口蹄疫のリスクマネジメントのための最適空間伝染リスク抑止モデルの構築

Optimal Risk Control Model against Spatial Infection of Foot-and-mouth Diseases*

吉田　護**, 小林 潔司***, 阿部真育 ****

By Mamoru YOSHIDA**, Kiyoshi KOBAYASHI***, Maiku ABE****

1. はじめに

口蹄疫 (foot-and-mouth disease) は突発的な家畜の感染リスクであり，世界各国において農家に甚大な被害を及ぼしている．たとえば，1997 年台湾において，主に養豚が口蹄疫に感染し，約 380 万頭の豚が殺処分され，約 70 億 US ドルの被害をもたらした．また，2001 年英国において発生した口蹄疫被害では羊，牛をはじめとする家畜が英国だけで約 650 万頭処分されており，その被害額は 80 億ポンドに上っている．わが国においても，2010 年宮崎県を中心に，約 30 万頭の牛豚が殺処分されるに至っている．こうした背景から，政府は口蹄疫の被害を抑止・軽減させるための適切なリスクマネジメント政策を構築することが求められている．本研究では，口蹄疫に対する適切なリスクマネジメント政策の構築のため，口蹄疫の伝播メカニズムについてマルコフ決定過程を用いてモデル化を行い，その数値解法を示すことを目的とする．

2. モデルの基本的構成

口蹄疫の発生・伝染とその終息に至るまでの過程を離散的時間過程として把握する．カレンダー時間上の時刻 s_0 に，口蹄疫の感染が疑われる事例が発生する．口蹄疫の発病を確認するための疫学的検査が実施される．カレンダー時刻 s_0 を始点とする離散時間軸 $t = 0, 1, \cdots$ を考える．離散時間軸上の時刻を時点と呼びカレンダー時刻と区別する．時点 $t = 1$ に口蹄疫の発生が確認される．それと同時に，時点 $t = 1$ までに初動体制が整い，当該時点において最初の予防的殺処分が実施される．基本モデルでは殺処分能力に制限がないと考える．時点 t の期首に口蹄疫の発生が確認された場合，口蹄疫が発生した農場だけでなく，感染地域の拡大を阻止するために，近接した農場においても予防的に家畜の殺処分が実施される．基本モデルでは時点 $t + 1$ までに，予定されたすべての殺処分が完了する．口蹄疫の発生が確認された農場の空間的位置より，対象地域の各農場における口蹄疫伝染確率を求めることができる．口蹄疫感染確率に基づいて，予防的殺処分の対象となる農場が選択される．この時，殺処分の対象となる臨界的な感染確率水準を変化させることにより，殺処分の対象となる農場の範囲が異なる．臨界的な確率水準を大きくすれば殺処分の対象となる家畜数は減少するが，口蹄疫の再感染の確率は増加する．逆に，臨界的な確率を小さくすれば，予防的殺処分の対象となる家畜数が増加する．したがって，予防的殺処分戦略を検討する場合，口蹄疫の再発生リスクを考慮しながら，可能な限り殺処分の対象となる期待家畜数を抑制することが望ましい．以上のような問題意識の下に，3. において，期待損失費用を最小にするような予防殺処分戦略を求める最適空間伝染抑止モデルを定式化する．次に，4. では，殺処分能力に制約が存在する場合を考慮したとした拡張モデルを定式化する．殺処分能力に限界がある場合，感染の可能性がある農場の家畜に対してワクチンを投与することで，一時的に口蹄疫の発生リスクを抑制することも有効な政策の一つと考えられる．最後に，5. では本モデルの数値解法について言及すると共に，6. にて今後の課題について述べる．

3. 基本モデル:

(1) モデル化の前提条件:

ある閉鎖的地域における口蹄疫の空間的伝染過程をマルコフ連鎖モデルを用いて表現し，期待損失を最小にするような予防的殺処分戦略を求めるための最適空間的伝染抑制モデルを定式化する．カレンダー時刻 s_0 において，単一もしくは複数農場に最初の口蹄疫が発生した場合を想定する．初期時点において，対象とする地域に N 箇所の未感染農場が立地し，それぞれ m_i $(i = 1, \cdots, N)$ 頭の家畜を飼育している．カレンダー時刻 s_0 を初期時点とする離散的時間軸 t $(t = 0, \cdots, T)$ を対象とする．T は口蹄疫リスクが終息する時点である．本来，終息時点は口蹄疫伝染過程と対応して内生的に決定されるが，ここでは終端時点 T が十分大きい整数で表される．

いま，時点 t において，未感染状態であった農場に，時

*キーワーズ : 感染症，空間リスク，都市計画

**正会員 博 (情報学) 京都大学大学院工学研究科都市社会工学専攻
〒 611-8540 京都市西京区桂 4 京都大学桂 C1-2-182
E-mail: yoshida@hse.gcoe.kyoto-u.ac.jp
***フェロー会員 工博 京都大学経営管理大学院経営管理講座
〒 606-8501 京都市左京区吉田本町
E-mail: kkoba@psa.mbox.media.kyoto-u.ac.jp
****正会員 京都大学経営管理大学院
〒 611-8540 京都市左京区吉田本町
E-mail: maiku.abe@fx3.ecs.kyoto-u.ac.jp

点 $t+1$ に口蹄疫が伝染する確率 $\rho_i(t+1)$ を

$$\rho_i(t+1) = 1 - \exp\left\{-\zeta m_i \sum_{j \in J(t)} \eta K(d_{ij})\right\} \quad (1)$$

と表現する．ただし，$J(t)$ は時点 t において口蹄疫が確認された農場の集合を表す．また，ζ は家畜の感染の感受性 (susceptibility)，η は感染農場から未感染農場への感染性を表すパラメータであり，m_i は農家 i の飼育頭数を表す．農場 i から j への感染カーネル (infection kernel)$K(d_{ij})$ は，農家 i と j の距離 d_{ij} の関数として表す．なお，$\frac{dK}{dd_{ij}} < 0$ の性質を満たす．また，時点 t に未感染状態にあった農場 i が，時点 $t+1$ においても未感染状態のままとどまる確率を $q_i(t+1)$ とすると

$$q_i(t+1) = 1 - \rho_i(t+1) \quad (2)$$

が成立する．式 (1) に示すように，ある農場が時点 $t+1$ に口蹄疫に感染するかどうかは，時点 t の地域全体における口蹄疫感染状態に依存する．本研究では，対象とする地域における口蹄疫伝染過程を，式 (1) を用いたマルコフ過程として記述することとする．

(2) 空間的口蹄疫伝染過程

時点 $t = 1, \cdots, T$ における農場 $i (i = 1, \cdots, N)$ の口蹄疫感染状態 (以下，ミクロ状態変数と呼ぶ) $s_i(t)$ を

$$s_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{家畜がすべて未感染な状態} \\ 2 & \text{感染が確認された状態} \\ 3 & \text{家畜がすべて殺処分された状態} \end{cases} \quad (3)$$

と表す．ここで，時点 t における地域全体における口蹄疫伝染状態を表す状態変数 (以下，システム状態変数と呼ぶ) を，各農家の状態変数 $s_i(t)$ の組 $\boldsymbol{S}(t) = (s_1(t), \cdots, s_N(t))$ を用いて定義する．農家 i に対して状態変数 $s_i(t)$ は $s_i(t) = 1, 2, 3$ という 3 種類の状態をとりえる．システム状態変数 $S(t) = S_k$ $(k = 1, \cdots, K)$ は，$K = 3^N$ 組の状態ベクトル $S_k = (1, 1, \cdots, 1), (2, 1, \cdots, 1), (1, 2, 1, \cdots, 1), \cdots, (3, 3, \cdots, 3)$ を用いて表現できる．K 個のシステム状態の集合を $\mathcal{S}$ と表記する．また，終息時点において，すべての i に対して $s_i(T) = 1$ または $s_i(T) = 3$ が成立する．そのため，終息状態は 2^N 個の状態ベクトル $S_k = (1, 1, \cdots, 1), (3, 1, \cdots, 1), (1, 3, 1, \cdots, 1), \cdots, (3, 3, \cdots, 3)$ で表される．

時点 t においてシステム状態 $S(t) = (s_1(t) = h_1, \cdots, s_N(t) = h_N)$ $(= S_h)$ から，時点 $t+1$ にシステム状態 $S(t+1) = (g_1, \cdots, g_N)$ $(= S_g)$ に推移したと考える．ミクロ状態変数 $s_i(t)$ に関して「未感染」→「感染」→「殺処分」と推移するため，時点 t と時点 $t+1$ のシステム状態の間に

$$h_i \leq g_i \ (i = 1, \cdots, N) \quad (4)$$

という論理的関係が成立する．従って，システム状態 S_h $(h = 1, \cdots, K)$ から到達可能なシステム状態 $S_g = (g_1, \cdots, g_N)$ の集合 (reachability set) $\mathcal{R}(S_h)$ を

$$\mathcal{R}(S_h) = \{S_g | g_i \geq h_i, S_g = (g_1, \cdots, g_N) \in \mathcal{S}\} \quad (5)$$

と定義できる．到達可能性関係 (5) を用いて，システム状態間に半順序関係 $\mathcal{R}$ を定義できる．システム状態 $S(t) = S_h$ から状態 $S(t+1) = S_g$ への推移確率 Π_{hg} を

$$\begin{aligned} \Pi_{hg} &= \text{Prob}\{S(t+1) = S_g | S(t) = S_h\} \\ &= \prod_{i=1}^{N} \pi_{h_i g_i}(S_h) \end{aligned} \quad (6)$$

と定義する．ここに，$\pi_{h_i g_i}(S_h) = \text{Prob}\{s_i(t+1) = g_i | s_i(t) = h_i, S(t) = S_h\}$ は，時点 t において地域全体のシステム状態が $S(t) = S_h$ の場合に，農場 i のミクロ状態 $s_i(t) = h_i$ $(h_i = 1, 2, 3)$ が時点 $t+1$ に状態 $s_i(t+1) = g_i$ $(g_i \geq h_i)$ に推移する確率である．ミクロ状態の推移状態に関して，1) $s_i(t) = 1$ の時，式 (4) より，確率 $q_i(S_h)$ でミクロ状態 $s_i(t+1) = 1$ に，確率 $\rho_i(S_h)$ で $s_i(t+1) = 2$ に推移する，2) $s_i(t) = 2$ の時，殺処分が実施され $s_i(t+1) = 3$ に推移する，3) $s_i(t) = 3$ は吸収状態であり，$s_i(t) = 3$ の時には $s_i(t+1) = 3$ が成立する．ただし，式 (1),(2) より，

$$\rho_i(S_h) = 1 - \exp\left\{-\zeta m_i \sum_{j \in J(S_h)} \eta K(d_{ij})\right\} \quad (7)$$

$$q_i(S_h) = 1 - \rho_i(S_h) \quad (8)$$

が成立する．なお，$J(S_h) = \{j | h_j = 2, j = 1, \cdots, N\}$ である．したがって，推移確率 $\pi_{h_i g_i}(S_h)$ は

$$\pi_{h_i g_i}(S_h) = \begin{cases} q_i(S_h) & h_i = 1, g_i = 1 \text{ の時} \\ \rho_i(S_h) & h_i = 1, g_i = 2 \text{ の時} \\ 1 & h_i = 2, g_i = 3 \text{ の時} \\ 1 & h_i = 3, g_i = 3 \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases} \quad (9)$$

と表される．

いま，システム状態の推移確率行列を $\boldsymbol{\Pi} = \{\Pi_{hg} : h, g = 1, \cdots, K\}$ と表す．さらに，システム状態変数 $S(t) = S_k$ の生起確率を $P_k(t)$ $(k = 1, \cdots, K)$ と表し，システム状態の生起確率ベクトル $\boldsymbol{P}(t) = \{P_1(t), \cdots, P_K(t)\}'$ と表記する．記号 $'$ は転置を表す．この時，地域全体における口蹄疫の空間的伝染過程をマルコフ過程

$$\boldsymbol{P}(t+1) = \boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{P}(t) \quad (10)$$

と表すことができる．なお，初期時点 $t = 0$ においては，口蹄疫発生農場が与件として与えられる．時点 $t = 1$ におけるシステム状態の生起確率ベクトルを

$\boldsymbol{P}(0) = (P_1(1)\cdots, P_K(1))'$ と表す．システム状態 $S_k = (k_1, \cdots, k_N)$ の生起確率 $P_k(1)$ は

$$P_k(1) = \prod_i^N \tilde{\rho}_i^{\delta_i^k}(1-\tilde{\rho}_i)^{(1-\delta_i^k)} \tag{11}$$

と表される．ただし，$\tilde{\rho}_i$ は時点 $t=1$ において農場 i $(i = 1, \cdots, N)$ に口蹄疫が感染する確率であり，

$$\tilde{\rho}_i = 1 - \exp\left\{-\zeta m_i \sum_{l \in J(0)} \eta K(d_{il})\right\} \tag{12}$$

と表すことができる．また，$J(0)$ は初期時点 $t=0$ で口蹄疫が観測された農場の集合を表す．また，ダミー変数 δ_i^k はシステム状態 S_k に対して

$$\delta_i^k = \begin{cases} 0 & k_i = 1 \text{ の時} \\ 1 & k_i = 2 \text{ の時} \end{cases} \tag{13}$$

と定義される．初期状態におけるシステム状態 $S_k = (k_1, \cdots, k_N)$ の生起確率のみが $P_k(0) = 1$ となり，それ以外のシステム状態の初期生起確率は 0 となる．

(3) **口蹄疫伝染リスクの抑止戦略**:

2. (2) で議論したように，口蹄疫の伝染リスクを抑止する政策として，予防的殺処分，ワクチン接種，移動禁止措置等が想定されるが，ここでは予防的殺処分戦略を考える．予防的殺処分戦略は，未感染農家が飼育している家畜をすべて殺処分の対象とするような戦略を意味する．システム状態 S_h が生起した場合，農場 $i \in \Omega(S_h)$ において予防的殺処分を実施するか否かを表すダミー変数

$$\delta_i^h = \begin{cases} 0 & \text{殺処分を実施しない} \\ 1 & \text{殺処分を実施する} \end{cases} \tag{14}$$

を導入する．$\Omega(S_h)$ はシステム状態 $S_h = (h_1, \cdots, h_N)$ において，未感染状態にある農場の集合であり，$\Omega(S_h) = \{i | h_i = 1, i = 1, \cdots, N\}$ と定義できる．システム状態 S_h を与件とする条件付き予防的殺処分戦略 $\xi^h \in \Xi^h$ $(h = 1, \cdots, K)$ をダミー変数ベクトル $\xi^h = (\delta_1^h, \cdots, \delta_N^h)$ $(= \boldsymbol{\delta}^h)$ を用いて定義する．ただし，Ξ^h は，システム状態 S_h の場合に適用可能な条件付き予防的殺処分戦略集合である．条件付き予防的殺処分戦略 $\xi^h \in \Xi^h$ を適用した場合，ミクロ状態 h_i, g_i 間の推移確率 $\pi_{h_i g_i}^{\xi^h}(S_h)$ は

$$\pi_{h_i g_i}^{\xi^h}(S_h) = \begin{cases} q_i(S_h) & \delta_i^h = 0, h_i = 1, g_i = 1 \text{ の時} \\ \rho_i(S_h) & \delta_i^h = 0, h_i = 1, g_i = 2 \text{ の時} \\ 1 & \delta_i^h = 1, h_i = 1, g_i = 3 \text{ の時} \\ 1 & h_i = 2, g_i = 3 \text{ の時} \\ 1 & h_i = 3, g_i = 3 \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases} \tag{15}$$

と表される．さらに，推移確率 (15) を用いて，条件付き予防的殺処分戦略 $\xi^h \in \Xi^h$ 下におけるシステム状態 $S(t) = S_h$ から状態 $S(t+1) = S_g$ への推移確率 $\Pi_{hg}^{\xi^h}$ を

$$\Pi_{hg}^{\xi^h} = \prod_{i=1}^N \pi_{h_i g_i}^{\xi^h}(S_h) \tag{16}$$

と定義する．ここで，条件付き予防的殺処分戦略 $\xi^h \in \Xi^h$ が，システム状態 S_h $(h = 1, \cdots, K)$ のそれぞれに対して定義されることに着目すれば，予防的殺処分戦略 $\xi \in \Xi$ を条件付き予防的殺処分戦略ベクトル $\xi = (\xi^1, \cdots, \xi^K)$ を用いて定義することができる．Ξ は予防的殺処分戦略集合である．さらに，$\Pi_{hg}^{\xi^h}$ を (h, g) 要素とする推移確率行列を $\boldsymbol{\Pi}^\xi = \{\Pi_{hg}^{\xi^h} : h, g = 1, \cdots, K\}$ と表す．さらに，予防的殺処分戦略 $\xi \in \Xi$ を適用した場合に実現するシステム状態変数 $S(t) = S_k$ の生起確率を $P_k^\xi(t)$ $(k = 1, \cdots, K)$ と表し，システム状態の生起確率ベクトル $\boldsymbol{P}^\xi(t) = (P_1^\xi(t), \cdots, P_K^\xi(t))'$ と表記する．この時，予防的殺処分戦略 $\xi \in \Xi$ の下で実現する地域全体における口蹄疫の空間的伝染過程をマルコフ過程

$$\boldsymbol{P}^\xi(t+1) = \boldsymbol{\Pi}^\xi \boldsymbol{P}^\xi(t) \tag{17}$$

と表すことができる．ただし，初期時点におけるシステム状態の生起確率ベクトルは $\boldsymbol{P}(0)$ となる．

(4) **最適伝染抑止モデルの定式化**:

条件付き予防的殺処分戦略 $\xi^h \in \Xi^h$ は，当該の戦略が適用される時点に関わらず，システム状態 S_h に依存して定義される．したがって，システム状態 S_h が生起したことを与件として，それ以降，最適戦略を行使することにより実現する期待費用の最小値を $V(S_h)$ と表す．期待費用の当該期割引現在価値は，システム状態 S_h が生起する時点に依存しない．そこで，期待費用の当該期割引現在価値の最小値 (最適値関数) を，状態変数に関して再帰的に定義することを考える．

いま，1 頭あたりの殺処分に必要な費用を c で表す．殺処分により家畜がと殺されることにより家畜の資産価値が 1 頭当たり v の損失が発生する．政府は地域全体において発生する期待費用を最小化するように予防的殺処分戦略を決定する．いま，システム状態 $S(t) = S_h$ の下で達成可能な期待損失費用の最小値を $V(S_h)$ とすれば，最適値関数 $V(S_h)$ は再帰的に

$$\begin{aligned} V(S_h) &= \min_{\xi^h}\left\{\sum_{i=1}^N \left(\delta_i^h + \gamma_i^h\right)(c+v)m_i \right. \\ &+ \left. \frac{1}{1+r}\sum_{g \in \mathcal{R}(S_h)} \Pi_{hg}^{\xi^h} V(S_g)\right\} \end{aligned} \tag{18}$$

と定式化できる．ただし，γ_i^h はダミー変数であり，マクロ状態 $S_h = (h_1, \cdots, h_N)$ に対して，

$$\gamma_i(S_h) = \begin{cases} 1 & h_i = 2 \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases} \tag{19}$$

と定義される．r は割引率である．再帰方程式 (18) はシステム状態 $S_h \in \mathcal{S}$ に対して再帰的に定義されている．任意のシステム状態 $S_h, S_g \in \mathcal{S}$ 間に半順序関係 (5) が成立している．

4. 拡張モデル:

(1) モデルの前提条件

拡張モデルでは，単位期間における殺処分能力に制約があるような状況を想定する．この場合，期間内に殺処分が完了しないため，感染リスクの大きい家畜に対する 1) ワクチンの接種政策，2) 殺処分の優先順位を同時に決定することが必要となる．殺処分能力に制約がある場合，基本モデルで取り上げた 3 つのミクロ状態「家畜がすべて未感染である状態」,「感染が確認された状態」,「家畜がすべて殺処分された状態」以外に,「未感染であるがワクチンを接種した状態」というミクロ状態を取り上げることが必要となる．なお，ワクチンの投与能力には制約がないと仮定する．さらに，口蹄疫が発症した農場では，すべての家畜が直ちに殺処分され，処分能力の制約を受けない．

基本モデルと同様に，時点 t において，未感染状態であった農場に，時点 $t+1$ に口蹄疫が伝染する確率 $\rho_i(t+1)$ は式 (1) で表すことができる．また，時点 t に未感染状態にあった農場 i が，時点 $t+1$ においても未感染状態のままとどまる確率を $q_i(t+1)$ とすると $q_i(t+1) = 1 - \rho_i(t+1)$ が成立する．ワクチンを投与することにより，家畜の感染感受性が ζ から $\underline{\zeta}$ に低下すると考える．時点 t において農場 i の家畜すべてにワクチンが投与された場合，口蹄疫感染確率は

$$\hat{\rho}_i(t+1) = 1 - \exp\left\{ -\underline{\zeta} m_i \sum_{j \in J(t)} \eta K(d_{ij}) \right\} \tag{20}$$

と表される．また，ワクチン接種された農場に対して

$$\hat{q}_i(t+1) = 1 - \hat{\rho}_i(t+1) \tag{21}$$

が成立する．

(2) 空間的口蹄疫伝染過程:

時点 $t = 1, \cdots, T$ における農場 $i (i = 1, \cdots, N)$ のミクロ状態変数 $\hat{s}_i(t)$ を

$$\hat{s}_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{未感染でワクチンも未接種の状態} \\ 2 & \text{未感染でワクチン接種された状態} \\ 3 & \text{感染が確認された状態} \\ 4 & \text{家畜がすべて殺処分された状態} \end{cases} \tag{22}$$

と表す．さらに，システム状態を各農場の状態変数 $\hat{s}_i(t)$ の組 $\hat{\boldsymbol{S}}(t) = (\hat{s}_1(t), \cdots, \hat{s}_N(t))$ を用いて定義する．農場 i に対して状態変数 $\hat{s}_i(t)$ は $\hat{s}_i(t) = 1, 2, 3, 4$ という 4 種類の状態をとりえる．システム状態変数 $\hat{S}(t) = \hat{S}_k \ (k = 1, \cdots, \hat{K})$ は，$\hat{K} = 4^N$ 組の状態ベクトル $\hat{K}$ 個のシステム状態の集合を $\hat{\mathcal{S}}$ と表記する．また，終息時点において，全ての i に対して $\hat{s}_i(T) = 1$ または$\hat{s}_i(T) = 4$ が成立する．ミクロ状態変数 $\hat{s}_i(t)$ に関して「未感染」→「ワクチン接種」→「感染」→「殺処分」と推移するため，時点 t と $t+1$ のシステム状態 $\hat{S}_h = (\hat{h}_1, \cdots, \hat{h}_N)$ と $\hat{S}_g = (\hat{g}_1, \cdots, \hat{g}_N)$ の間に

$$\hat{h}_i \leq \hat{g}_i \ (i = 1, \cdots, N) \tag{23}$$

という論理的関係が成立する．

(3) 口蹄疫伝染リスクの抑止戦略:

基本モデルと同様に，システム状態 $\hat{S}_h$ が生起した場合，農場 $i \in \Omega(\hat{S}_h)$ において予防的殺処分を実施するか否かを表すダミー変数

$$\hat{\delta}_i^h = \begin{cases} 0 & \text{殺処分を実施しない} \\ 1 & \text{殺処分を実施する} \end{cases} \tag{24}$$

を導入する．ただし，拡張モデルでは殺処分能力に制約が存在するため，ダミー変数 $\hat{\delta}_i^h$ は

$$\sum_{i=1}^{N} \hat{\delta}_i^h m_i \leq L \tag{25}$$

を満足しなければならない．ただし，L は殺処分能力の上限値を表す．さらに，システム状態 $\hat{S}_h$ が生起した場合，農場 $i \in \Omega(\hat{S}_h)$ においてワクチン投与を実施するか否かを表すダミー変数

$$\hat{\iota}_i^h = \begin{cases} 0 & \text{ワクチンを投与しない} \\ 1 & \text{ワクチンを投与する} \end{cases} \tag{26}$$

を導入する．ただし，殺処分とワクチン投与の双方が実施されることがなく

$$\hat{\delta}_i^h \cdot \hat{\iota}_i^h = 0 \tag{27}$$

が成立する．この時，システム状態 $\hat{S}_h$ を与件とする条件付き抑止戦略 $\hat{\xi}^h \in \hat{\Xi}^h$ をダミー変数ベクトル $\hat{\xi}^h) = \{(\hat{\delta}_1^h, \hat{\iota}_1^h), \cdots, (\hat{\delta}_N^h, \hat{\iota}_h)\} \ (= \hat{\boldsymbol{\delta}}^h)$ により定義する．$\hat{\Xi}^h$ は，システム状態 $\hat{S}_h$ の場合に適用可能な条件付き抑制戦略集合である．条件付き抑制戦略 $\hat{\xi}^h \in \hat{\Xi}^h$ を適用した場合，ミクロ状態 h_i, g_i 間の推移確率 $\pi_{h_i g_i}^{\hat{\xi}^h}(\hat{S}_h)$ は

$$\pi_{h_i g_i}^{\hat{\xi}^h}(\hat{S}_h) = \begin{cases} q_i(\hat{S}_h) & \hat{\delta}_i^h = 0, \hat{\iota}_i^h = 0, h_i = 1, g_i = 1 \text{ の時} \\ \rho_i(\hat{S}_h) & \hat{\delta}_i^h = 0, \hat{\iota}_i^h = 0, h_i = 1, g_i = 3 \text{ の時} \\ \hat{q}_i(\hat{S}_h) & \hat{\delta}_i^h = 0, \hat{\iota}_i^h = 1, h_i = 1, g_i = 2 \text{ の時} \\ \hat{\rho}_i(\hat{S}_h) & \hat{\delta}_i^h = 0, \hat{\iota}_i^h = 1, h_i = 1, g_i = 3 \text{ の時} \\ \hat{q}_i(\hat{S}_h) & \hat{\delta}_i^h = 0, \hat{\iota}_i^h = 0, h_i = 2, g_i = 2 \text{ の時} \\ \hat{\rho}_i(\hat{S}_h) & \hat{\delta}_i^h = 0, \hat{\iota}_i^h = 0, h_i = 2, g_i = 3 \text{ の時} \\ 1 & \hat{\delta}_i^h = 1, \hat{\iota}_i^h = 0, h_i = 1, g_i = 4 \text{ の時} \\ 1 & \hat{\delta}_i^h = 1, \hat{\iota}_i^h = 0, h_i = 2, g_i = 4 \text{ の時} \\ 1 & h_i = 3, g_i = 4 \text{ の時} \\ 1 & h_i = 4, g_i = 4 \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases} \tag{28}$$

と表される．さらに，推移確率 (28) を用いて，条件付き抑止戦略 $\hat{\xi}^h \in \hat{\Xi}^h$ 下におけるシステム状態 $\hat{S}(t) = \hat{S}_h$ から状態 $\hat{S}(t+1) = \hat{S}_g$ への推移確率 $\hat{\Pi}_{hg}^{\hat{\xi}^h}$ を

$$\hat{\Pi}_{hg}^{\hat{\xi}^h} = \prod_{i=1}^{N} \hat{\pi}_{h_i g_i}^{\hat{\xi}^h}(\hat{S}_h) \tag{29}$$

と表す．さらに，抑止戦略 $\hat{\xi} \in \hat{\Xi}$ を $\hat{\xi} = (\hat{\xi}^1, \cdots, \hat{\xi}^K)$ を用いて定義することができる．$\hat{\Xi}$ は抑止戦略集合である．$\hat{\Pi}_{hg}^{\hat{\xi}^h}$ を (h,g) 要素とする推移確率行列を $\hat{\mathbf{\Pi}}^{\hat{\xi}} = \{\hat{\Pi}_{hg}^{\hat{\xi}^h} : h, g = 1, \cdots, K\}$ と表す．さらに，抑止戦略 $\hat{\xi} \in \hat{\Xi}$ を適用した場合に実現するシステム状態変数 $\hat{S}(t) = \hat{S}_k$ の生起確率を $\hat{P}_k^{\hat{\xi}}(t)$ $(k = 1, \cdots, \hat{K})$ と表し，システム状態の生起確率ベクトル $\hat{\boldsymbol{P}}^{\hat{\xi}}(t) = (\hat{P}_1^{\hat{\xi}}(t), \cdots, \hat{P}_K^{\hat{\xi}}(t))'$ と表記する．この時，抑止戦略 $\hat{\xi} \in \hat{\Xi}$ の下で実現する地域全体における口蹄疫の空間的伝染過程をマルコフ過程

$$\hat{\boldsymbol{P}}^{\hat{\xi}}(t+1) = \hat{\mathbf{\Pi}}^{\hat{\xi}} \hat{\boldsymbol{P}}^{\hat{\xi}}(t) \tag{30}$$

と表すことができる．ただし，初期時点におけるシステム状態の生起確率ベクトルは $\hat{\boldsymbol{P}}(0)$ となる．

(2) **拡張モデルの定式化**:

基本モデルと同様に，条件付き抑制戦略 $\hat{\xi}^h \in \hat{\Xi}^h$ も，システム状態 $\hat{S}_h$ に依存して定義される状況依存的戦略となっている．したがって，システム状態 $\hat{S}_h$ のそれぞれに対して最適値関数 $\hat{V}(\hat{S}_h)$ を定義することができる．システム状態に半順序関係 (23) を定義できるため，最適値関数 $V(S_h)$ を再帰的に

$$\hat{V}(\hat{S}_h) = \min_{\hat{\xi}^h \in \Xi(\hat{S}_h)} \left[\sum_{i=1}^{N} \left\{ \left(\hat{\delta}_i^h + \hat{\gamma}_i^h \right)(c+v)m_i + \hat{\iota}_i^h w m_i \right\} + \frac{1}{1+r} \sum_{g \in \mathcal{R}(\hat{S}_h)} \hat{\Pi}_{hg}^{\hat{\xi}^h} \hat{V}(\hat{S}_g) \right] \tag{31}$$

と定式化できる．ただし，w はワクチン投与費用である．$\hat{\gamma}_i^h$ はダミー変数であり，システム状態 $\hat{S}_h = (\hat{h}_1, \cdots, \hat{h}_N)$ に対して，

$$\hat{\gamma}_i(\hat{S}_h) = \begin{cases} 1 & \hat{h}_i = 3 \text{ の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases} \tag{32}$$

と定義される．また，$\mathcal{R}(\hat{S}_h)$ はシステム状態 $\hat{S}_h = (\hat{h}_1, \cdots, \hat{h}_N)$ から到達可能なシステム状態 $\hat{S}_g = (\hat{g}_1, \cdots, \hat{g}_N)$ の集合であり $\mathcal{R}(\hat{S}_h) = \{\hat{S}_g | \hat{g}_i \geq \hat{h}_i, \hat{S}_g = (\hat{g}_1, \cdots, \hat{g}_N) \in \hat{\mathcal{S}}\}$ と定義できる．再帰方程式 (31) はシステム状態 $S_h \in \mathcal{S}$ に対して再帰的に定義されている．

5. モデルの解法:

(1) **基本方針**:

最適伝染抑止モデル (18) は，システム状態に対して再帰的に定義されるマルコフ決定モデルとなっている．再帰的関係は，システム状態間に成立する半順序関係に基づいて定義されるという特徴がある．このような半順序関係を用いて，後ろ向き最適化法を用いて逐次最適値関数を求めることができる．しかし，システム変数 S_h の個数は 3^N となり，対象地域における農場数が多くなれば，システム変数の数が膨大になるという問題がある．また，システム状態間の半順序関係に基づいて，システム状態のツリーネットワークを構成することは容易ではない．本研究では，最適伝染モデルの実用化を図るために，空間伝染過程の空間的分解を試みる．

(2) **空間的分解**:

まず，基本モデルに着目する．時点 t におけるシステム状態 S_h が実現していると考える．時点 t におけるシステム状態 h の生起確率を $P_h^{\xi}(t)$ $(h = 1, \cdots, K)$ と表す．この時，時点 $t+1$ に農場 i のミクロ状態 $s_i(t+1) = s_i$ $(s_i = 1, 2, 3)$ が生起する確率 $p_i^{s_i}(t+1)$ は

$$p_i^{s_i \xi^h}(t+1) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{g \in \omega_i^{s_i}} \Pi_{hg}^{\xi^h} P_h^{\xi^h}(t) \tag{33}$$

と表される．ただし，集合 $\omega_i^{s_i}$ は農場 i のミクロ状態が s_i $(s_i = 1, 2, 3)$ となるようなシステム状態 $S_g = (s_1^g, \cdots, s_{i-1}^g, s_i, s_{i+1}^g, \cdots, s_N^g)$ の集合であり，$\omega_i^s = \{g | s_i^g = s_i, S_g \in \mathcal{S}\}$ と定義できる．この時，時点 $t+1$ においてシステム状態 $S_g = (s_1^g, \cdots, s_N^g)$ が生起する確率 $P_g^{\xi}(t+1)$ $(g = 1, \cdots, K)$ は，式 (33) を用いて

$$P_g^{\xi}(t+1) = \prod_{i=1}^{N} p_i^{s_i^g \xi^h}(t+1) \tag{34}$$

と表せる (**付録**参照)．したがって，第 1 期のシステム状態生起確率 $P_h^{\xi}(0)$ $(h = 1, \cdots, K)$ が与えられれば，第 2 期以降のシステム状態は式 (33),(34) を反復的に適用することにより逐次求めることができる．また，予防的殺処分戦略 $\xi \in \Xi$ を与件とすれば，初期時点 $t = 0$ で評価した期待費用 V^{ξ} は

$$V^{\xi} = \sum_{t=1}^{T} \sum_{s=1}^{3} \sum_{h=1}^{K} \sum_{g \in \omega_i^s} \left[\frac{1}{(1+r)^t} \Pi_{hg}^{\xi^h} P_h^{\xi^h}(t) \cdot \sum_{i=1}^{N} (\delta_i^h + \gamma_i^h)(c+v)m_i \right] \tag{35}$$

と定式化できる．

拡張モデルに関しても，ミクロ状態確率の推移方程式 (33) とシステム状態確率の推計式 (34) を

$$\hat{p}_i^{s^{\xi^h}}(t+1) = \sum_{h=1}^{K} \sum_{g \in \hat{\omega}_i^s} \hat{\Pi}_{hg}^{\hat{\xi}^h}(\hat{S}_h) \hat{P}_h^{\hat{\xi}^h}(t) \tag{36}$$

$$\hat{P}_h^{\hat{\xi}}(t+1) = \prod_{i=1}^{N} \hat{p}_i^{s_i^h}(t+1) \tag{37}$$

と書きかえることにより，時点 $t=1,\cdots,T$ におけるシステム状態を逐次求めることができる．ただし，集合 $\hat{\omega}_i^s$ は農場 i のミクロ状態が $h_i^k=s$ $(s=1,2,3,4)$ となるようなシステム状態 $\hat{S}_k=(h_1^k,\cdots,h_N^k)$ $(k=1,\cdots,K)$ の集合である．抑止戦略 $\hat{\xi}\in\hat{\Xi}$ を与件とすれば，初期時点 $t=0$ で評価した期待費用 $V^{\hat{\xi}}$ は

$$\begin{aligned}V^{\hat{\xi}} &= \sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{K}\sum_{s=1}^{4}\sum_{g\in\omega_i^s}\left[\frac{1}{(1+r)^t}\hat{\Pi}_{kg}^{\hat{\xi}^k}(\hat{S}_k)\hat{P}_k^{\hat{\xi}^k}(t)\right.\\ &\left.\cdot\sum_{i=1}^{N}\left\{\left(\delta_i^k+\gamma_i^k\right)(c+v)m_i+\hat{\iota}_i^h wm_i\right\}\right] \quad (38)\end{aligned}$$

と定式化できる．

(3) **解法の手順**:

基本モデルの最適戦略を求める手順を提案する．拡張モデルに関しても同様の手順により最適戦略を求めることができるため，手順の詳細に関しては省略する．基本モデルの最適戦略を求める手順は，以下のようにとりまとめることができる．

ステップ 1　殺処分戦略 $\xi\in\Xi$ をとりあげる．$V^{min}=M$ とする．M は十分大きな値である．$t=1$ に設定する．

ステップ 2　システム状態の第 1 期生起確率 $P_k^\xi(0)$ $(k=1,\cdots,K)$ を与える．

ステップ 3　システム状態生起確率 $P_k^\xi(t)$ $(k=1,\cdots,K)$ と推移確率 $\Pi_{kg}^{\xi^k}(S_k)$ を用いて，式 (33) よりミクロ状態の生起確率 $p_i^{s_i^k}(t+1)$ を求める．

ステップ 4　式 (34) を用いてシステム状態生起確率 $P_k^\xi(t+1)$ $(k=1,\cdots,K)$ を求める．

ステップ 5　$t=T$ であれば，**ステップ** 6 へ進む．そうでない場合は $t=t+1$ として，**ステップ** 3 へ戻る．

ステップ 6　殺処分戦略 $\xi\in\Xi$ の下で期待費用 V^ξ を求める．$V^\xi<V^{min}$ の場合，$V^\xi=V^{min}$ として**ステップ** 7 へ進む．そうでなければ，そのまま**ステップ** 7 へ進む．ただし，$t=1$

ステップ 7　すべての殺処分戦略 $\xi\in\Xi$ の下で期待費用 EC^ξ を求めた場合，アルゴリズムは終了する．そうでない場合，新しい殺処分戦略 $\xi'\in\Xi$ を求め，$t=1$ として**ステップ** 2 に戻る．

6. おわりに:

本研究では，口蹄疫を対象に最適空間伝染抑止モデルの定式化をマルコフ決定過程を用いて行うと共に，その数値解法について示した．具体的には，感染家畜に対する殺処分，未感染家畜に対する予防的殺処分，ワクチンの投与の三つの対策についてマルコフ決定過程を用いてモデル化した．ただし，本モデルにおいては，感染家畜の観察可能性やワクチン接種効果の時間遅れ等が考慮されておらず，これらの問題を考慮したモデルに改良していく必要がある．また，実データを用いて実際の最適伝播抑止政策を分析していく必要があるが，これらは今後の課題である．

付録： 式 (34) の導出:

数学的帰納法を用いて式 (34) が成立することを証明する．時点 $t=1$ の時は明らかに成立（証明略）．時点 t のシステム状態 $S_k=(\bar{s}_1^k,\cdots,\bar{s}_N^k)$ の生起確率を $P_k^\xi(t)$ $(k=1,\cdots,K)$ とする．式 (17) を展開すれば，時点 $t+1$ にけるシステム状態の生起確率 $P_k^\xi(t+1)$ $(k=1,\cdots,K)$ は

$$P_k^\xi(t+1)=\sum_{h=1}^{K}\Pi_{hk}^{\xi^h}P_h^\xi(t)=\sum_{h=1}^{K}\prod_{i=1}^{N}\pi_{\bar{s}_i^h\bar{s}_i^k}^{\xi^h}(S_h)P_h^\xi(t) \quad (39)$$

と表される．つぎに，$\bar{s}_i^h,\bar{s}_i^k$ を与件とした推移確率を $\Pi_{hg}^{\xi^h}(\bar{s}_i^h,\bar{s}_i^k)=\pi_{\bar{s}_1^h s_1^g}^{\xi^h}(S_h)\cdots\pi_{\bar{s}_i^h\bar{s}_i^k}^{\xi^h}(S_h)\cdots\pi_{\bar{s}_N^h s_N^g}^{\xi^h}(S_h)$ と記述する．また，$j\neq i$ に対して $\sum_{s_j^k=1}^{3}\pi_{\bar{s}_j^h s_j^k}^{\xi^h}(S_h)=1$ であることを考慮すれば

$$\begin{aligned}\sum_{g\in\omega_i^{\bar{s}_i^k}}\Pi_{hg}^{\xi^h} &= \sum_{g\in\omega_i^{\bar{s}_i^k}}\Pi_{hg}^{\xi^h}(\bar{s}_i^h,\bar{s}_i^k)\\ &= \sum_{g\in K(\bar{s}_i^k)}\pi_{\bar{s}_i^h s_i^g}^{\xi^h}(S_h)\cdots\pi_{\bar{s}_i^h\bar{s}_i^k}^{\xi^h}(S_h)\cdots\pi_{\bar{s}_N^h s_N^g}^{\xi^h}(S_h)\\ &= \left(\prod_{j=1,\neq i}^{N}\sum_{s_j=1}^{3}\pi_{\bar{s}_j^h s_j}^{\xi^h}(S_h)\right)\pi_{\bar{s}_i^h,\bar{s}_i^k}^{\xi^h}(S_h)\\ &= \pi_{\bar{s}_i^h,\bar{s}_i^k}^{\xi^h}(S_h) \quad (40)\end{aligned}$$

が成立する．ただし，集合 $K(\bar{s}_i^k)$ は $s_i=\bar{s}_i^k$ となるようなシステム状態 k の集合である．したがって，時点 $t+1$ において政策 ξ の下で，システム状態 $S_k=(S_1^k,\cdots,S_N^k)$ が生起する確率 $P_k^\xi(t+1)$ は，式 (34),(33) より

$$\begin{aligned}P_k^\xi(t+1) &= \prod_{i=1}^{N}p_i^{\bar{s}_i^k}(t+1)\\ &= \prod_{i=1}^{N}\sum_{h=1}^{K}\sum_{g\in\omega_i^{\bar{s}_i^k}}\Pi_{hg}^{\xi^h}P_h^{\xi^h}(t)\\ &= \prod_{i=1}^{N}\sum_{h=1}^{K}\pi_{\bar{s}_i^h,\bar{s}_i^k}^{\xi^h}(S_h)P_h^\xi(t) \quad (41)\end{aligned}$$

となる．式 (41) において積と和の順序を入れ替えることにより式 (34) が成立．

参考文献

1. Michael J. Tildesley, Nicholas J. Savill, Darren J. Shaw, Rob Deardon, Stephen P. Brooks, Mark E.J. Woolhouse, Bryan T.Grenfell, Matt J. Keeling: Optimal reactive vaccination strategies for a foot-and-mouth outbreak in the UK, *Nature, Letters*, pp.83-86, 2006.
2. Diebolt, J. and Robert, C.P.: Estimation of finite mixture distributions through Bayesian sampling, *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, Vol.56, pp.363-375, 1994.
3. Titterington, D.M., Smithe, A.F.M. and Makov, U.E.: *Statistical Analysis of Finite Mixture Distributions*, John Wiley & Sons., 1985.