郎, 赤松隆: 単一ボトルネックにおける渋滞と混雑を解消する情報効率的メカニズムの設計, *土木学会論文集 D*, Vol. 66, pp. 160–177 (2010).
- 4) 赤松隆: 一般ネットワークにおける ボトルネック通行権取引制度, *土木学会論文集 D*, Vol. 63, pp. 287–301 (2007).
- 5) 赤松隆, 佐藤慎太郎, Long, N. X.: 時間帯別ボトルネック通行権取引制度に関する研究, *土木学会論文集 D*, Vol. 62, pp. 605–620 (2006).
- 6) Fudenberg, D. and Kreps, D. M.: Learning Mixed Equilibrium, *Games and Economic Behavior*, Vol. 5, pp. 320–367 (1993).
- 7) Cramton, P., Shoham, Y. and Steinberg, R.: *Combinatorial Auctions*, MIT Press (2006).
- 8) Hofbauer, J. and Sandholm, W. H.: On The Global Convergence of Stochastic Fictitious Play, *Econometrica*, Vol. 20, pp. 2265–2294 (2002).
- 9) Benaïm, M. and Hirsch, M. W.: Mixed Equilibria and Dynamical Systems Arising from Repeated Games, *Games and Economic Behavior*, Vol. 29, pp. 36–72 (1999).
- 10) Benaïm, M.: Dynamics of Stochastic Approximation Algorithms, in al., et J. A. ed., *Séminaire de Probabilités XXXIII*, pp. 1–68, Berlin: Springer (1999).