連続平面都市における応用都市経済モデルの可能性*

Towards Computable Urban Economic Model over a Continuous Plane City*

宮田　譲**

By Yuzuru MIYATA **

１．はじめに

連続平面都市に関する研究はBeckman[1)]（1952），Beckman and Puu[2)]（1985）によって本格的に展開されたものと判断される。この研究は物流，人流を明示的に捉えていることに特徴がある。しかしながら家計や企業の立地についての考察は必ずしも満足できるものではなく，新都市経済学的考察が必要とされる。この観点からMiyata[3)]（2010)は家計と企業の付け値地代関数を導入し，偏微分方程式論を用いたより体系的な考察を行った。Beckman and Puu[2)]（1985)では偏微分方程式の形式を示唆しているものの，具体的には解いていない。Miyata[3)]（2010)は全ての偏微分方程式を解析的に解き，実用化に向けた道を開いている。本研究ではMiyata[3)] (2010)で示された主要結果，拡散効果と混雑効果等を紹介するとともに，交通コストが地点的に異なるspatial characteristic vector field(空間特性ベクトル場)の概念を導入し，土地利用パタンの非対称均衡に言及する。さらに実際のデータをどのように用い，計算するのかも示し，新たな応用都市経済モデルを示唆する。

２．経済主体の行動

（１）本研究の主要前提条件

a)連続平面上での都市を仮定する。土地の特性は同質ではなく，各地点で異なっている。その特性を２次元座標$(x_1,\ x_2)$の関数$(lc_1(x_1,\ x_2),\cdots,lc_n(x_1,\ x_2))$で表し，spatial characteristic vector field（SCVF，空間特性ベクトル場)と呼ぶ。例えば土地の凹凸，勾配などである。これらは交通費用のみに影響を与えるとする。

b)本研究では財輸送と通勤を考えるが，その費用はvon Thünen形式とする。財１単位が地点(x_1, x_2)を通過するときの交通費用をSCVF 上のスカラー関数として$\varepsilon(x_1, x_2)$で表し，通勤については労働者１人当り$\zeta(x_1,x_2)$で表わす。

c)都市には N 人の家計と M の企業が存在している。これらの数は十分に大きいものとする。家計，企業はそれぞれ同質とする。

d)都市内の土地は不在地主によって所有されている。都市には唯一の地方政府があり，地方政府は都市内の土地を不在地主から借りている。地方政府は家計，企業から市場で決まる土地レントを受け取り，それを家計に均等に再分配する。

e)資本ストックのサービスをニューメレール(価格１)とする。これは資本ストックの企業間移動は費用無しで行われると仮定するため，資本サービス価格は立地点に依存しなくなるためである。

f)後に述べるように，企業の立地ポテンシャル関数内の２つのパラメータが十分に大きいとする。この場合，von Thünen 環は均衡都市形状となりえるからである。

（２）企業行動

地点$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$での企業の生産関数はCobb-Douglas 型とする。また集積の経済を考え，それを式(1)の立地ポテンシャル関数[4)]で表現する。

$$\Omega(\boldsymbol{x}) \equiv \int\int_A \mu b(\boldsymbol{y}) \exp(-\omega \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \|) dy_1 dy_2 \qquad (1)$$

ここで，A：都市域，$b(\boldsymbol{y})$：地点$\boldsymbol{y}$ での企業密度，μ, ω：パラメータ，$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$：地点$\boldsymbol{x}$ と地点$\boldsymbol{y}$ との距離

地点$\boldsymbol{x}$ での企業の生産関数は式(2)で表される。

$$q(\boldsymbol{x}) = \Omega(\boldsymbol{x}) q_A k_d(\boldsymbol{x})^{\alpha_k} l_d(\boldsymbol{x})^{\alpha_l} m_B(\boldsymbol{x})^{\alpha_m} \qquad (2)$$

ここで，$q(\boldsymbol{x})$：地点$\boldsymbol{x}$での生産量，$k_d(\boldsymbol{x})$：資本投入量，$l_d(\boldsymbol{x})$：労働投入量，$m_B(\boldsymbol{x})$：土地投入量，q_A：効率パラメータ，$\alpha_k, \alpha_l, \alpha_m$：弾力性パラメータ$(\alpha_k+\alpha_l+\alpha_m=1)$

財価格，資本収益率，賃金率が与えられたもとでの企業による付け値地代は式(3)となる。企業の生産技術が１次同次であるため，均衡利潤はゼロとなる。

*キーワーズ：連続平面上の都市経済モデル，応用都市経済モデル，空間特性ベクトル場，偏微分方程式

**正員，学博，豊橋技術科学大学大学院建築・都市システム学系（豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1-1，TEL：0532-44-6955，E-mail：miyata@ace.tut.ac.jp，miyata@hse.tut.ac.jp）

$$g_B(\boldsymbol{x}) \equiv max\left[\frac{p(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{x}) - r(\boldsymbol{x})k_d(\boldsymbol{x}) - w(\boldsymbol{x})l_d(\boldsymbol{x})}{m_B(\boldsymbol{x})}\right]$$

$$with\ respect\ to\ k_d(\boldsymbol{x}), l_d(\boldsymbol{x}), and\ m_B(\boldsymbol{x}) \tag{3}$$

subject to

$$q(\boldsymbol{x}) = \Omega(\boldsymbol{x})q_A k_d(\boldsymbol{x})^{\alpha_k} l_d(\boldsymbol{x})^{\alpha_l} m_B(\boldsymbol{x})^{\alpha_m}$$

$$\pi_B(\boldsymbol{x}) = 0$$

ここで，$p(\boldsymbol{x})$：地点$\boldsymbol{x}$での財価格，$r(\boldsymbol{x})$：地点$\boldsymbol{x}$での資本収益率，$w(\boldsymbol{x})$：地点$\boldsymbol{x}$での賃金率，$g_B(\boldsymbol{x})$：地点$\boldsymbol{x}$での企業による付け値地代，$\pi_B(\boldsymbol{x})$：地点$\boldsymbol{x}$での企業利潤

この最適化問題を解くと，地点 $\boldsymbol{x}$ での企業の生産 $q(\boldsymbol{x})$に伴う条件付労働需要，条件付資本需要，付け値ロットサイズ，付け値地代関数が求まる。

$$k_d(\boldsymbol{x}) = \frac{\alpha_k p(\boldsymbol{x})}{r(\boldsymbol{x})} q(\boldsymbol{x}) \tag{4}$$

$$l_d(\boldsymbol{x}) = \frac{\alpha_l p(\boldsymbol{x})}{w(\boldsymbol{x})} q(\boldsymbol{x}) \tag{5}$$

$$m_B(\boldsymbol{x}) = (\Omega(\boldsymbol{x})q_A)^{-\frac{1}{\alpha_m}} p(\boldsymbol{x})^{\frac{\alpha_m - 1}{\alpha_m}} \left[\frac{r(\boldsymbol{x})}{\alpha_k}\right]^{\frac{\alpha_k}{\alpha_m}} \left[\frac{w(\boldsymbol{x})}{\alpha_l}\right]^{\frac{\alpha_l}{\alpha_m}} q(\boldsymbol{x}) \tag{6}$$

$$g_B(\boldsymbol{x}) = \alpha_m (p(\boldsymbol{x})\Omega(\boldsymbol{x})q_A)^{\frac{1}{\alpha_m}} \left[\frac{\alpha_k}{r(\boldsymbol{x})}\right]^{\frac{\alpha_k}{\alpha_m}} \left[\frac{\alpha_l}{w(\boldsymbol{x})}\right]^{\frac{\alpha_l}{\alpha_m}} \tag{7}$$

（３）家計行動

地点$\boldsymbol{x}$における１家計の効用関数は以下で表される。

$$u(c(\boldsymbol{x}), m_H(\boldsymbol{x})) \equiv c(\boldsymbol{x})^{\beta_c} m_H(\boldsymbol{x})^{\beta_m} \quad (\beta_c + \beta_m = 1) \tag{8}$$

ここで，$c(\boldsymbol{x})$：地点$\boldsymbol{x}$における１家計の財消費量，$m_H(\boldsymbol{x})$　：地点$\boldsymbol{x}$における１家計の土地面積，β_c，β_m：弾力性パラメータ

各家計は所有する労働時間l_sと資本ストックk_sを価格に対して完全非弾力的に企業に提供する。そして所得$w(\boldsymbol{x})\ l_s + r(\boldsymbol{x})\ k_s + \pi_H$を得る。ここで$\pi_H$は地方政府による再分配所得を表す。立地均衡状態では家計の効用水準は立地点に依存しない値u^*を取る。これより地点$\boldsymbol{x}$における家計の付け値地代関数は以下となる[5)]。

$$g_H(\boldsymbol{x}) \equiv max \frac{w(\boldsymbol{x})l_s + r(\boldsymbol{x})k_s + \pi_H - p(\boldsymbol{x})c(\boldsymbol{x})}{m_H(\boldsymbol{x})} \tag{9}$$

$$with\ respect\ to\ c(\boldsymbol{x})\ and\ m_H(\boldsymbol{x})$$

subject to $u(\boldsymbol{x}) = u^*$

また地方政府による再分配所得は以下で定義される。

$$\pi_H \equiv \frac{1}{N}\iint_A [g_B(\boldsymbol{x})b(\boldsymbol{x})m_B(\boldsymbol{x}) + g_H(\boldsymbol{x})h(\boldsymbol{x})m_H(\boldsymbol{x})]dx_1 dx_2 \tag{10}$$

ここで，$h(\boldsymbol{x})$：地点$\boldsymbol{x}$における家計密度

式(8)の最適化問題を解くと，１家計の均衡消費量，付け値土地面積，付け値地代が求まる。

$$c(\boldsymbol{x}) = \frac{\beta_c}{p(\boldsymbol{x})}(w(\boldsymbol{x})l_s + r(\boldsymbol{x})k_s + \pi_H) \tag{11}$$

$$m_H(\boldsymbol{x}) = \left[\frac{p(\boldsymbol{x})}{\beta_c(w(\boldsymbol{x})l_s + r(\boldsymbol{x})k_s + \pi_H)}\right]^{\frac{\beta_c}{\beta_m}} u^{*\frac{1}{\beta_m}} \tag{12}$$

$$g_H(\boldsymbol{x}) = \beta_m \left[\frac{\beta_c}{p(\boldsymbol{x})}\right]^{\frac{\beta_c}{\beta_m}} \left[\frac{w(\boldsymbol{x})l_s + r(\boldsymbol{x})k_s + \pi_H}{u^*}\right]^{\frac{1}{\beta_m}} \tag{13}$$

（４）土地市場均衡条件

土地市場均衡条件としては分析の簡便さを優先して，単一中心都市を前提とする。これは立地ポテンシャル関数のパラメータを適切に選べば，単一中心都市が均衡都市形状となることが証明されているためである[3)]。市場地代は以下のように表される。

$$g(\boldsymbol{x}) \equiv \max\{g_B(\boldsymbol{x}), g_H(\boldsymbol{x}), g_A\} \tag{14}$$

ここでg_Aは農業地代を表す。

業務地区が都心部にあり，その周辺に居住地区がある場合に，均衡地代は以下となる。

$g(\boldsymbol{x}) = g_B(\boldsymbol{x}) \geq g_H(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x}$∈業務地区　(15)

$g(\boldsymbol{x}) = g_B(\boldsymbol{x}) = g_H(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x}$∈業務地区と居住地区の境界上　(16)

$g(\boldsymbol{x}) = g_H(\boldsymbol{x}) \geq g_B(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x}$∈居住地区　(17)

$g(\boldsymbol{x}) = g_H(\boldsymbol{x}) = g_A(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x}$∈都市境界上　(18)

さらに土地市場の均衡条件には以下の企業数および人口制約条件が必要となる。

$$M = \iint_{A_B} \frac{1}{m_B(\boldsymbol{x})} dx_1 dx_2 \quad (A_B：業務地区) \tag{19}$$

$$N = \iint_{A_H} \frac{1}{m_H(\boldsymbol{x})} dx_1 dx_2 \quad (A_H：居住地区) \tag{20}$$

（５）財，労働，資本に関する局所バランス方程式

まず財の輸送費用には財そのものを使うとして(von Thünen技術)，その比率を$\varepsilon(\boldsymbol{x}) \equiv \varepsilon(x_1, x_2)$としよう。$\varphi(\boldsymbol{x})$を単位時間当たり地点$\boldsymbol{x}$に運ばれる財の２次元ベクトルとする。この時，地点$\boldsymbol{x}$ における財輸送量の変化について，

以下の局所バランス方程式が成立する。

$$div\,\varphi(\boldsymbol{x}) = q(\boldsymbol{x})b(\boldsymbol{x}) - c(\boldsymbol{x})h(\boldsymbol{x}) - \varepsilon(\boldsymbol{x})\|\varphi(\boldsymbol{x})\| \quad (21)$$

ここで，‖・‖：２次元ベクトルのノルム，$b(\boldsymbol{x})$：地点$\boldsymbol{x}$での企業密度(＝１／$m_B(\boldsymbol{x})$)，$h(\boldsymbol{x})$：地点$\boldsymbol{x}$での家計密度(＝$1/m_H(\boldsymbol{x})$)

同様に１単位の労働を単位距離輸送する費用(時間で測られる)を$\zeta(\boldsymbol{x}) \equiv \zeta(x_1, x_2)$ とする。$\psi(\boldsymbol{x})$を地点$\boldsymbol{x}$において単位時間当りに輸送される労働量の２次元ベクトルとすると，地点$\boldsymbol{x}$における労働輸送の変化について，以下の局所バランス式が成立する。

$$div\,\psi(\boldsymbol{x}) = l_s h(\boldsymbol{x}) - l_d(\boldsymbol{x})b(\boldsymbol{x}) - \zeta(\boldsymbol{x})\|\psi(\boldsymbol{x})\| \quad (22)$$

資本ストックについては費用なしで移動自由とする。これは一旦資本ストックが装備されれば，均衡状態においては移動しないため，物流や通勤に比べ移動費用は微少と考えられるためである。したがって各地点において資本均衡が成立する。

$$k_d(\boldsymbol{x})b(\boldsymbol{x}) = ks(\boldsymbol{x}) \quad (23)$$

ここで$\iint_A ks(\boldsymbol{x})dx_1dx_2 = \iint_A k_s h(\boldsymbol{x})dx_1dx_2$，$ks$：１家計当りの資本ストック保有量

資本ストックの移動自由性から，以下が成立する。

$$\iint_A ks(\boldsymbol{x})dx_1dx_2 = k_s N \quad (24)$$

（６）財市場と労働市場の大域的均衡条件

財局所バランス式をGauss発散定理[2]を用いて積分すれば，財市場の大域的均衡条件が導出される。なお本研究では都市での生産物は全て都市内で消費され，移出入は考えない。したがって式(25)の右辺はゼロとなる。

$$\begin{aligned}\iint_A div\,\varphi(\boldsymbol{x})dx_1dx_2 &= \iint_A [q(\boldsymbol{x})b(\boldsymbol{x}) - c(\boldsymbol{x})h(\boldsymbol{x}) \\ &- \varepsilon(\boldsymbol{x})\|\varphi(\boldsymbol{x})\|]dx_1dx_2 = \int_{\partial A} c_n(\boldsymbol{x}(s))ds = 0\end{aligned} \quad (25)$$

ここで，∂A：都市境界，$c_n(\boldsymbol{x}(s))$：都市境界と法線方向の財の移出入量

労働についても家計の都市内外との移動を考えないため，式(26)の大域的均衡条件を得る。

$$\begin{aligned}&\iint_A div\,\psi(\boldsymbol{x})dx_1dx_2 \\ &= \iint_A [l_s h(\boldsymbol{x}) - l_d(\boldsymbol{x})b(\boldsymbol{x}) - \zeta(\boldsymbol{x})\|\psi(\boldsymbol{x})\|]dx_1dx_2 \\ &= \int_{\partial A} l_n(\boldsymbol{x}(s))ds = 0\end{aligned} \quad (26)$$

ここで，$l_n(\boldsymbol{x}(s))$：都市境界と法線方向の人口移動

（７）財輸送業者

財の輸送は財輸送業者によってなされるものとする。財輸送業者は地点 $\boldsymbol{x}$ で $p(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{x})b(\boldsymbol{x})$の財を企業から購入し，家計に $p(\boldsymbol{x})c(\boldsymbol{x})h(\boldsymbol{x})$を売る。ここで地点 $\boldsymbol{x}$ に家計が存在しない場合には財は持ち越しとなり，企業が存在しない場合には売るだけとなる。

したがって地点 $\boldsymbol{x}$ での財輸送業者の利潤は以下となる。

$$\begin{aligned}\pi_{Tq}(\boldsymbol{x}) &= p(\boldsymbol{x})c(\boldsymbol{x})h(\boldsymbol{x}) - p(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{x})b(\boldsymbol{x}) \\ &= -p(\boldsymbol{x})div\,\varphi(\boldsymbol{x}) - p(\boldsymbol{x})\varepsilon(\boldsymbol{x})\|\varphi(\boldsymbol{x})\|\end{aligned} \quad (27)$$

財輸送業者は都市全体での利潤が最大となるようなルートを探索する。これは式(27)を都市全体で積分し，それに変分法を用いることによって求められる。財輸送に関する最適条件は式(28)に帰着する。

$$p(\boldsymbol{x})\varepsilon(\boldsymbol{x})\frac{\varphi(\boldsymbol{x})}{\|\varphi(\boldsymbol{x})\|} = grad\ p(\boldsymbol{x}) \quad (28)$$

この式において$\varphi(\boldsymbol{x})$ / ‖ $\varphi(\boldsymbol{x})$ ‖ は財輸送の方向を表し，それが財価格の勾配となっていることを表す。すなわち財輸送の方向は，財価格が最も高くなる方向である。これがBeckmann[1](1952)による有名なgradient lawである。

$p(\boldsymbol{x})\varepsilon(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})$ / ‖ $\varphi(\boldsymbol{x})$ ‖は財１単位を単位距離輸送する費用を表す。地点$\boldsymbol{x}_A$と地点$\boldsymbol{x}_B$を結ぶ最適ルート上での輸送費用を求めてみよう。最適ルートを以下のようにパラメタライズする。$D(s) = (x_1(s), x_2(s))$ $(0 \le s \le 1, \boldsymbol{x}_A = (x_1(0), x_2(0)), \boldsymbol{x}_B = (x_1(1), x_2(1)))$。したがって財１単位の輸送費用は以下で表される。

$$\begin{aligned}&\int_0^1 p(\boldsymbol{x}(s))\varepsilon(\boldsymbol{x}(s))\frac{\varphi(\boldsymbol{x}(s))}{\|\varphi(\boldsymbol{x}(s))\|}\frac{d\boldsymbol{x}(s)}{ds}ds \\ &= \int_0^1 grad\ p(\boldsymbol{x}(s))\frac{d\boldsymbol{x}(s)}{ds}ds = p(\boldsymbol{x}_B) - p(\boldsymbol{x}_A)\end{aligned} \quad (29)$$

式(29)は最適ルート上での財１単位の輸送費用が，２地点間の価格差になっていることを表しており，財価格に輸送費用が含まれていることを意味している。

さらに財輸送業者の都市全体での総利潤はゼロであることも確認できる。

（８）通勤輸送業者

通勤は通勤輸送業者によってなされるものとする。通勤輸送業者は地点$\boldsymbol{x}$で$w(\boldsymbol{x})l_d(\boldsymbol{x})b(\boldsymbol{x})$の賃金を企業から受け取り，家計に$w(\boldsymbol{x})l_s h(\boldsymbol{x})$の賃金を支払い，労働者を輸送する。ここで地点$\boldsymbol{x}$に家計が存在しない場合には新規乗車はなく，企業が存在しない場合には降車だけとなる。

通勤輸送業者も都市全体での利潤が最大となるようなルートを探索する。これも変分法によって求められる。

通勤に関する最適条件は式(30)に帰着する。

$$w(\mathbf{x})\zeta(\mathbf{x})\frac{\psi(\mathbf{x})}{\|\psi(\mathbf{x})\|}=grad\ w(\mathbf{x}) \tag{30}$$

式(30)は通勤輸送の方向が，賃金率が最も高くなる方向であることを示している。通勤輸送の最適ルート上では，賃金率に通勤費用が含まれていること，都市全体での通勤輸送業者の総利潤がゼロとなることも確認できる。

３．財価格

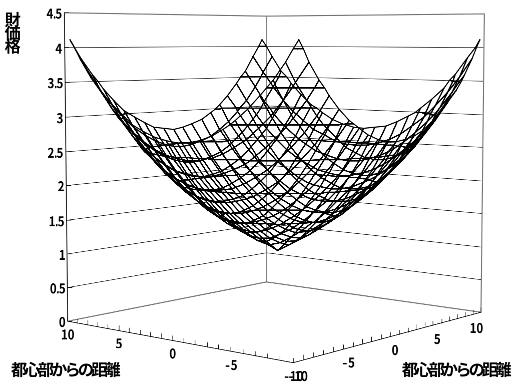
式(28)の財価格方程式は以下の非線形１階偏微分方程式に変形可能である。

$$\left(\frac{\partial ln\ p(\mathbf{x})}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial ln\ p(\mathbf{x})}{\partial x_2}\right)^2=\varepsilon(\mathbf{x})^2 \tag{31}$$

この方程式は解くことができ，初期多様体が１点に退化している場合，解は以下となる。

$$p(x_1,x_2)=p_0\exp\varepsilon(x_1,x_2)\sqrt{x_1^2+x_2^2} \tag{32}$$

財価格の初期値 p_0 は，都市全体の均衡条件から決まる都市境界上での財価格によって決まる。式(32)は積分コノイド[6)]と呼ばれ，$\varepsilon(x_1, x_2)$が定数のとき図－１のような解曲面となる。$\varepsilon(x_1,x_2)$が変数の場合は後に述べる。



図－１　財価格の空間的プロファイル

４．賃金率

賃金率も同様に式(30)を変形して，非線形１階編微分方程式を導き，その解は以下となる。

$$w(x_1,x_2)=w_0\exp(-\zeta(x_1,x_2)\sqrt{x_1^2+x_2^2}) \tag{33}$$

賃金率の空間的プロファイルは財価格とは逆に賃金率は都心部に向かって高くなるが，これは企業が負担する賃金率を表すためである。

５．最適財輸送量

ここでは最適財輸送量を求めてみよう。式(28)を変形すると，以下の１階準線形偏微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned}&\frac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|}\frac{\partial\|\varphi(\mathbf{x})\|}{\partial x_1}+\frac{\tilde{x}_2}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|}\frac{\partial\|\varphi(\mathbf{x})\|}{\partial x_2}\\&=q(\mathbf{x})b(\mathbf{x})-c(\mathbf{x})h(\mathbf{x})\\&-\|\varphi(\mathbf{x})\|(\varepsilon(\mathbf{x})+div\ \tilde{\mathbf{x}}/\|\tilde{\mathbf{x}}\|)\end{aligned} \tag{34}$$

ここで，$\tilde{x}_1\equiv(\partial\varepsilon(\mathbf{x})/\partial x_1)\|\mathbf{x}\|+\varepsilon(\mathbf{x})x_1/\|\mathbf{x}\|$，

$\tilde{x}_2\equiv(\partial\varepsilon(\mathbf{x})/\partial x_2)\|\mathbf{x}\|+\varepsilon(\mathbf{x})x_2/\|\mathbf{x}\|$, $\tilde{\mathbf{x}}\equiv(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)$

式(34)の左辺は財輸送の方向微分を表す。方向は$(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)$を基準化したものであるが，交通費用が高い方向への財輸送量変化が強調されることになる。

右辺第１項は地点 $\mathbf{x}$ での財生産量，第２項は家計消費量，第３項は輸送で消費される財の量と一般化拡散効果を表す。ここで一般化拡散効果とは財輸送が遠方になるほど財輸送量の変化が小さくなることを表している。これは SCVF を導入し，土地密度を考えなければ１次元線形都市モデルでは決して現れない。

$div\ \tilde{\mathbf{x}}/\|\tilde{\mathbf{x}}\|$ は計算可能であるが，極めて複雑な式となり，経済学的含意も読みにくい。しかしながら $\varepsilon(\mathbf{x})$の変化が都心部からの距離に比べ微小な時， $div\ \tilde{\mathbf{x}}/\|\tilde{\mathbf{x}}\|$ は距離に関して減少関数となり拡散効果の特性を持つ。

式(34)右辺はスカラーであるため，左辺の$\tilde{x}_1/\|\tilde{\mathbf{x}}\|$が大きいとすると(すなわち$x_1$方向の交通費用が高い時)，式(34)が成立するためには，$\partial\|\varphi(\mathbf{x})\|/\partial x_1$ は小さくなるのが自然であろう。すなわち交通費用が高い方向への財輸送量は小さくなり直感と一致する。

さて式(34)を都心部からの距離をパラメータとして解くと式(35)を得る。

$$\begin{aligned}\|\varphi(\mathbf{x}(s))\|&=\int_0^s[q(\mathbf{x}(\tau))b(\mathbf{x}(\tau))-c(\mathbf{x}(\tau))h(\mathbf{x}(\tau))]\\&\cdot exp\left(-\int_\tau^s div\ \tilde{\mathbf{x}}(\eta)/\|\tilde{\mathbf{x}}(\eta)\|d\eta\right)\\&\cdot exp\left(-\int_\tau^s \varepsilon(\mathbf{x}(\eta))\,d\eta\right)d\tau\end{aligned} \tag{35}$$

また財輸送ベクトルは以下で表される。

$$\varphi(\mathbf{x})=(\|\varphi(\mathbf{x})\|\tilde{x}_1/\|\tilde{\mathbf{x}}\|,\|\varphi(\mathbf{x})\|\tilde{x}_2/\|\tilde{\mathbf{x}}\|) \tag{36}$$

SCVFが一様の時の式(35)の解曲面は図－２のように表されるが，交通費用が地点に依存する時は，財輸送方向は曲線となることが分かる。

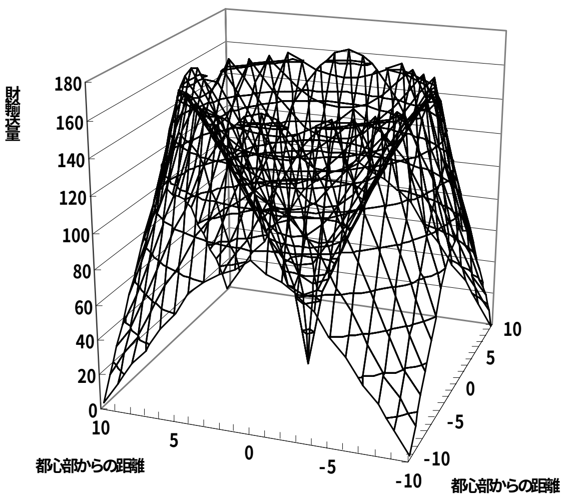
ここで式(35)の説明をしておこう。積分の[・]は財生産量から財消費量を控除したものである。

次の指数関数積分は財が遠方から運ばれるほど，地点$\mathbf{x}$への到達量は減少するという一般化拡散効果を表す。

変動する土地密度やSCVFを導入しない限り線形都市モデルでは決して現れないものであり，本研究により初めて理論的に導き出されたものである。

最後の指数関数積分は地点ごとに異なる交通費用を積分したもので，財輸送量が交通費用によって消費されることを示す。ちなみにεが定数であれば$exp(-\varepsilon\cdot(s-\tau))$であり，直感的に分かり易い。式(35)を言葉で書けば以下となり，極めて直感的である。

地点xに到達する財量＝(総生産量－総消費量)×一般化拡散効果－輸送での財消費量



図－２　財輸送量の空間的プロファイル

６．最適通勤輸送

最適通勤輸送を表現する微分方程式は，式(31)のようである。

$$\frac{\tilde{l}_1}{\|\tilde{\boldsymbol{l}}\|}\frac{\partial\|\psi(\boldsymbol{x})\|}{\partial x_1}+\frac{\tilde{l}_2}{\|\tilde{\boldsymbol{l}}\|}\frac{\partial\|\psi(\boldsymbol{x})\|}{\partial x_2}$$
$$=l_s h(\boldsymbol{x})-l_d(\boldsymbol{x})b(\boldsymbol{x}) \qquad (37)$$
$$-\|\psi(\boldsymbol{x})\|(\zeta(\boldsymbol{x})-div\,\tilde{\boldsymbol{l}}/\|\tilde{\boldsymbol{l}}\|)$$

ここで，$\tilde{l}_1\equiv(\partial\zeta(\boldsymbol{x})/\partial x_1)\|\boldsymbol{x}\|+\zeta(\boldsymbol{x})x_1/\|\boldsymbol{x}\|$,

$\tilde{l}_2\equiv(\partial\zeta(\boldsymbol{x})/\partial x_2)\|\boldsymbol{x}\|+\zeta(\boldsymbol{x})x_2/\|\boldsymbol{x}\|, \tilde{\boldsymbol{l}}\equiv(\tilde{l}_1,\tilde{l}_2)$

式(37)の右辺div項は財輸送方程式と符号が逆になっているが，これは通勤が都心部から離れたところから都心部に向かうことによる一般化混雑効果を表している。式(37)については都市境界からの距離をパラメータとして，最適通勤輸送量が以下のように求まる。ただしSは都市境界を与えるパラメータ値を表す。

$$\|\psi(\boldsymbol{x}(S-s))\|=\int_0^s\,[l_s h(\boldsymbol{x}(S-\tau))-l_d(\boldsymbol{x}(S-\tau))$$
$$\cdot b(\boldsymbol{x}(S-\tau))]\cdot exp\left(\int_\tau^s div\,\tilde{\boldsymbol{l}}(\eta)/\|\tilde{\boldsymbol{l}}(\eta)\|\,d\eta\right) \qquad (38)$$
$$\cdot exp\left(-\int_\tau^s \zeta(\boldsymbol{x}(\eta))d\eta\right)d\tau$$

さらに通勤輸送ベクトルは以下となる。

$$\psi(\boldsymbol{x})=(-\|\psi(\boldsymbol{x})\|\tilde{l}_1/\|\tilde{\boldsymbol{l}}\|,-\|\psi(\boldsymbol{x})\|\tilde{l}_2/\|\tilde{\boldsymbol{l}}\|) \qquad (39)$$

式(39)においても通勤費用が地点に依存する時は．通勤ルートは曲線となることが分かる。

式(38)について最初の[・]は労働供給量から労働需要量を控除したものである。

次の指数関数積分は家計(時間で測られる)の遠方から通勤を考慮するほど，地点$\boldsymbol{x}$への到着量は増加するという一般化混雑効果を表す。これも変動する土地密度及びSCVFを導入しない限り線形都市モデルでは決して現れないものである。

最後の指数関数積分は地点ごとに異なる通勤費用を積分したもので，家計保有時間が通勤費用によって消費されることを示す。ζが定数であれば$exp(-\zeta\cdot(s-\tau))$であり自然な現象である。式(38)は以下のように文章化される。

地点xに到着する労働量＝(総労働供給量－総労働需要量)×一般化混雑効果－通勤での消費時間

７．均衡条件

最後に本モデルの均衡条件をまとめておこう。

財市場：式(35)で$\|\varphi(\boldsymbol{x}(S))\|=0$ (40)

労働市場：式(38)で$\|\psi(\boldsymbol{x}(0))\|=0$ (41)

資本市場

$ks(\boldsymbol{x})=k_d(\boldsymbol{x})b(\boldsymbol{x})$かつ$\iint_A ks(\boldsymbol{x})dx_1dx_2=N\cdot k_s$

($\boldsymbol{x}$は特性基礎曲線上の点を表す) (42)

土地市場

式(15)から式(18)

立地均衡条件

$\pi_B(\boldsymbol{x})=0:\boldsymbol{x}\in$業務地区 (43)

$u(\boldsymbol{x})=u^*:\ \boldsymbol{x}\in$居住地区 (44)

企業数・人口制約条件

$$M=\iint_{A_B}\frac{1}{m_B(\boldsymbol{x})}dx_1dx_2 \quad (A_B：業務地区) \qquad (45)$$

$$N = \iint_{A_H} \frac{1}{m_H(\boldsymbol{x})} dx_1 dx_2 \quad (A_H：居住地区) \quad (46)$$

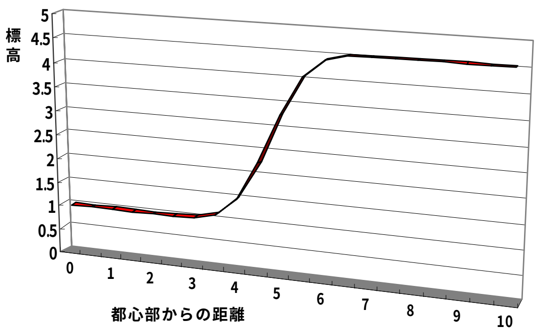
これらの条件により付け値地代$g_B(\boldsymbol{x})$, $g_H(\boldsymbol{x})$, 最大付け値ロットサイズ$m_B(\boldsymbol{x})$, $m_H(\boldsymbol{x})$, 均衡効用水準が決定され，都市の形状が決まる。

８．空間特性ベクトル場の導入

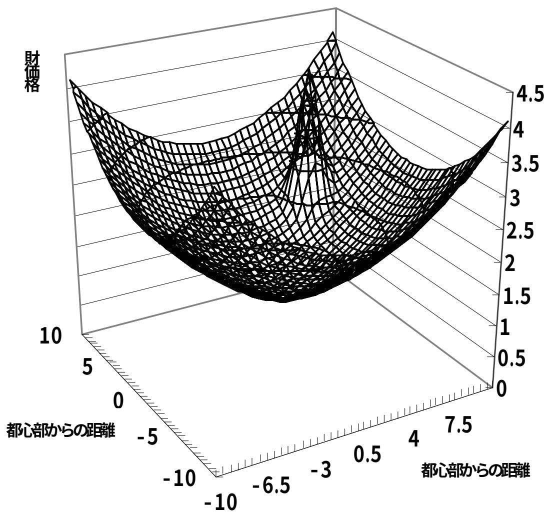
本論文を終わるに当り空間特性ベクトル場の影響を見ておこう。実証的には空間特性ベクトル場は複雑に変化するが，ここでは平面上の１ヵ所で財輸送費用が増加するケースを例に取る。図－３は原点から点(5, 5)方向への標高の変化を表している。点(3, x_2)から登り坂となり，点(7, x_2)で標高は3.5上昇する。この領域での交通費用の変化を正規分布とすると，財価格は図－４のようになり点(5, 5)で財価格はピークとなる。

この領域での財等価格集合は$(x_1-5)^2+(x_2-5)^2 = r^2$の円周であるが，これは原点からの財等価格集合$x_1^2 + x_2^2 = r^2$とは異なっており，財輸送ルートは点(3, x_2)から曲線となる。

これに対応して財生産，財消費，土地利用等が一般均衡効果として求まる。詳細な計算は極めて複雑となるため，最終結果は今後の課題としたい。



図－３　仮想的地理条件



図－４　地形条件に対応する交通費用変化の例

９．おわりに

本研究はBeckmann[1)]（1952），Beckmann and Puu[2)]（1985）によって導入された連続型空間経済モデルにおいて，具体的に偏微分方程式を解くことにより，単一中心都市における財輸送と通勤の様子を調べたものである。

本研究は著者自身の既存研究[3)]において固定係数としてきたvon Thünen交通費用係数をSCVFによる変動係数に拡張したものである。本研究の独自性をまとめれば以下のようである。

（１）交通経路を変分法により内生化できる。

（２）均質なSCVFでは直線しか現れない交通経路を，変化するSCVFにより曲線的交通経路を内生化できる。

（３）それに伴い一般化拡散効果，一般化混雑効果を導入できた。

（４）財輸送量や通勤輸送量もSCVFに対応して変化する。

（５）本論文では触れることができなかったが，曲線的交通経路は連続的に変化する媒質中の光の経路とも関連している。波動方程式と本研究との関連性は興味ある理論的課題である[3), 6), 7)]。

本研究のアプローチはできる限り内生的条件から都市を研究するという経済学の哲学とは反するものである。しかし応用都市経済モデルが整合的理論を持ちつつも，現実を再現するという目的には一致していると考えている。今後数値シミュレーションにより一般均衡モデルを解くことになるが，実証的課題として連続平面を離散化する時のグリッドの大きさ，地理情報の収集可能性などが挙げられる。なお本研究の一部は基盤研究(A)（課題番号19201010）の成果に基づいている．

参考文献

1)Beckmann, M.J.: A Continuous Model of Transportation, *Econometrica*, Vol.20, pp.642-660, 1952

2)Beckmann, M.J. and Puu, T.: *Spatial Economics: Density, Potential, and Flow*, North-Holland, 1985

3)Miyata, Y.: Integrating Commodity and Labor Flows into Monocentric City over a Two Dimensional Continuous Space, *Studies in Regional Science*, Vol.39, No.3, pp.631-658, 2010

4)Fujita, M. and Ogawa, H.: Multiple Equilibria and Structural Transition of Non-Monocentric Urban Configurations, *Regional Science and Urban Economics*, Vol.12, pp.161-196, 1982

5)Fujita, M.: *Urban Economic Theory: Land Use and City Size*, Cambridge, 1989

6)Courant, R. and Hilbert, D.: *Methods of Mathematical Physics*, Vol.2, Interscience Publishers, 1962

7)Duistermaat, J.J.: *Fourier Integral Operators*, Birkhäuser, 1996