社会的学習モデルにおける情報伝達構造の理論的性質の解明*

Exploring Information Transmission Structure in Social Learning Model *

大窪和明**・奥村誠***

By Kazuaki OKUBO**・Makoto OKUMURA***

１．はじめに

日々の経験から蓄積された知恵には有用なものが数多く存在する．例えば，「夕焼けは船乗りの喜びで，朝焼けは船乗りへの警告」ということわざは，科学的な根拠がないにも関わらず，人から人へと言い伝えられ，2000年もの間，受け継がれて来た[1)]．人々の情報伝達の結果として得られる知恵は有用である一方で，時に誤った知恵をもたらす可能性がある．そこで，人々に有用な知恵をもたらす情報伝達構造を把握する必要がある．

近年，人々の情報伝達の有用性に関する研究がなされてきた．例えば，Jadbabaie et. al.[2)]では，人々が現在の状態を把握するために十分な情報がない場合に，社会的ネットワークを通じた他者からの情報と自らの信念に基づいて信念を更新した場合，高い精度で真の状態を推測することができることを示した．Jadbabaie et. alでは，社会的ネットワークを通じて誤った情報が伝わる可能性を考慮していない．

Acemoglu et. al.[3)]では，誤った情報が広まる原因として，周りの人の情報に適応しにくいという特徴を持つエージェント(以下，Forceful Agent)の存在を考え，その影響を分析している．Acemoglu et. al.ではForceful agentは常に誤った情報を導くと仮定している．しかし現実には，新しい情報に適応しにくい高齢者の知恵が役に立つ場合は多い．この事実を考慮し，大窪・奥村[4)]では高齢者がForceful Agentとして振る舞うとし，自らの行動から得られた経験を基に信念を更新して，若年者に情報を伝える場合，情報を伝えなかった場合よりもより良い集団の利得をもたらす可能性があることを数値計算によって示した．しかし，大窪・奥村ではForceful Agentを含む情報伝達構造の理論的な性質については，調べられていなかった．そこで本研究ではForceful Agentを含む情報伝達構造の理論的な性質を明らかにすることを目的とする．

*キーワーズ：社会的ネットワーク、高齢化社会

**正会員、博(学術)、東北大学東北アジア研究センター
(仙台市青葉区川内41、TEL:022-795-7568、
E-mail:okubo@cneas.tohoku.ac.jp)

***正会員、博(工)、東北大学東北アジア研究センター

２．モデル

本研究では，t期($t \in \{1,2\}$)の状態θ^tが二つの状態$\theta^t \in \{0,1\}$で表される２期間モデルを考える．１期にn_1人の高齢者が存在し，２期にはn_1人の高齢者に加えて，n_2人の若年者が存在するとし，各高齢者または若年者ごとに一定の確率で状態0か1が生じるものとする．具体的には，エージェントiの状態が1である確率を

$$\Pr\left(\theta_i^t = 1\right) = \alpha^t \tag{1}$$

とする．α^tはt期における状態1の発生確率を表し，各エージェントに共通の定数とする．

各期のはじめに高齢者または若年者iは，状態1が起きる確率$\Pr\left(\theta_i^t = 1\right)$に対して信念を持ち，各エージェントの初期信念を$\mathbf{p}^t(0) = \left[p_1^t(0) \quad p_2^t(0) \quad \cdots \quad p_{n_t}^t(0)\right]'$で表す．なお，１期目の高齢者は周辺の高齢者から情報伝達を受けるとするが，２期目の高齢者は情報伝達を受けにくいForceful Agentとして行動するとする．

(1) 高齢者の１期目の行動

１期のはじめに，初期信念$\mathbf{p}^1(0)$を初期値として社会的ネットワークを通じて$N^1 \in \{1,2,\cdots,n_1\}$の高齢者間のコミュニケーションが行われるとする．このとき，1期における$k+1$回目の情報伝達の後に形成される信念$\mathbf{p}^1(k+1)$を

$$\mathbf{p}^1(k+1) = \mathbf{W}^1\mathbf{p}^1(k)$$

$$= \left(\mathbf{W}^1\right)^{k+1}\mathbf{p}^1(0) \tag{2}$$

として表す．ただし，$\mathbf{W}^1$は$n_1 \times n_1$の情報伝達行列であり，非負の要素を持つ．情報伝達行列$\mathbf{W}^1$は情報伝達による信念の更新における各高齢者への重みを表す．$\mathbf{W}^1$のi行j列目の要素$\left[\mathbf{W}^1\right]_{ij}$は

$$\sum_{j=1}^{n_1}\left[\mathbf{W}^1\right]_{ij} = 1 \tag{3}$$

を満たす．$\mathbf{W}^1$は，既約かつ非周期的な行列とする．この$\mathbf{W}^1$に関する仮定より，$\lim_{k\to\infty}\mathbf{W}^k$は収束し，式(2)を通じて更新される信念は定常状態に収束する．

１期中に式(2)が収束するまで十分な回数の情報交換

が行われ，高齢者iは収束後の信念$\mathbf{p}^1(\infty)$をもとにして1期の期待利得$u_i^1 \in \{0,1\}$が最大となるように，行動を決める．高齢者iの利得は，

$$u_i^1\left(\theta_i^1, a_i^1\right) = \begin{cases} 1 \quad \text{if} \quad \theta_i^1 = a_i^1 \ \ \&\text{ with probability } \beta \\ \qquad \text{or} \quad \theta_i^1 \neq a_i^1 \ \ \&\text{ with probability } 1-\beta \\ 0 \quad \text{if} \quad \theta_i^1 \neq a_i^1 \ \ \&\text{ with probability } \beta \\ \qquad \text{or} \quad \theta_i^1 = a_i^1 \ \ \&\text{ with probability } 1-\beta \end{cases} \tag{5}$$

とする．ただし，$0 \le \beta \le 1$の定数である．式(5)は，高齢者iの利得が1となるのは，$\theta_i^1 = a_i^1$のときに確率βで起きるか，$\theta_i^1 \neq a_i^1$のときに確率$1-\beta$で起きるか，のどちらかである．このように確率$1-\beta$が大きくなるほど状態θ_i^1と行動a_i^1が一致しないときでも利得が１となる確率は高くなり，利得u_i^1が生じた後に高齢者iが現在の状態θ_i^1とを正確に予測するのが困難となる．すなわちβは，高齢者の利得と行動との間に生じるゆらぎを示し，βによって高齢者の記憶の劣化を表現する．このとき，t期における高齢者iの期待利得最大化行動a_i^{t*}は次の補題のようになる．

補題１：t期における高齢者または若年者iの状態$\theta_i^1 = 1$となる信念をp_i^tとしたとき，期待利得を最大化する最適な行動a_i^{t*}は次のようになる．

$$a_i^{t*} = \begin{cases} 1 & \text{if.} p_i^t \ge \dfrac{1}{2} \\ 0 & \text{if.} p_i^t < \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{6}$$

高齢者iが自らの行動a_i^{t*}を決定した後，式(1)に従って各高齢者にθ_i^1が生じ，式(5)に従って利得を得る．この経験と定常状態における信念$\mathbf{p}^t(\infty)$を基に，高齢者は下式に従って現在の状態が$\theta_i^1 = 1$であることに対する信念をベイズ更新する．

$$h\left(\theta_i^1 = 1 \middle| u_i^1, a_i^1\right) = \frac{f\left(u_i^1 \middle| \theta_i^1 = 1, a_i^1\right) g\left(\theta_i^1 = 1 \middle| a_i^1\right)}{\sum_{j \in \{0,1\}} f\left(u_i^1 \middle| \theta_i^1 = j, a_i^1\right) g\left(\theta_i^1 = j \middle| a_i^1\right)} \tag{7}$$

ただし，$f(\bullet)$は状態$\theta_i^1 = 1$，行動a_i^1のもとでu_i^1をとる確率を表す関数であり，式(5)の利得関数から決まる．$g(\bullet)$は行動a_i^1のもとで状態$\theta_i^1 = 1$となるエージェントiの信念を表している．今回は，高齢者iの行動と関係無くθ_i^1が決定すると仮定し，$g\left(\theta_i^1 = 1 \middle| a_i^1\right) = p_i^1(\infty)$とする．$h(\bullet)$は行動$a_i^1$，利得$u_i^1$のもとで状態が$\theta_i^1 = 1$である確率を表している．ここで，式(7)によって更新された状態$\theta_i^1 = 1$の発生に対する信念$h(\bullet)$が，第２期における高齢者の初期信念になるとする．

(2) ２期目における高齢者と若年者の行動

２期のはじめに，n_2人の若年者が社会的ネットワークに参加し，２期目におけるエージェントの集合を$N^2 = \{1,2,\cdots,n_1,n_1+1,\cdots,n_1+n_2\}$とする．ここでは，1期目から社会的ネットワークに参加している$\{1,2,\cdots,n_1\}$のエージェントを高齢者，新たに加わった$\{n_1+1,\cdots,n_1+n_2\}$のエージェントを若年者とし，合計の人数を$N_2(=n_1+n_2)$人とする．２期目の高齢者は，周辺の人からの情報伝達を自らの信念に反映しにくいForceful Agentとして行動すると仮定する．

２期目の高齢者，若年者の初期信念は，

$$\begin{aligned} &\mathbf{p}^2(0) \\ &= \left[p_1^2(0) \ \cdots \ p_{n_1}^2(0) \ \ p_{n_1+1}^2(0) \ \cdots \ p_{N_2}^2(0)\right]' \\ &= \left[p_1^1(\infty) \ \cdots \ p_{n_1}^2(\infty) \ \ p_{n_1+1}^2(0) \ \cdots \ p_{N_2}^2(0)\right]' \end{aligned} \tag{8}$$

と表され，社会的ネットワークを通じて情報伝達が行われるとする．このとき，２期目における$k+1$回目の情報伝達の後に形成される信念$\mathbf{p}^2(k+1)$も，式(2)と同様に，下式に従って高齢者および若年者の信念が更新される．

$$\mathbf{p}^2(k+1) = \mathbf{W}^2\mathbf{p}^2(k) \tag{9}$$

ただし，$\mathbf{W}^2$は情報伝達行列であり，

$$\mathbf{W}^2 = \left[c\mathbf{DA} + (1-c)\mathbf{E}\right] \tag{10}$$

と表現できると仮定する．ただし，

$$\mathbf{D} = \mathrm{diag}\left(1/d_1, 1/d_2, \cdots, 1/d_{n_1+n_2}\right) \tag{11}$$

$$\mathbf{E} = \left[\frac{1}{N_2}\right]_{N_2 \times N_2} \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{N_2}\left[\mathbf{W}^2\right]_{ij} = 1 \tag{13}$$

とおく．$\mathbf{D}$は２期目におけるエージェントiの次数d_iの逆数を対角要素に持つ行列である．$\mathbf{A}$は２期目における社会的ネットワークの隣接行列であり，0-1要素で表される．$\mathbf{DA}$は社会的ネットワークを通じての情報伝達を示す行列であり，普段から付き合いのあるような強いつながりからの情報伝達を表している．一方，$\mathbf{E}$は$1/N_2$を各要素に持つ$(N_2 \times N_2)$の行列であり，直接的な社会的ネットワークでつながっていないエージェントからの情報伝達を表し，噂や社会的な雰囲気といった弱いつながりからの情報伝達を表している．式(10)のcはそれら２種類の情報伝達の重みを示すパラメータである$(0 \le c \le 1)$．

式(10)の隣接行列として非対称な行列を用いて一方的な情報伝達を表現できる．例えば高齢者iは若年者jからの情報伝達を受けないが，若年者jは高齢者iからの

情報伝達を受ける場合，$[\mathbf{A}]_{ij}=0$，$[\mathbf{A}]_{ji}=1$となる．これにより，高齢者は，"自らの意見を他人に話すが，他人の意見によって自らの情報を更新しない"というAcemoglu et.al.の"Forceful agent"と同様の性質を持つエージェントを表現できる．

この情報伝達行列$\mathbf{W}^2$について次の性質が成り立つ．

性質1：
高齢者が周辺からの情報伝達を全くうけないForceful Agentとして行動する場合($c=1$)，信念の定常状態は若年者の初期信念に依存しない．

証明：$c=1$のとき，情報伝達行列$\mathbf{W}^2$は，次のようなブロック行列として表現できる．

$$\mathbf{W}^2=\begin{bmatrix}\mathbf{I} & 0\\ \mathbf{A}_{21}^2 & \mathbf{A}_{22}^2\end{bmatrix} \tag{14}$$

$\mathbf{I}$ $(n_1\times n_1)$は高齢者から高齢者へ，$\mathbf{0}$ $(n_1\times n_2)$は若年者から高齢者へ，$\mathbf{A}_{21}^2$ $(n_2\times n_1)$は高齢者から若年者へ$\mathbf{A}_{22}^2$ $(n_2\times n_2)$は若年者から若年者への情報伝達を表す行列である．ただし，$\mathbf{I}$は単位行列とし，高齢者が自らの信念を更新しない状況を表している．$\mathbf{A}_{21}^2$ $(n_2\times n_1)$は非零の要素を持つ行列，$\mathbf{0}$ $(n_1\times n_2)$は全ての要素が零である行列とすることによって，高齢者から若年者に情報伝達が行われるが，逆の情報伝達はないという状態を表している．

式(13)の条件より，

$$\lim_{t\to\infty}\left(\mathbf{W}^2\right)^t=\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \left(\mathbf{I}-\mathbf{A}_{22}^2\right)^{-1}\mathbf{A}_{21}^2 & \mathbf{0}\end{bmatrix} \tag{15}$$

となる．したがって，十分な回数の話し合いが行われた後の信念の定常状態は，

$$\mathbf{p}^2(\infty)=\begin{bmatrix}\mathbf{p}_e^2(0)\\ \left(\mathbf{I}-\mathbf{A}_{22}^2\right)^{-1}\mathbf{A}_{21}^2\mathbf{p}_e^2(0)\end{bmatrix} \tag{16}$$

となる．ただし，$\mathbf{p}_e^2(0)$は高齢者の初期信念を表す$(n_1\times 1)$ベクトルである．式(15)は若年者の初期信念を含まないため，性質1が成り立つことが示された．□

性質１は，若年者に情報を伝達する高齢者の信念が正しければ，若年者が誤った初期信念を持っていようと，正しい信念に導かれることを意味している．

性質２：
Forceful Agentが周辺からの情報伝達から弱い影響を受けるの場合($0<c<1$)，信念の定常状態$\mathbf{p}^2(\infty)$は次のように表される．

$$\begin{aligned}\mathbf{p}^2(\infty)&=\mathbf{v}_1^c\mathbf{v}_1^r\mathbf{p}^2(0)\\ &=\begin{pmatrix}v_{1,1}^c & v_{2,1}^c & \cdots & v_{N_2,1}^c\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}v_{1,1}^r & v_{1,2}^r & \cdots & v_{1,N_2}^r\end{pmatrix}\mathbf{p}^2(0)\end{aligned} \tag{17}$$

ただし，$\mathbf{v}_1^c$，$\mathbf{v}_1^r$は第１固有値λ_1に対応した列固有ベクトル，行固有ベクトルである．

証明：式(10)の情報伝達行列は，固有値を対角要素に持つ行列Λを用いて，次のように分解することができる．

$$\left(\mathbf{W}^2\right)^t=\mathbf{V}^c(\Lambda)^t\mathbf{V}^r \tag{18}$$

ただし$\Lambda=\mathrm{diag}\left(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{N_2}\right)$であり，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{N_2}$は$\mathbf{W}^2$の固有値である($\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_{N_2}$)．$\mathbf{W}^2$の行和が1であるという条件より$\lambda_1=1$である．また$\mathbf{V}^c,\mathbf{V}^r$はそれぞれ列固有ベクトル，行固有ベクトルを並べた行列である．

式(18)から，

$$\begin{aligned}&\mathbf{p}^2(t)\\ &=\sum_{i=1}^{N_2}\begin{pmatrix}\lambda_i^t v_{1i}^c v_{i1}^r & \lambda_i^t v_{1i}^c v_{i2}^r & \cdots & \lambda_i^t v_{1i}^c v_{i,N_2}^r\\ \lambda_i^t v_{2i}^c v_{i1}^r & \lambda_i^t v_{2i}^c v_{i2}^r & & \lambda_i^t v_{2i}^c v_{i,N_2}^r\\ & & \ddots & \vdots\\ \lambda_i^t v_{N_2,i}^c v_{i1}^r & \lambda_i^t v_{N_2,i}^c v_{i2}^r & \cdots & \lambda_i^t v_{N_2,i}^c v_{i,N_2}^r\end{pmatrix}\mathbf{p}^2(0)\end{aligned} \tag{19}$$

ここで，Haveliwala and Kamvar[5]より，式(10)の情報伝達行列の二番目に大きい固有値は$|\lambda_2|\leq c$を満たす．したがって，$1>c\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_{N_2}$より

$$\lim_{t\to\infty}(\lambda_2)^t=\cdots=\lim_{t\to\infty}\left(\lambda_{N_2}\right)^t=0 \tag{20}$$

が成り立ち，式(19)から，

$$\mathbf{p}^2(\infty)=\mathbf{v}_1^c\mathbf{v}_1^r\mathbf{p}^2(0) \tag{21}$$

となり，性質２が示された．□

３．まとめ

本研究ではForceful Agentを考慮した場合における信念の定常状態の理論的な性質を明らかにした．Forceful Agentが信念の形成にもたらす影響が社会的にどのような意味を持つのかを把握することは今後の課題である．

参考文献

1) Orrell., D.:The Future of Everything:The Science of Prediction, Thunder's Mouth Press, 2007.
2) Jadbabie. A., Sandroni. A., and Tahbaz-Salehi. A.:Non-Bayesian Social Learning, *PIER Working Paper*,2010.
3) Acemoglu D., Ozdaglar A., and ParandehGhebi A.: Spread of (mis)information in social network, *Games and Economic Behavior*, 2010.
4) 大窪和明，奥村誠，高齢者の情報集約機能に関する社会的ネットワーク分析，*土木計画学研究・講演集* Vol.41. CD-ROM 2010.
5) Haveliwala, T. H., and Kamvar, S. D.:The Second Eigenvalue of the Google Matrix, Stanford *University Technical Report*,2003.