

旅行時間変動のリンク間加法性に関する一考察*

A Note on an Additivity Property of Travel Time Variability across Different Links*

福田 大輔**

By Daisuke FUKUDA**

1. はじめに

旅行時間信頼性向上の経済便益を推計するに当たっては、その価値付け(Valuation)¹⁾を行うと共に、旅行時間変動(Travel Time Variability)の変化を計測(予測)する作業が必要となる。ナンバープレート認識、ETC、プローブカー、感知器等の観測技術の進展により、道路交通状況の長期観測が可能になり、旅行時間変動の計測へも適用が期待されている。但し、それらの電子的情報源を用いたとしても、旅行者の起点から終点までの“トリップ全体”を対象とした旅行時間変動を把握することは難しい。なぜなら、旅行時間データの蓄積は、一般に“短いセクション(リンク)単位”で行われており、ある旅行者の特定の“トリップ全体”に対する旅行時間変動を十分な精度で把握するために必要なデータ数を確保することは一般に困難だからである。例えば沖原²⁾は、東京圏で3年間に渡って観測されたタクシープローブのデータを用いた分析を行い、ODレベルでの旅行時間変動を十分な精度で把握することが困難であることを指摘している。

以上述べたように、現状では、大量の旅行時間データが得られる短いセクション毎に旅行時間変動を計測し、それらをつなぎ合わせて経路全体の旅行時間変動を推計するような手順を取らざるを得ない。しかし、リンク単位での旅行時間変動から経路全体の旅行時間変動を求めるにあたっては二つの大きな課題が残されている。一つ目はリンク間での旅行時間の相関の存在である。通常、渋滞等による旅行時間の増加はリンクをまたいで波及する。例えばTaylor³⁾は、東京外郭環状道路の旅行時間データの解析より、リンク間の旅行時間に有意な強い相関が存在することを示している。通常の分析では、分散等の旅行時間変動尺度を単純にリンク間で足し合わせて経路全体の旅行時間変動と見なすことが多いが、相関が存在する場合には、旅行時間信頼性向上プロジェクトの便益が過大推計されてしまう可能性がある。

二つ目の課題は、旅行時間“分布”の集計化(畳み込み: Convolution)に関するものである。価値付けのた

めのより一般的なミクロ行動モデル^{4),5)}に整合させるためには、旅行時間変動を標準偏差等の代表値のみで把握するのではなく、旅行時間分布そのものの変化として把握する必要がある。その場合、旅行時間分布を畳み込んで得られる旅行時間分布が、元の分布と同じ分布族となると分析上都合が良い。そのような分布の加法性を有する統計分布の代表例が正規分布である⁶⁾。しかし、実際の旅行時間分布は左右非対称で右裾が長い等の特徴を有しており⁷⁾、正規分布とは大きく異なっている。

本稿は、トリップ(経路)レベルでの旅行時間変動把握のためには避けて通ることのできない上記二つの課題に対し、安定分布という新たな統計分布族の適用可能性並びに有用性を検討するものである。まず、旅行時間のリンク間相関に関しては、旅行時間をその平均と標準偏差で基準化して得られる基準化旅行時間として考えた場合に、独立性の仮定が概ね妥当となることを実証的に示す。次に、その基準化旅行時間分布に安定分布を当てはめ、データへの適合度の高さを示す。最後に、基準化旅行時間分布のリンク間での畳み込みの可能性について考察する。

2. 基準化旅行時間の算出

流入時刻 t における当該リンクの旅行時間 T を以下のように位置-尺度型の形式で表わす。

$$T = \mu(t) + \sigma(t)X$$

ここで、 $\mu(t)$ は時刻における平均旅行時間、 $\sigma(t)$ は時刻における旅行時間変動の尺度である。本研究では変動尺度として四分位範囲(Interquartile Range)を用いる。 $\mu(t)$ 並びに $\sigma(t)$ はノンパラメトリック回帰分析⁸⁾を適用することにより滑らかな関数としてデータから推定することができるが、その詳細は福田・フォスグロウ⁹⁾を参照されたい。また、 X が基準化旅行時間(Standardized Travel Time)である。基準化旅行時間は、旅行時間変動値を推計するための統合モデル⁴⁾においても用いられる。

旅行時間と流入時刻の組み合わせの i 番目の観測結果を (T_i, t_i) とすると、推定された平均旅行時間関数 $\hat{\mu}(t_i)$ 並びに変動尺度関数 $\hat{\sigma}(t_i)$ を用いて、対応する基準

* キーワーズ：旅行時間変動，信頼性価値，安定分布，畳み込み

** 正会員 博(工) 東京工業大学大学院理工学研究科土木工学専攻
(〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1-M1-11
TEL 03-5734-2577, FAX 03-5734-3578)

化旅行時間 X_i を以下の式で求めることができる．

$$X_i = \frac{T_i - \hat{\mu}(t_i)}{\hat{\sigma}(t_i)} \quad (1)$$

一般に平均旅行時間や旅行時間変動は，ピーク時とオフピーク時の違いからも明らかのように，流入時刻によって大きく異なる．式 (1) により求められる各基準化旅行時間のデータは，流入時刻に固有の平均旅行時間並びに旅行時間変動の各値を用いて基準化されることにより，リンク間での相関の程度が削減されることが期待される．

3. 安定分布へのフィッティング

(1) 安定分布とは

本稿では，ファイナンスや情報通信の分野で適用例が多く見られる安定分布 (Stable Distribution) ^{10),11)} の正規化所要時間分布への当てはめについて検討する．

安定分布は，極値の存在に起因する分布の裾厚 (heavy tail)，及び，分布の非対称性 (skewness) を表現することが可能な統計分布族である．物理的な限界から旅行時間には下限が存在する一方，甚大なインシデントの発生等により，稀ではあるものの非常に大きな旅行時間が生起する場合もある．安定分布は，旅行時間分布に特徴的なこれらの経験的特性を適切に考慮することができる．

基準化旅行時間が安定分布 S に従うと仮定すると，一般に $X \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ と表わすことができる ¹⁰⁾．すなわち安定分布は四つのパラメータによって規定される分布である．ここで $\alpha \in (0, 2]$ は安定性ラメータ (stability parameter) と呼ばれ，分布の裾厚を規定する最も重要なパラメータである． $\alpha = 2$ の場合，安定分布は正規分布に帰着し，その値が小さくなるにつれて正規分布よりも分布の裾が長くなる (図 - 1)．これにより，いわゆる“ロングテール現象”を表現することができる (但し分布の二次以上のモーメントは無限大に発散する)．次に $\beta \in [-1, 1]$ は歪度を規定するパラメータであり， $\beta = -1$ の場合には左に最大に歪み，逆に $\beta = +1$ の場合には右に最大に歪む (図 - 2)．(基準化) 旅行時間分布の場合には， β 値は $+1$ に近い値になることが期待される．また， $\gamma > 0$ は分布のスケールを， $\delta \in \mathbb{R}$ は中心の位置をそれぞれ規定するパラメータである．なお， γ, δ はそれぞれ標準偏差，平均を表わすものではないことに注意されたい．

安定分布は， $\alpha = 1, \beta = 0$ の場合にはコーシー分布に， $\alpha = 0.5, \beta = 1$ の場合にはレヴィ分布にそれぞれ一致する．すなわち安定分布は，正規分布，コーシー分布，レヴィ分布を含むより広い分布族である．

(2) 安定特性

旅行時間分布の統計分析を行うに当たり，安定分布

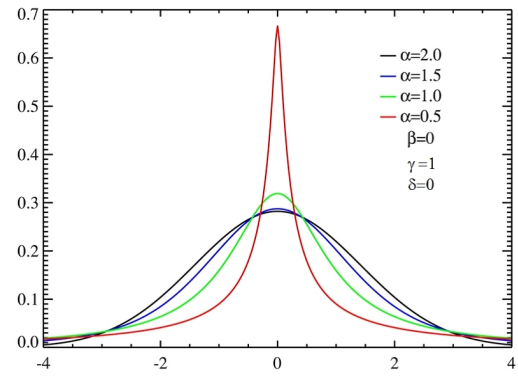


図 - 1 安定分布 (α を変化させたとき)
[出典：Wikipedia “Stable Distribution”]

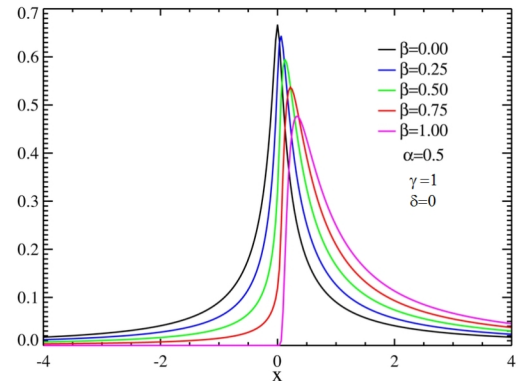


図 - 2 安定分布 (β を変化させたとき)
[出典：Wikipedia “Stable Distribution”]

が持つ好ましい特性のひとつが“安定特性 (Stability property)”である．これは，「互いに独立した異なる安定分布に従う確率変数の和は，それらの安定分布が同一の安定パラメータ α の値を持つ場合に限り，安定分布に従う」という性質である．すなわち，畳込みにより生成された新たな安定分布は同じ安定パラメータ α を有する．また，残りのパラメータについても次の手順で求めることができる．

$X^j \sim S(\alpha, \beta^j, \gamma^j, \delta^j)$, $j = 1, \dots, J$ を J 個の異なる安定分布に従う互いに独立な確率変数とする (但し α は共通)．このとき，これらの確率変数の平均 $\bar{X} = (1/J) \sum_{j=1}^J X^j$ は，次の安定分布に従うことが分かっている ¹¹⁾．

$$\bar{X} \sim S(\alpha, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\delta}),$$

ここで，安定分布の各パラメータは以下で与えられる．

$$\begin{aligned} \bar{\beta} &= \frac{\sum_{j=1}^J \beta^j |\gamma^j/J|^\alpha}{\sum_{j=1}^J |\gamma^j/J|^\alpha}, \\ \bar{\gamma} &= \left(\sum_{j=1}^J |\gamma^j/J|^\alpha \right)^{1/\alpha}, \\ \bar{\delta} &= \begin{cases} \sum_{j=1}^J \delta^j/J + \left(\tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) \left[\bar{\beta}\bar{\gamma} - \sum_{j=1}^J \beta^j \gamma^j/J \right] & (\alpha \neq 1) \\ \sum_{j=1}^J \delta^j/J + \frac{2}{\pi} \left[\bar{\beta}\bar{\gamma} \log \bar{\gamma} - \sum_{j=1}^J \beta^j \gamma^j/J \log |\gamma^j/J| \right] & (\alpha = 1) \end{cases} \end{aligned}$$

すなわち，連続する道路リンク区間において，各リ

リンクの基準化所要時間が共通の α を持つ安定分布にそれぞれ従い、さらに、それらの基準化所要時間が互いに独立だと仮定すれば、安定特性により、リンク単位で推計された基準化所要時間分布を経路全体での基準化所要時間分布へと容易に集計化（畳み込み）することが可能となる。さらには、（基準化されていない通常の）旅行時間分布に関しても、同様の畳み込みを行うことが可能となる。

(3) 一般化中心極限定理

安定分布に関するもう一つの重要な特性は、“一般化中心極限定理（Generalized Central Limit Theorem: GCLT）”と呼ばれるものである。まず、古典的な中心極限定理は「（有界の分散を持つ）独立な確率変数の正規化された和は、標準正規分布に弱収束する」というものであった。Gnedenko and Kolmogorov¹²⁾ は、これを確率変数の分散が無限の値となる場合を含む状況へと拡張し、一般化中心極限定理と称した。簡単に述べるとこの定理は、「互いに独立な“（分散が有界でない場合も含めた）いかなる”確率変数の正規化された和に対しても、その唯一の極限分布が存在し、それが安定分布となる」ということを示すものである^{10),11)}。

さて、大きな数のリンクによって構成される都市内道路ネットワークを考えよう。各リンクで観測される基準化旅行時間分布は、正規分布のような左右対称のものではなく、稀ながらも起こりうる大きなインシデントの影響により、右の裾が厚くなっていると仮定する。このような状況で一般化中心極限定理を適用すると、「この全ネットワーク上で長期間にわたって観測された各リンクの基準化旅行時間の総和の分布は、安定分布に収束する」という結論を導くことができる。これにより、経路レベルあるいは OD レベルでの基準化旅行時間分布の推計や、さらには、該当する旅行時間変動価値等の推計が可能になることが示唆される。

(4) 安定分布のパラメータ推定

最後に、安定分布のパラメータの推定方法について概説する。一般に、安定分布の確率密度関数は陽には与えられておらず、通常は特性関数 $\phi(\tau) = E(\exp(i\tau X))$ によって表現される。その場合、全てのパラメータに関して確率密度関数が連続的となり、数値解析上扱い易いという理由で、下記の Zolotarev's (M) parameterization¹⁰⁾ という表現がよく用いられる。

$$\phi(\tau) = \begin{cases} \exp \left\{ -\gamma^\alpha |\tau|^\alpha \left[1 + i\beta (\text{sign} \tau) \left(\tan \frac{\pi\alpha}{2} \right) \right] \right. \\ \left. ((\gamma|\tau|)^{1-\alpha} - 1) + i\delta\tau \right\} & (\alpha \neq 1 \text{ のとき}) \\ \exp \left\{ -\gamma |\tau| \left[1 + i\beta (\text{sign} \tau) \tan \frac{\pi}{2} (\ln |\tau| + \ln \gamma) \right] \right. \\ \left. + i\delta\tau \right\} & (\alpha = 1 \text{ のとき}), \end{cases}$$

安定分布の四つのパラメータは、この特性関数に基づく数値尤度最大化により、実際のデータを用いて推定することができる¹³⁾。

4. おわりに

本稿では、旅行時間信頼性の経済評価を念頭に、旅行時間変動のリンク間加法性に関して、基準化旅行時間並びに安定分布に基づいた考察を行った。具体的には、旅行時間のリンク間相関への対処の可能性、並びに、旅行時間分布のリンク間での畳み込みの可能性を検討した。さらに、リンク毎の旅行時間変動に基づいてネットワーク全体の旅行時間変動を把握するに当たり、安定分布における一般化中心極限定理が有用となる可能性を論じた。実際の旅行時間データを用いた検証結果については、発表時に紹介したい。

参考文献

- 1) 福田大輔: 旅行時間変動の価値付けに関する研究展望とプロジェクト評価への適用に向けた課題の整理, 土木計画学研究・論文集, Vol. 27, 2010.
- 2) 沖原敦司: 所要時間変動を考慮した貨物車の時間信頼性価値の試算, 筑波大学大学院システム情報工学研究科修士論文, 2009.
- 3) Taylor, M.: Reliability and cost-benefit analysis in Australia and New Zealand, In *International Meeting on Value of Travel Time Reliability and Cost-Benefit Analysis*, 2009.
- 4) Fosgerau, M. and Karlström, A.: The value of reliability, *Transportation Research Part B: Methodological*, Vol. 44, No. 1, pp. 38–49, 2010.
- 5) Fosgerau, M. and Engelson, L.: The value of travel time variance, *Transportation Research Part B: Methodological* forthcoming.
- 6) 飯田恭敬: 交通計画のための新パラダイム—交通ネットワーク信頼性と OD 交通量逆推定, 技術書院, 2008.
- 7) Van Lint, J. W. C. and Van Zuylen, H. J.: Monitoring and predicting freeway travel time reliability: using width and skew of day-to-day travel time distribution, *Transportation Research Record*, Vol. 1917, pp. 54–62, 2005.
- 8) Li, Q. and Racine, J.: *Nonparametric Econometrics: Theory and Practice*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2007.
- 9) 福田大輔・フォスグロウモーンズ: 道路交通における所要時間分布特性の統計解析: 時間信頼性の評価に向けて, 土木計画学研究・講演集, Vol. 37, 2008.
- 10) Zolotarev, V.: *One-Dimensional Stable Distributions*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.
- 11) Nolan, J. P.: *Stable Distributions - Models for Heavy Tailed Data*, Birkhäuser, Boston, in press.
- 12) Gnedenko, B. V. and Kolmogorov, A. N.: *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*, Addison-Wesley, 1954.
- 13) Nolan, J. P.: Maximum likelihood estimation of stable parameters, In Barndorff-Nielsen, O. E., Mikosch, T., and Resnick, S. I. eds. *Lévy Process: Theory and Applications*, Boston, Birkhäuser, pp. 379–400, 2001.