提携形成のための補助金拠出を想定した費用配分ゲームに関する研究

Cost Allocation Game with Subsidy to form Grand Coalition

伊藤　洋明**・小谷　通泰***・谷本　圭志****
By Hiroaki ITO**・Michiyasu ODANI***・Keishi TANIMOTO ****

1．はじめに

プレイヤー全員による共同事業に参加しても、状況によっては、節約費用という経済的な恩恵を各プレイヤーが十分に受けることができない（コアが空である）ことも起こりうる。しかしこうした状況であっても、ゲームの外部にいる主体にとって、経済的な側面以外で全提携の形成が望ましいと考えられる場合には、何らかの手段を講じて全提携を形成させようとすることが想定される。たとえば、提携を形成することで環境負荷が軽減できる場合などである。この場合、政府などのゲームの外部にいる主体がその目的を達成する一つの方法は、プレイヤーに補助金を与えて全提携への参加の動機を付与することである。その際、拠出する補助金額は小さいほどゲームの外部にいる主体にとっては効率性の観点で望ましい。そこで本研究は、コアが空である場合に、全提携の形成を実現させるためにどれだけの補助金を拠出し、また、補助金の拠出を前提とした時にどのように共同事業の費用を配分すればよいかについて、提携形ゲーム理論を用いて検討することを目的としている。

2．提携形ゲーム理論

以下では、まず費用配分ゲームの基本的な考え方について紹介する[1)]。

（1）コア

コア(core)とは、提携形ゲーム理論で最も基本的な公正配分概念の１つであり、すべてのプレイヤーが全提携に参加するための動機を保証する配分の集合である。プレイヤーの集合をN、任意のプレイヤーをi ($\in N$)、プレイヤーi が属する部分提携を S ($i\in S$)とし、全提携の下におけるプレイヤーi の配分費用を $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$で表わすと、コアは次式をみたすXの集合となる。

$$\sum_{i\in S} x_i \le C(S) \qquad (\forall S\subset N) \qquad \cdots(1)$$

$$\sum_{i\in N} x_i = C(N) \qquad \cdots(2)$$

(1)式は、全提携の下での配分費用は任意の提携の下での費用よりも小さいことを、(2)式は、全提携の下での費用はすべてのプレイヤーに配分されることを表わしている。このため、コアが非空であれば、全提携に参加する動機を確保するという意味で最低限の公平性を備えた配分が存在する。

（２）要求

次式に示す$e(X\,;S)$を、配分費用 x に対する提携 S の要求（または不満）という。要求について考えるときは、全体集合Nと空集合ϕを除く。

$$e(X;S)=\sum_{i\in S} x_i - C(S) \quad (S\subset N,\ S\ne\phi, N) \quad \cdots(3)$$

つまり、利得ベクトルXが提案されたとき、Xについての提携Sの要求が正である場合には、SはXに対して不満を持ち、負の場合には、SはXに対して余剰を持つといえる。

（３）εコア

コアが空であっても、すべての部分提携 S がある値ε(>0)だけ部分提携 S の下での費用 $C(S)$より大きくても我慢するとする。たとえば、提携形成にあたって，費用が ε かかるとすれば、やむを得ないと納得すると考えられる。したがって、すべての部分提携 S が、その要求 $e(X\,;S)$が必ずしも 0 以下ではなく、ある程度の大きさ ε 以下ならば納得するとすれば、コアの条件は緩和されることになる。つまり、次式をみたす X の集合がεコアである。

$$\sum_{i\in S} x_i - C(S) \le \varepsilon \qquad (\forall S\subset N,\ S\ne N) \qquad \cdots(4)$$

$$\sum_{i\in N} x_i = C(N) \qquad \cdots(5)$$

（４）最小コアと仁

空ではないεコアの中で、εが最小のとき、そのεコアを最小コアという。つまり、最小コアは次のように定義される。

$$\min \ \varepsilon$$
subject to
$$\sum_{i\in S} x_i - C(S) \le \varepsilon \qquad (\forall S\subset N,\ S\ne N) \qquad \cdots(6)$$

$$\sum_{i\in N} x_i = C(N) \qquad \cdots(7)$$

---

*　キーワーズ：提携形ゲーム理論、補助金、配分費用、εコア、物流共同化
**　正員、修士(海事科学)、(株)NTT ロジスコ
***　正員、工博、神戸大学大学院海事科学研究科
(神戸市東灘区深江南町 5-1-1、TEL＆FAX 078-431-6260)
****正員、工博、鳥取大学大学院工学研究科
(鳥取市湖山町南 4-101、TEL＆FAX 0857-31-5310)

また、最小コアの極限を辞書的中心で求めた場合の唯一解が仁である。仁とは、最大要求を最小化した配分のことである。

３．補助金と配分費用の算出方法と結果

3.1　最小コアによる補助金と配分費用の算出方法

本研究では、必ずしもすべてのプレイヤーが全提携を形成するための経済的な動機を持っていない場合、すなわち，コアが空である場合を想定する。この場合、全提携の形成を実現するための一つの方法として、外部の主体がプレイヤーに補助金を与え、全提携の形成を動機づけることが考えられる（以後、補助金を拠出する主体を「政府」と呼ぶ）。そこで本研究では、政府がプレイヤーに与える最低限必要となる補助金の拠出額、およびその補助金の下での共同事業の配分費用を、最小コアを用いて算出する。これは、2. の(6)(7)式と同様にして、補助金額 ε と配分費用 x_i の同時決定問題として定式化できる。

3.2　$n(S)$を与えた補助金と配分費用の算出方法

上述の方法では、どのプレイヤーにも等しい額の補助金が与えられることになる。そこで、本研究では、ε に $n(S)$を与えることで、$n(S)$に応じて補助金を算出する方法を考える。

任意の提携 S に対して政府が拠出する補助金額を $n(S)\varepsilon$で表す。ここで、$n(S)$ (>0)は提携 S に関する費用では測れない負荷量であり、環境負荷量や地域汚染量などがその例である。また、ε は単位負荷量当たりの補助金であり、$\varepsilon>0$ である。補助金が $n(S)\varepsilon$ で表されていることは、$n(S)$に応じて補助金を拠出することを表す。

そして、全提携を形成するための動機を政府がプレイヤーに付与するために最低限必要となる単位負荷量当たりの補助金の拠出額、およびその補助金の下での共同事業の配分費用は、3.1（あるいは 2.(6)(7)式）と同様に、同時決定問題として、次式のように定式化できる。

$$\min \quad \varepsilon$$
subject to
$$\sum_{i \in S} x_i - C(S) \le n(S)\varepsilon \quad (\forall S \subset N,\ S \ne N) \qquad \cdots(8)$$
$$\sum_{i \in N} x_i = C(N) \qquad \cdots(9)$$

本研究では、補助金が拠出されないときにはどの配分費用 X に対しても(6)式をみたさない提携が少なくても一つ存在、すなわち、コアが空であると想定しており、(8)式はコアを非空とするように補助金を拠出することを表している。なお、上記の問題は、配分費用 X に対する提携 S の不満 $e(X;S)$を以下のように定義した場合の最小コアを求める式と同等である。

$$e(X;S) = \frac{\sum_{i \in S} x_i - C(S)}{n(S)} \le \varepsilon \qquad \cdots(10)$$

このように単位負荷量当たりの補助金と共同事業の配分費用を決定する問題は、最小コアを求めることと同じであり、以下では、(8)、(9)式の解を求めることと最小コアを求めることを同じ意味で用いる。ただし、最小コアは(8)、(9)式をみたす唯一の単位負荷量当たりの補助金額 ε を与えるが、配分費用 X については必ずしも唯一の解を与えない。つまり、コアを非空とする補助金額 ε を求めることはできるが、その補助金のもとでコアをみたす配分費用は必ずしも一つに絞り込まれてはいない。そこで、(10)式で定義された不満の辞書式中心をとることで（補助金の拠出によって非空となった）コアに含まれる配分費用の唯一解を得ることができる。このとき、$n(S)=1$ $(\forall S \subset N)$とした場合の唯一解は「仁」、$n(S)=|S|$ （$n(S)$を提携 S に属するプレイヤーの数とする）の場合は「弱仁」と呼ばれている。(10)式で表される不満は $n(S)$を任意としているため、一般化した不満と言うことができ、(10)式の辞書式中心として求められた仁は「一般化仁」と呼ぶことができる。

3.3　環境負荷量としての $n(S)$の意義

(8)、(9)式によって求められた ε を用いれば、$n(S)\varepsilon$ が任意の提携 S に政府が拠出する補助金となる。ただし、$n(S)\varepsilon$ は、あくまでも、「もし提携 S が形成されたらという仮定のもとで」拠出される額であり、任意の提携 S に「実際に」拠出される額ではないことに留意を要する。以下では、この点について検討する。

「提携を形成することで負荷量が小さくなるという意義があるからこそ政府が全提携の形成を目指す」という文脈に本ゲームはあるため、負荷量について以下の条件が成立すると考えることが合理的である。

$$n(S) + n(T) \ge n(S \cup T) \quad ({}^{\forall} S, T \subset N, S \cap T = \phi) \qquad \cdots(11)$$

ここでは、上式を緩めた条件、すなわち、上式の十分条件として次式を考える。

$$\sum_{i \in S} n(i) \ge n(S) \qquad ({}^{\forall} S \subset N) \qquad \cdots(12)$$

以下では(12)式が成立していれば十分であるため、(12)式が成立しているものとして議論をする。(12)式の下では次式が成立することから、個々のプレイヤーi が $n(i)\varepsilon$ の補助金を受け取れば、任意の部分提携 S のメンバーが受け取る補助金の合計は部分提携 S のメンバーが全提携に参加するための動機を持つために必要な額 $n(S)\varepsilon$ を上回る。すなわち、次式が成立する。

$$\sum_{i \in S} n(i)\varepsilon \ge n(S)\varepsilon \qquad ({}^{\forall} S \subset N) \qquad \cdots(13)$$

よって、すべての部分提携に全提携への参加を動機づけるには個々のプレイヤーi に $n(i)\varepsilon$ の補助金を拠出すれば十分である。以上より、政府が拠出する補助金の総額は次式で表される。

$$\sum_{i\in N} n(i)\varepsilon \qquad \cdots(14)$$

なお、政府が拠出する補助金の総額を最小化することを明示的に表現すると、ε の最小化に代わって、(14)式を最小化するという定式化になる。しかし、(14)式における ε の係数は定数であるため、(8)、(9)式の解はこれらの式の下で(14)式を最小化した場合の解と同等であることがわかる。

3.4 $n(S)$を与えた補助金と配分費用の算出結果

上述の(8)、(9)式で示した同時決定問題については、以下に示す(15)式が成り立つ場合、単位負荷量あたりの補助金 ε は(16)式で、その補助金の下での配分費用 x_i は(17)式で与えられることが証明できる[補注1]。なお、$v(S)$は特性関数であり、ここでは提携 S に関する節約費用を表している。

$$v(S) \le \frac{\sum_{i\in S} n(i) - n(S)}{\sum_{i\in N} n(i)} v(N) \qquad \text{のとき}\cdots(15)$$

$$\varepsilon = -\frac{1}{\sum_{i\in N} n(i)} v(N) \qquad \cdots(16)$$

$$x_i = C(i) - \frac{n(i)}{\sum_{i\in N} n(i)} v(N) \qquad \cdots(17)$$

4．数値実験による算出結果

これまで、コアが空である場合において、どれだけの補助金を拠出し、どのように共同事業の費用を配分するかについて理論的に検討してきた。そこで、数値実験により、共同事業への参加に必要な補助金額と配分費用を算出する。ここでは、共同事業の例として、環境問題などを緩和するための方策の一つである物流の共同化を考える[2]。

4.1 物流の共同化モデルの設定

本研究では、図－１に示すように、それぞれの顧客に貨物を配送している事業者が３社あり、これら３社が共同化する状況を想定する。なお、共同化前後の配送経路は費用最小化を目的とした VRP の解を用いた。

このような物流の共同化を行うことによって、トラックの総走行距離や台数などを削減することができるが、新たに物流センターの設置やその管理コストがかかることから、必ずしも参加事業者にとってコストの削減をもたらすものではない。しかし上述のように，社会的にみた場合には共同化の必要性は高く、政府などが補助金を拠出して、実現させることが望ましい。そこで、本研究では、参加事業者にとって経済的な動機がない状況を想定し、すでに述べた方法を適用して、物流の共同化を実現させるために必要な補助金、および配分費用を算出した。なお、費用関数は以下のように定義する。

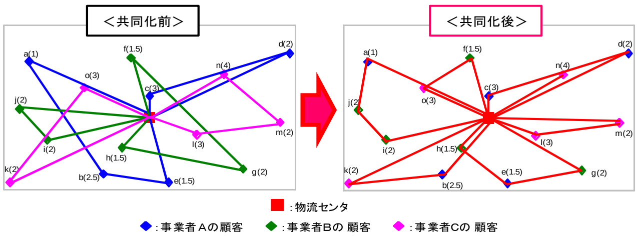
$$C(S) = H(S)\times\sum_{i\in S} o_i + t\times\sum_{f,j} d_{fj} + C_t / y / 365 \qquad \cdots(18)$$

ここで、

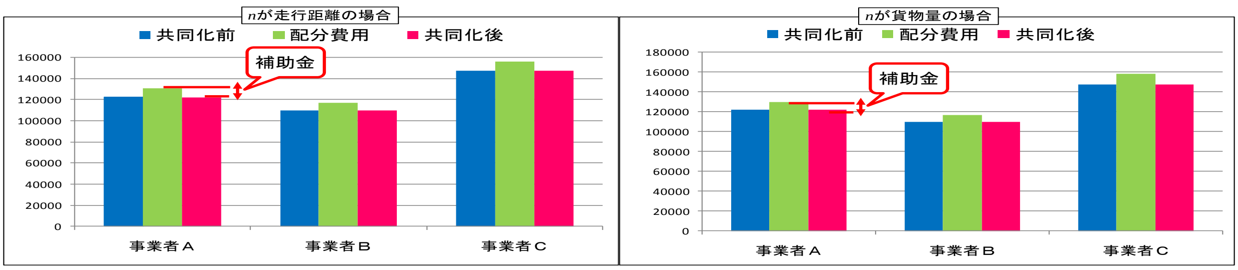
i：事業者　　f：物流センタ　　j：顧客
$H(S)$：提携 S の物流センターの管理コスト(円/ton)
t：5 ton トラックの単位輸送コスト(円/km)
o_{fj}：f から j までの貨物量(ton)
d_{fj}：f から j までの距離(km)
C_t：トラックの価格(円)
y：固定費用の分割支払い年数(年)

4.2 考慮する環境負荷量の違いによる比較（ケース１）

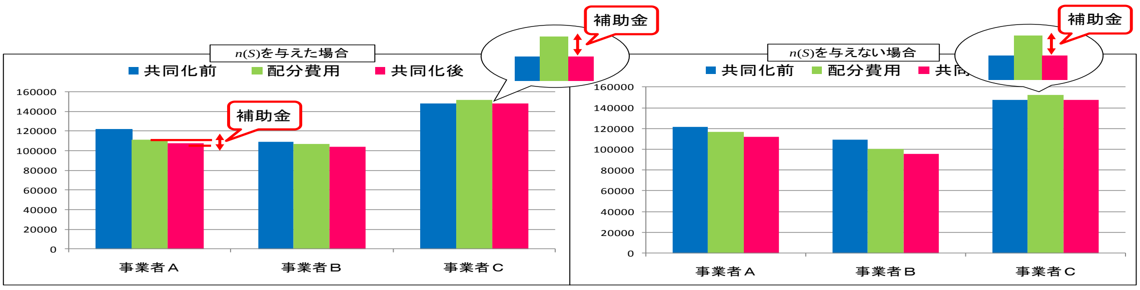
まず、(15)式が成り立つときに、$n(S)$を事業者による総走行距離、輸送貨物量とした場合のそれぞれについて、補助金と配分費用を算出する。算出結果は図－２に示すとおりである。これより、$n(S)$を走行距離、貨物量のいずれにするかによって各事業者への補助金、配分費用は異なるものの、いずれの場合も補助金は配分費用が共同化前の費用と等しくなるように与えられている。また、図－３は拠出される補助金の総額を表したものである。これより、いずれの場合も、補助金の総額は等しくなっている。したがって、(15)式が成り立つ場合では、拠出される補助金の総額は $n(S)$にかかわらず一定であることがわかる。



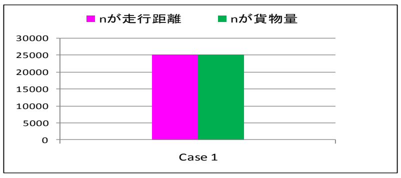
図－１ 物流の共同化モデル



図－２ 異なる $n(S)$を与えた場合の補助金と配分費用（ケース１）



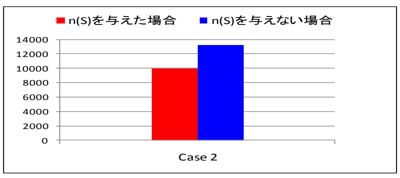
図－４ $n(S)$の導入の有無による補助金と配分費用(ケース２)



図－３ $n(S)$を与えた補助金の総額の比較(ケース１)

4.3　$n(S)$の導入の有無による比較(ケース２)

次に、(15)式が成り立たないときに、$n(S)$を与えた場合と与えない場合のそれぞれについて補助金と配分費用を算出する。算出結果は図－４に示すとおりである。図－４より、$n(S)$を与えた場合（ただし、$n(S)$を事業者の走行距離とする）と与えない場合ともに、事業者Ｃについては、配分費用が共同化前の費用と等しくなるように与えられている。しかし、事業者Ａ、Ｂについては共同化することによって費用が節約されているにもかかわらず、さらに補助金が与えられている。この理由としては、事業者ＡとＢの部分提携を形成することを阻止し、全提携に参加させる動機を持たせるための金額であるといえる。よって、補助金は単に配分費用が共同化前の費用と等しくなるように与えられるだけではなく、特定の事業者間での提携を阻止し、すべての事業者間の共同化を動機づける金額も必要である。また、拠出される補助金の総額を示したものが図－５である。この図より、$n(S)$を与えた場合の方が、$n(S)$を与えない場合よりも拠出される補助金の総額は少なくなっている。このことから、$n(S)$を与えることによって、拠出する補助金の総額を抑制できる可能性があることが推測できる。



図－５ $n(S)$導入の有無による補助金総額の比較(ケース２)

５．今後の課題

本研究では、プレイヤー全員による共同事業への参加に対して、プレイヤーが経済的な動機を持たない状況、すなわちコアが空である場合において、全提携を形成するために、政府が拠出すべき補助金額と、その補助金のもとでの配分費用の算出方法を考案した。特にここでは、$n(S)$を導入することによって、各プレイヤーの環境負荷量を考慮した補助金額・配分費用の決定を行うことを可能とした。しかし、3.4で示した(15)式をみたさない場合については、それらの算出方法を体系的に整理するには至っておらず、今回の数値例で示した、$n(S)$を与えることにより拠出する補助金の総額を抑制できることについては、理論的に証明する必要がある。

最後に、本研究は、科学研究費補助金（基盤研究(B)）の助成を受けて行ったことを付記し、感謝の意を表する次第である。

【参考文献】

1）鈴木光男：新ゲーム理論，勁草書房，1994
2）伊藤洋明・楊冬・小谷通泰・谷本圭志：ゲーム理論を用いた貨物輸送の共同化における費用分担に関する考察，土木計画学研究・講演集，Vol.38，2008

【補註１】(15)式の下で、(17)式が一般化仁であることを示す。
$Z=(z_1, z_2, .., z_n)$を$X=(x_1, x_2, .., x_n)$と異なる配分費用とする。
すると、$z_i > x_i$となる i があるので、

$$z_i > x_i$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_i - C(i)}{n(i)} > \frac{x_i - C(i)}{n(i)} = -\frac{v(N)}{\sum_{i\in N} n(i)} \quad ((17)\text{式より})$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_i - C(i)}{n(i)} > -\frac{1}{n(S)}\frac{n(S)}{\sum_{i\in N} n(i)} v(N) \quad \cdots(19)$$

が成り立つ。
ここで、(15)式より、

$$v(S) \le \frac{\sum_{i\in S} n(i)}{\sum_{i\in N} n(i)} v(N) - \frac{n(S)}{\sum_{i\in N} n(i)} v(N)$$

$$\Leftrightarrow v(S) - \frac{\sum_{i\in S} n(i)}{\sum_{i\in N} n(i)} v(N) \le -\frac{n(S)}{\sum_{i\in N} n(i)} v(N)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{n(S)}\frac{n(S)}{\sum_{i\in N} n(i)} v(N) \ge \frac{1}{n(S)}\left\{ v(S) - \frac{\sum_{i\in S} n(i)}{\sum_{i\in N} n(i)} v(N) \right\}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{n(S)}\frac{n(S)}{\sum_{i\in N} n(i)} v(N) \ge \frac{\sum_{i\in S} x_i - C(S)}{n(S)} \quad \cdots(20) \quad ((17)\text{式より})$$

が成り立つ。
(19)、(20)式より、

$$\frac{z_i - C(i)}{n(i)} > \frac{\sum_{i\in S} x_i - C(S)}{n(S)} = e(X:S)$$

といえる。すなわち、$Z(\neq X)$のもとでのプレイヤー$\{i\}$の不満は，Xのもとでの任意の提携Sのそれよりも大きい。よって、Xは一般化仁である。