社会資本を考慮した経済成長モデルの構造パラメータ推定*

Estimation of the Structural Parameters of Economic Growth Model with Public Capital*

加藤裕人**・宮城俊彦***

By Hiroto KATO**・Toshihiko MIYAGI***

1．はじめに

社会基盤整備の経済効果に関する研究は三井・太田[1]を始めとして数多く行われており，その中で社会資本のもつ生産力効果の低下等が指摘されてきた．これらの既存研究成果は江尻・奥村・小林[2]で総括的レビュウが行われている．既存研究の中で国内外を問わず広く用いられている手法が生産関数法である．この手法の問題点の一つとして，社会資本と経済成長の間の因果関係が十分に構造化できていないという批判が挙げられる．この因果関係を時系列データ間に見出そうとするのがVector Auto Regressive(VAR)アプローチである．VARなどの時系列解析においては，各時系列成分の間に存在する構造的関係や動的関連を分析すること，加えて，利用可能な情報から予測精度の向上を図ることが重要だと考えられる．しかし，VARアプローチは経済モデルを特定化しておらず，理論的裏付けに欠くモデルとなっている．また，Dynamic Stochastic General Equilibrium(DSGE)モデルやReal Business Cycle(RBC)モデルなどの動学的マクロ経済モデルを用いた研究においても，構造パラメータを外生的に与えているケースがほとんどであり，そのようなモデルから出力されるシミュレーション結果は現実経済に則した分析とは言い難い．これに対しIreland[3]は，実際の時系列データからRBCモデルの構造パラメータを推定するHybridモデルを提案している．加藤・宮城・仲原[4]では社会資本，人的資本を内生化したRBCモデルを提案すると同時に，Irelandの手法を利用し，日本のマクロ経済データを用いて構造パラメータの推定を行っている．カルマンフィルタを用いる手法には初期値依存という欠点があり，モデルの特性分析に大きな影響を及ぼす．

本研究では，RBCモデルの構造パラメータを部分空間同定法を用いて推定する方法を提案する．部分空間同定法は数値的に安定で一意的に解を求めることができるシステム同定の一種である．本研究はモデル分析と時系列解析またはシステム同定を組み合わせた形をとっている．つまり，実際の時系列データを取り入れ，システムの構造を把握し，モデルの動的特性などについて分析する．また，この手法を評価するため，予測精度をカルマンフィルタを用いた方法による予測と比較し，実体経済の再現性を検討する．ここでいうカルマンフィルタを用いた方法とは，カルマンフィルタを利用して尤度関数を作り，最尤法でモデルの構造パラメータを求め，得られた値を使って予測を行うというものである．この手法は，VARモデルによる予測よりも再現性が高いことが確認されている[4]．

2．RBCモデルの定式化

本研究では，加藤・宮城・仲原[4]で提案されたRBCモデルを扱う．このモデルの経済主体は，家計であり企業を所有・経営すると同時に，政府としての役割を担う代表的個人とする．代表的個人の生涯期待効用最大化問題を考えると，以下のように定式化される．

$$\max .E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \rho^t U(Cp_t, Cg_t, L_t) \tag{1}$$

$$s.t.\quad Y_t = A_t K_t^{\alpha} H_t^{\beta} G_t^{\gamma} (\eta^t L_t)^{1-\alpha-\beta-\gamma} \tag{2}$$

$$Y_t = Cp_t + Cg_t + Ip_t + Ig_t \tag{3}$$

$$K_{t+1} = Ip_t + (1-\delta_K) K_t \tag{4}$$

$$H_{t+1} = (Cg_t)^{\psi_1} (Ig_t)^{\psi_2} + (1-\delta_H) H_t \tag{5}$$

$$G_{t+1} = Ig_t + (1-\delta_G) G_t \tag{6}$$

$$\ln A_t = (1-\omega)\ln A + \omega \ln A_{t-1} + \varepsilon_t \tag{7}$$

$$\varepsilon_t \sim N(0,\sigma^2), \mathrm{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, i \neq j$$

変数はそれぞれt期における1人当たりの値であり，Y_t：生産，Cp_t：民間消費，Cg_t：政府消費，Ip_t：民間投資，Ig_t：公共投資，K_t：民間資本ストック，H_t：人的資本ストック，G_t：社会資本ストック，L_t：労働時間，A_t：技術進歩過程である．ここで，先決変数はK_t, H_t, G_t, A_t，非先決変数（コントロール変数）は$Y_t, Cp_t, Cg_t, Ip_t, Ig_t, L_t$であり，このモデルにおけるforward-looking変数はCp_t, Cg_t, Ig_tである．

*キーワード：計画基礎論，計画手法論，公共事業評価法

**学生員，東北大学大学院情報科学研究科

（宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-6,

TEL:022-795-7495, E-mail:kato@plan.civil.tohoku.ac.jp）

***正員，工博，東北大学大学院情報科学研究科

代表的個人の効用関数は式(8)のように表される．

$$U(Cp_t, Cg_t, L_t) = \ln Cp_t + \mu \ln Cg_t - \tau L_t \quad (8)$$

この効用関数において，政府消費支出のうち公共サービス等も効用増加をもたらすと想定している．代表的個人は変数$\{Y_t, Cp_t, Cg_t, Ip_t, Ig_t, L_t, K_{t+1}, H_{t+1}, G_{t+1}\}$を効用が最大となるように各期で決定する． μ，τ は効用に関するパラメータであり，「分割できない労働」[5] の仮定の下では，労働時間は効用に対して線形となる．式(2)の生産関数はコブ・ダグラス型で規模に関して収穫一定とし，パラメータηは労働増加的技術進歩である．式(4)は，予算制約式である．すなわち，生産が家計の所得であり，そこから消費，税金を差し引いた分が貯蓄に充てられる．貯蓄はすべて民間投資に回されるとする．人的資本は式(6)のように，政府消費と公共投資によって生産され，前期の人的資本ストック差し引き分を加えたものが当期の人的資本ストックを構成する．この人的資本の生産関数は，Uzawa-Lucasモデルに改良を加えたGong[6] のモデルを参考に構成した．Gongモデルは人的資本の生産関数に規模の経済性を導入し，さらに人的資本の代理変数として教育支出を用いている点が特徴的である．各資本の固定資本減耗率はδ_iであり，ψ は人的資本の規模に関する収穫逓減を発生させるパラメータである．技術進歩過程を表す式(7)は1次の自己回帰過程とし，Aは定数項，ωは1次の自己回帰パラメータ，確率的誤差項ε_tはガウス白色雑音とする．代表的個人はこの過程を知っており，これをもとに当期のショックを受けて，来期のショックを予想しながら今期の計画を立てるとする．

上記の定式化したモデルを標準的なRBCモデルの解法[7] に従い，合理的期待解を求める．

a) 代表的個人の最適化問題を解き，均衡条件式を導出する．
b) 各変数をηで除してトレンドを除去したあと，モデルの定常状態を算出する．
c) 確率的非線形差分方程式である均衡条件式を定常状態近傍で対数線形近似を行う．
d) Blanchard-Kahn条件を適用し，均衡条件式を状態空間表現に変形する．

この手順を経て得られる均衡条件式の状態空間表現は以下のようになる．

$$\begin{aligned} s_{t+1} &= \Pi(\theta) s_t + B\varepsilon_{t+1} \\ f_t &= U(\theta) s_t \end{aligned} \quad (9)$$

ここで，ΠとUはモデルの構造パラメータθの関数で表されるシステムパラメータ行列であり，状態ベクトルs_t，観測ベクトルf_t，行列Bは次のようになる．

$$s_t = [k_t \quad h_t \quad g_t \quad a_t]' \quad (10)$$

$$f_t = [y_t \quad cp_t \quad cg_t \quad ip_t \quad ig_t \quad l_t]' \quad (11)$$

$$B = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]' \quad (12)$$

ただし，対数線形化後の変数は，定常状態からの乖離率を表す．さらに，ip_tは予算制約式(2)から他の変数の残差として求めることができるため，観測ベクトルf_tからip_tを除き，式(13)に置き換え，新たに式(14)のような状態空間表現にする．

$$d_t = [y_t \quad cp_t \quad cg_t \quad ig_t \quad l_t]' \quad (13)$$

$$\begin{aligned} s_{t+1} &= \Pi(\theta) s_t + B\varepsilon_{t+1} \\ d_t &= C(\theta) s_t \end{aligned} \quad (14)$$

モデルの状態空間表現(14)において，行列Cは行列Uから，ip_tに関する行を除いた行列である．また，状態ベクトルの各変数は観測されることを前提としていない隠れ状態変数である．

３．部分空間同定法

部分空間同定法は入出力データから作られるブロックハンケル行列の特異値分解を利用して，直接状態空間モデルのシステムパラメータ行列を推定する手法である．多入出力系への拡張が容易であり，一意的に解が求まることから様々な分野で応用されている．入力変数もしくは制御変数のない状態空間モデルは確率状態空間モデルと呼ばれ， Akaike[8] によって提案された．確率状態空間モデルの構築は，確率システムの実現問題として表される．実現問題とは，与えられたインパルス応答列や有限長の入出力データに基づいて，システムの次元およびシステムパラメータ行列を同定することであり，ブロックハンケル行列を用いることで一意的に状態空間モデルを構成することができる．

（１）状態空間モデル

線形動的システムは状態方程式(15)と観測方程式(16)によって表される．

$$x_{t+1} = Ax_t + w_t \quad (15)$$

$$y_t = Cx_t + v_t \quad (16)$$

x_tは状態ベクトル，y_tは観測ベクトル，A, Cはシステムパラメータ行列である．ノイズw_t, v_tは平均値0の白色雑音であり，ノイズ共分散行列をQ, Rとする．

（２）確率実現問題

Faurre[9] によって提案された確率的部分空間同定法は，

Zeiger[10]による確定システムの実現理論とスペクトル分解法によって，与えられた共分散行列をもつ時系列を実現する状態空間モデルまたは時系列のマルコフ表現を求める方法である．はじめに，現在時刻をtとして，定常時系列$\{y(t), t=0,\pm1,\cdots\}$から共分散行列$\{\Lambda(j), j=0,1,\cdots,L\}$を作り，加えて，時系列の過去および未来から作られる有限次元ベクトルを式(17)のように定義する．

$$p(t)=\begin{bmatrix} y(t-1) \\ y(t-2) \\ \vdots \\ y(0) \end{bmatrix}, f(t)=\begin{bmatrix} y(t) \\ y(t+1) \\ \vdots \\ y(L) \end{bmatrix} \tag{17}$$

さらに，未来と過去の相互共分散行列H_{kk}（ブロックハンケル行列）を作る．

$$\begin{aligned} H_{kk} &= \{f(t)p^T(t)\} \\ &= \begin{bmatrix} \Lambda(1) & \Lambda(2) & \cdots & \Lambda(k) \\ \Lambda(2) & \Lambda(3) & \cdots & \Lambda(k+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda(k) & \Lambda(k+1) & \cdots & \Lambda(2k-1) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{18}$$

ここでは，サイクル長kがブロックハンケル行列の大きさを決めており，$2k-1 \le L, k > n$である．次に，H_{kk}の特異値分解を行う．

$$H_{kk}=\begin{bmatrix} U_s & U_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Sigma_s & 0 \\ 0 & \Sigma_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_s^T \\ V_n^T \end{bmatrix} \simeq U_s \Sigma_s V_s^T \tag{19}$$

ただし，Σ_sはH_{kk}の特異値を大きさの順にn個対角線上に配列した対角行列で，Σ_nの特異値は十分小さいとする．

式(19)の特異値分解に基づいて，拡大可観測行列，拡大可到達行列を以下のように定める．

$$\Gamma_k = U_s \Sigma_s^{1/2}, \Omega_k = \Sigma_s^{1/2} V_s^T \tag{20}$$

ここから，行列$A, C, \bar{C}^T$は

$$A=\underline{\Gamma}_k^{\dagger}\bar{\Gamma}_k, C=\Gamma_k(1:p,1:n), \bar{C}^T=\Gamma_k(1:n,1:p) \tag{21}$$

で与えられる．ただし，$\underline{\Gamma}_k, \bar{\Gamma}_k$はそれぞれ$\Gamma_k$の下$p$行，および上$p$行を除いた行列であり，†はMoore-Penroseの一般化逆行列を表す．

得られた$A, C, \bar{C}$及び$\Lambda(0)$を用いて，以下の代数リカッチ方程式(22)を構成し，

$$\begin{aligned} &\Pi = A\Pi A^T + \\ &(\bar{C}^T - A\Pi C^T)(\Lambda(0)-C\Pi C^T)^{-1}(\bar{C}-C\Pi A^T) \end{aligned} \tag{22}$$

この式の最小解$\Pi^* \ge 0$からカルマンゲインKが式(23)のように求まる．

$$K=(\bar{C}^T - A\Pi_* C^T)(\Lambda(0)-C\Pi_* C^T)^{-1} \tag{23}$$

以上より，得られたシステムパラメータ行列及びカルマンゲインから状態空間モデルを構成することができる．

5. 構造パラメータの推定

（1）構造パラメータの推定方法

RBCモデルを変形して得られる状態空間表現式(14)のシステムパラメータ行列は構造パラメータによって構成されている．このシステムパラメータ行列と部分空間同定法によって得られたシステムパラメータ行列の推定値から作られる連立方程式を解くことによって，各構造パラメータの値を求める．

（2）使用データ

使用するデータは1970年第1四半期～2005年第3四半期のわが国のマクロ経済データであり，内閣府社会経済研究所・国民経済計算データから民間最終消費支出，政府最終消費支出，民間固定資本形成，公的固定資本形成額を用いた．値は平成2暦年固定基準年方式の実質値であり，季節調整済である．生産額は式(3)の予算制約式に従い4変数の合計値として求める．平均総労働時間は厚生労働省・労働統計データを使用し，各変数を1人当たりの値にするため総務省統計局の15歳以上人口を用いてそれぞれ与える．

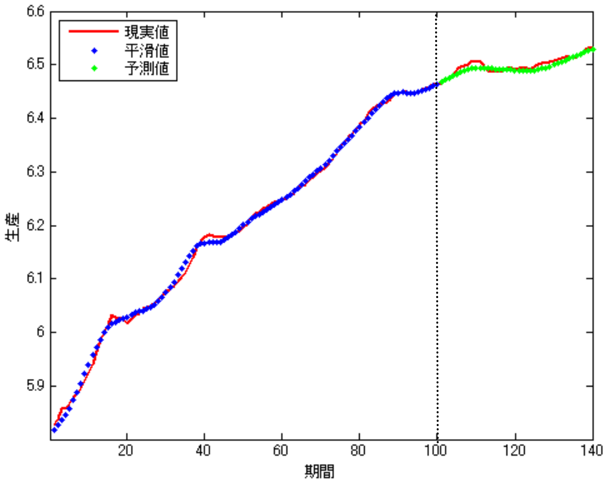
（3）推定結果

モデルの各資本ストックの生産弾力性を計測すると，$\alpha = 0.31$, $\beta = 0.11$, $\gamma = 0.09$と推定された．しかし，一部の構造パラメータの値が安定して求まらなかったため，それらの値は任意に設定した．技術ショックに対する各経済変数のインパルス反応を分析する際に，ここで得られた推定値を用いて行う．また，今回扱った部分空間同定法は，パラメータの初期値を与える必要がないため，カルマンフィルタを用いた際に発生する初期値依存の問題は解消される．

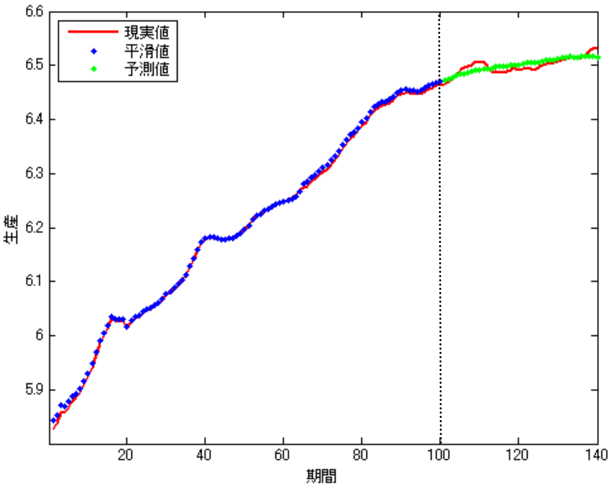
（4）予測精度の比較

部分空間同定法による予測がどれほど実体経済を再現できているのかを確認するため，カルマンフィルタによって与えられる予測の出力結果と比較する．ここでは1970年第1四半期から100期目までの観測データを教師データとして使用し，それ以降のデータは与えない．予測を行う対象は101期以降のRBCモデルにおける日本の生産量とする．ただし，部分空間同定法においてシステムの次数をモデルの次数と等しくし，サイクル長kは30

と設定する．



図－１　部分空間同定法による生産の予測



図－２　カルマンフィルタによる生産の予測

カルマンフィルタによる予測と比較して，部分空間同定法による予測の方が現実値の傾向を捉えている．一方，100期までの平滑化された値はカルマンフィルタの方が精度が高い．今回，部分空間同定法においてサイクル長 k を30に設定して予測を行ったが，これよりも k が小さいと短期的な再現性は高くなり，長期的には予測値が大きく外れる傾向にある．また，システムの次数を高く設定すると，予測値はほぼ現実値を再現できる．つまり，モデルを拡張し，対応する経済変数を増やすことを示唆している．

６．おわりに

部分空間同定法による予測は，データ更新が逐次的でないときの長期的予測に効果を発揮する．ただし，サイクル長の設定次第で予測の精度は大きく異なる．つまり，データ数によって予測結果が変わってくる．また，この部分空間同定法において，利用可能な有限個のデータからいかにして正確なブロックハンケル行列を構成するかが課題であり，そのためにはデータ数を増やす必要がある．マクロ経済の時系列データは限られているが，扱う変数の種類を増やすことで対処でき，それはシステムの次数を増やすことにもつながる．そして，次数が大きくなるほど予測の再現性も高くなる．

参考文献

１）　三井清，太田清編著：社会資本の生産性と公的金融，日本評論社，1995.
２）　江尻良，奥村誠，小林潔司：社会資本の生産性と経済成長:研究展望，土木学会論文集，No.688/IV-53，pp.75-87，2001.
３）　Ireland,P.N. ：A Method for Taking Models to the Data，Journal of Economic Dynamics and Control，Vol.24，pp.1205-26，2004.
４）　加藤裕人，宮城俊彦，仲原由布子：人的資本を内生化した経済成長モデルによる社会基盤整備の経済効果分析，土木計画学研究・論文集，vol.27，投稿中.
５）　Hansen,G.D.： Indivisible labor and the business cycle，Journal of Monetary Economics 16，pp.309-27，1985.
６）　Gong,G.，Greiner,A.，Semmler,W. ：The Uzawa-Lucas model without scale effects:theory and empirical evidence，Structural Change and Economic Dynamics 15，pp.401-20，2004.
７）　Blanchard，O.J. and Kahn，C.M.： The solution of Linear Difference Models under Rational Expectations，Econometrica 48，pp.1305-11，1980.
８）　Akaike,H: Stochastic theory of minimal realization，IEEE Transactions on Automatic Control，vol.AC-19，No.6，pp.667-74，1974.
９）　Faurre,P.L.： Stochastic realization algorithms，In system Identification: Advances and Case Studies,Academic，pp.1-25，1976.
１０）　Zeiger,H.P. and McEwen,A.J.： Approximate linear realization of given dimension via Ho’s algorithm，IEEE Transactions on Automatic Control，vol.AC-19，No.2，pp.153，1974.