リンク間相関を考慮した最尤法による交通ネットワーク均衡モデルのパラメータ推定 ：金沢市道路ネットワークへの適用を例に*

Estimation of Parameters on Network Equilibrium Model by Maximum Likelihood Method Considering Links' Correlation：An Analysis of Kanazawa Road Network *

穴口智也**・中山晶一朗***・髙山純一****

By Tomonari ANAGUCHI**・Shoichiro NAKAYAMA***・Jun-ichi TAKAYAMA****

1. はじめに

交通ネットワークの計画・分析の際，研究・実用上，交通ネットワーク均衡モデルは重要な役割を果たしている．実際に交通ネットワーク均衡モデルを適用する際には，各種パラメータの設定が必要となる．旅行時間関数のパラメータ，経路選択モデルのパラメータ，交通容量の設定パラメータなど重要なものは多くあり，広い意味で捉えると，OD 交通量もパラメータと位置付けることもでき，最も重要なパラメータ推定と言える．現在，多くの場合，パラメータは調査や過去の実例や研究から設定されることが多い．しかし，リンク交通量データ等を用いて，交通ネットワーク均衡モデルと整合性を保ち，内生的にパラメータを推定し，それを用いることも極めて重要と考えられる．

交通ネットワーク均衡としては，従来からワードロップ均衡や確率的利用者均衡が広く知られており，そのうち，確率的利用者均衡はランダム効用理論に基づいた経路選択を用いた交通ネットワーク均衡である．ただし，確率的利用者均衡では旅行時間を含む変数から構成される経路効用は確率的であるが，各道路利用者は確率的には経路を選択しておらず，配分される交通量や旅行時間は確定的であるため,「確率的利用者均衡」という名称の「確率的」という用語は誤解を生じやすい．それゆえ，別の名称で呼ぶことが望ましいとも考えられる．本研究では，ロジットモデルを用いた経路選択による確率的利用者均衡を対象とし，それを「ロジット型利用者均衡」と呼ぶこととする．

ロジットモデルの経路効用は最も簡単な場合でも $-\theta t+\varepsilon$ であり，パラメータ θ を推定する必要がある．ここで，t は経路の旅行時間，ε は確率項である．ロジット型利用者均衡では，このパラメータにどのような値を用いるべきかが問題となることが少なくない．また，$-\theta t+\varepsilon$ よりも複雑な効用関数を定義することも可能で，その際は更にパラメータ推定が重要になる．

ネットワーク均衡モデルのパラメータ推定では，データ入手の容易さの観点から，リンク交通量の利用が便利である．従来から均衡モデルが算出する計算交通量と実際のネットワークの交通量である実交通量の二乗誤差が最小となるようにパラメータが推定されている．しかし，このような最小二乗法では，各リンクの交通量が独立であることが前提条件となる．しかし，実際のリンク交通量はリンク間で独立ではなく，近接するリンクでは，その相関はかなり高い．したがって，最小二乗法によってパラメータの値を単に計算することは可能であるが，リンク交通量の相関等の観点（確率・統計学の観点）から理論上問題であり，推定したパラメータにバイアスが含まれる恐れもある．そこで，本研究では，最尤推定法を用いてリンク間の交通量の相関を考慮した交通ネットワークモデルのパラメータ推定法を用いて，従来法である最小二乗法とのパラメータ推定結果の比較を行い，適用するネットワークの形状や観測リンク数がどのようにパラメータ推定結果に影響を及ぼすのかを考察する．

2. 既存研究の整理と本研究の位置づけ

これまでリンク交通量データを用いたパラメータ推定は，OD 交通量の推定の研究を始め，多くの研究がなされている．それらの研究では，観測リンク交通量と計算リンク交通量の最小二乗誤差となるパラメータを推定したり，一般化最小二乗法，最尤法など様々なパラメータ推定が行われている．多くの場合，このような最小二乗法や最尤法によるパラメータ推定を交通ネットワーク均衡の制約下で行うという均衡制約付最適化問題となっている．リンク交通量データ（のみ）を用いた最尤推定法によるパラメータ推定を取り扱った研究として，Robillard[1]，Fisk[2]，Daganzo[3]などの研究があり，これらで

---

*キーワーズ：交通ネットワーク分析

**正会員，修(工)，大日本コンサルタント株式会社 北陸支社
（富山県富山市願海寺 633，E-mail：anaguchi@ne-con.co.jp,
Tel：076-436-7855，Fax：076-427-1030）
***正会員，博(工)，金沢大学理工研究域環境デザイン学系
（石川県金沢市角間町，E-mail : snakayama@t.kanazawa-u.ac.jp）
****フェロー会員，工博，同上
（石川県金沢市角間町，E-mail：takayama@t.kanazawa-u.ac.jp）

は最尤推定法により前述のロジットモデルのパラメータ θ を求めている．その他にも，Hazelton[4]は最尤推定法によりOD交通量を求める方法を提案している．これらの研究では，リンク旅行時間を事実上定数とするようなネットワークを対象としている．

ロジット型利用者均衡モデルを用いた均衡制約付最適化問題を取り扱った研究として，中山・高山 [5]，Chen・Alfa[6], Davis[7], Yang・Meng ら [8], Lo・Chan[9], Ying・Yang[10] などの研究がある．これらの研究では，Dial アルゴリズムやその他の方法で配分を行い，その結果得られた交通量を用いて感度分析により計算できる最適化目的関数の勾配などを用い，最適化計算を行っている．

本研究では，リンク交通量データ（のみ）を用いて，その相関を考慮した最尤推定法を提案する．上で述べたロジット型利用者均衡での二段階最適化の研究 [6, 7, 10] では，交通量を確定的に扱っており，リンク交通量の確率分布等を扱うことはできない．リンク交通量の同時確率（密度）関数（尤度関数）の導出のため，本研究では，中山・高山ら [11]が提案した配分交通量及び旅行時間が確率的である確率ネットワーク均衡をロジットモデルによる経路選択に基づく均衡に拡張し，その拡張した均衡モデルで算出される交通量の生起確率をもとに最尤法によりパラメータ推定を行う．また，パラメータの真値を推定するための条件等に関しても考察する．

3. ロジット型確率ネットワーク均衡 [5]

(1) 需要と交通量

リンク a (a $=1,2,\cdots,A$) のリンク交通量を x_a ，その確率変数を X_a とする．ODペア i ($i=1,2,\cdots,I$) の経路 j ($j=1,2,\cdots,J$) の経路交通量を y_{ij} とし，その確率変数を Y_{ij} とする．つまり，x_a 及び y_{ij} はそれぞれ確率変数 X_a 及び Y_{ij} の実現値である．経路交通量とリンク交通量は，リンク接続変数 $\delta_{a,ij}$ を用いて，

$$X_a = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\delta_{a,ij}Y_{ij} \tag{1}$$

$$x_a = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\delta_{a,ij}y_{ij} \tag{2}$$

が成立している．なお，$\delta_{a,ij}$ はリンク・経路接続変数であり，ODペア i の経路 j の経路にリンク a が含まれていれば1であり，含まれていなければ0となる．これらのベクトル表示 $\mathbf{X}=\mathbf{\Delta Y}$，$\mathbf{x}=\mathbf{\Delta y}$ を必要に応じて用いる．ただし，$\mathbf{X}$ は X_a を要素に持つリンク交通量の確率変数ベクトル，$\mathbf{Y}$ は Y_{ij} を要素に持つ経路交通量の確率変数ベクトル $(Y_{11},Y_{12}\ldots,Y_{21},\ldots)^{\mathrm{T}}$ である．$\mathbf{\Delta}$ は $\delta_{a,ij}$ を要素に持つリンク・経路接続行列（パスリンクインシデックスマトリックス），Tは転置である．本稿では，ベクトルは列ベクトルとし，基本的に英大文字は確率変数，ブロック体の英文字はベクトルもしくは行列を表すことにする．

本稿では, OD交通量はポアソン分布 Po$[m_{ij}]$ に従って確率変動しており，各利用者はロジットモデルに従った経路選択を行っていると仮定する [12, 13]．この場合，経路交通量も独立なポアソン分布 Po$[m_{ij}]$ に従う [12, 13]．

ODペア i のOD交通量の平均を λ_i , その経路 j の経路交通量の平均を m_{ij} とする．経路交通量 m_{ij} が十分に大きい場合，ポアソン分布の平均と分散はともに m_{ij} であるため，中心極限定理により平均と分散がともに m_{ij} である正規分布 N$[m_{ij}, m_{ij}]$ に従うと近似することができる．また，ポアソン分布は取り扱いが難しいため，経路交通量は独立な正規分布とみなす [14]．このとき，リンク交通量ベクトル $\mathbf{X}$ は以下の多変量正規分布として与えることができる．

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|\mathbf{\Sigma}|}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right\} \tag{2}$$

ただし，$\boldsymbol{\mu}$ は平均リンク交通量ベクトルでその要素は μ_n，$\mathbf{\Sigma}$ はリンク交通量の分散共分散行列, $\mathbf{\Sigma}^{-1}$ は $\mathbf{\Sigma}$ の逆行列, $|\mathbf{\Sigma}|$ は $\mathbf{\Sigma}$ の行列式，T は転置，n はリンクの総数である．また，平均経路交通量のベクトル $\mathbf{m}$ （その要素は m_{ij} ）を用いると，

$$\mathbf{\Sigma} = \Delta diag(\mathbf{m})\mathbf{\Delta}^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

である [15]．ただし $\mathbf{\Delta}$ は $\delta_{a,ij}$ を要素に持つリンク・経路接続行列（パスリンクインシデックスマトリックス），$\delta_{a,ij}$ はODペア i の経路 j の経路にリンク a （a $=1, 2,\cdots, A$）が含まれていれば1，含まれていなければ0，$diag(\mathbf{m})$は $\mathbf{m}$ の各成分を対角成分に持つ対角行列である．つまり，$diag(\mathbf{m})$は経路交通量ベクトル $\mathbf{Y}$ の分散共分散行列であり，各経路交通量は独立であるため，それは対角行列となる．ここで,

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{\Delta m} \tag{4}$$

が成立しているため，$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$は $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x},\mathbf{m})$ と考えることもできる．なお，このようなリンク交通量の確率密度関数を定義するためには，$|\mathbf{\Sigma}|$ が0でないことが必要である．例えば，本来ならば一つのリンクで記述すべきものを2つの連続隣接のリンクで表現した場合を考える．その2つのリンクは全く同じリンク交通量及び分布となる．このように他のリンク交通量（の確率変数）によって一意に表現できるリンク（の確率変数）は除去しなければ，$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$は定義できないことに注意が必要である．

(2) 定式化

本研究のモデルでは，リンク旅行時間の分散共分散行列が得られるため，それを経路旅行時間の分散共分散行列に変換し，経路選択をプロビットモデルで行うことが可能である．その場合，経路選択確率の計算にはモンテカルロ法や，数値積分を用いる Clark 法，Mendell-Elston 法などが用いられることが多いようであるが，これらの

手法は計算誤差が小さくなく，数値積分の計算には非常に多くの計算時間がかかってしまうという問題点がある．そのため，本研究では論点を最尤法に絞り，より簡素な説明を行うために，実用的に利用可能なロジットモデルによる経路選択確率を仮定する．ただし，プロビットモデルによる経路選択表現は重要であり，かつ，より適切であるため，今後の課題とする．

各道路利用者は次式のロジットモデルに従い，経路選択確率 p_{ij} を決定していると仮定する．

$$p_{ij} = \frac{\exp\left(-\theta\, \bar{c}_{ij}\right)}{\sum_{j=1}^{J_i} \exp\left(-\theta\, \bar{c}_{ij}\right)} \tag{5}$$

ここで，$\bar{c}_{ij}$ は OD ペア i の経路 j の平均旅行時間，θ は正のパラメータである．

確率的ネットワーク均衡モデルを定式化するにあたり，式(5)を含んだ関数

$$\mathbf{g} = \left(g_{11}, \ldots, g_{21}, \ldots\right)^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

を考える．このとき，関数 $\mathbf{g}$ の要素 g_{ij} を以下のように定義する．

$$g_{ij}(\mathbf{m}) = \lambda_i \frac{\exp\left(-\theta\, \bar{c}_{ij}(\mathbf{m})\right)}{\sum_{j=1}^{J_i} \exp\left(-\theta\, \bar{c}_{ij}(\mathbf{m})\right)} \tag{7}$$

これらを踏まえ，確率ネットワーク均衡は関数（写像）$\mathbf{g}$ に関する以下の不動点問題として定式化できる．

$$\mathbf{m} = \mathbf{g}(\mathbf{m}) \tag{8}$$

なお，$\boldsymbol{\mu} = \Delta\, \mathbf{g}'(\boldsymbol{\mu})$ とリンクに関する定式化も可能である．ただし，$\mathbf{g}'$ は入力がリンク交通量の場合の $\mathbf{g}$ である．以上のような，経路選択がロジットモデルにより行われ，交通量及び旅行時間が確率変動する交通均衡をロジット型確率ネットワーク均衡と呼ぶことにする．

4. 最尤推定法

リンク交通量の実現値，つまりリンク交通量の観測値 $\mathbf{x}$ が与えられた場合，以下の対数尤度関数 $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})$ を定義することができる．

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}) = \ln f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \tag{9}$$

これを用いて，以下に示すように，前節で述べた確率ネットワーク均衡が下位問題となった均衡制約付最適化問題として，最尤推定法を用いた $\boldsymbol{\theta}\left(=\theta_r\left(r = 1,2,\cdots,R\right)\right)$ を求めるパラメータ推定を定式化することができる．

$$\max_{\boldsymbol{\theta}} \quad L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x}, \mathbf{m}) \tag{10a}$$

$$s.t. \quad \mathbf{m} = \mathbf{g}(\mathbf{m}) \tag{10b}$$

なお，ロジットモデルのパラメータを推定する場合，対数尤度関数に $\boldsymbol{\theta}$ は陽には入っておらず，$L(\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}) \,|\, \mathbf{x})$ という表記の方が適しているとも言える．

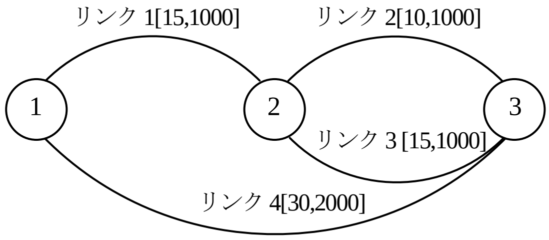

図-1 仮想単純ネットワーク図
([ ]内は自由走行時間(分)，交通容量(台))

表-1 生成した観測リンク交通量データセット

	$\tilde{m}_{1,1}$	$\tilde{m}_{1,2}$	$\tilde{m}_{2,3}$	$\tilde{m}_{2,4}$
1	1068	892	1116	843
2	1060	947	1177	801
3	1053	925	1153	825
4	1056	911	1137	815
5	1020	952	1183	825
6	967	922	1149	858
7	1067	880	1103	872
8	1077	948	1179	861
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
99	993	890	1114	866
100	1029	922	1149	843
真値	1069.65	930.35	1158.86	841.14

5. 仮想単純ネットワークにおけるパラメータ推定例

複数の OD ペア・経路ネットワークのうち，最も単純なものの一つである**図-1** に示す仮想ネットワークに対して，式(5)で示したロジットモデルのパラメータ θ を推定する計算例を示す．ネットワークは 2OD ペア，3 ノード，4 リンクの仮想単純ネットワークであり，OD 交通量は 2 組とも平均が 2000 のポアソン分布に従うとする．そして，ノード 1 からノード 3 へ向かう OD ペア 1 とノード 2 からノード 3 へ向かう OD ペア 2 の 2 つの OD ペアを設定する．また，OD ペアそれぞれに 2 経路ずつあるものとし，OD ペア 1 についてリンク 1 とリンク 2 から成る経路を経路 1，リンク 4 のみから成る経路を経路 2，OD ペア 2 についてリンク 2 のみから成る経路を経路 3，リンク 3 のみから成る経路を経路 4 とする．

パラメータの真値が正確に分かるように，観測交通量は真値に基づいて確率的に発生させたものを用いるという仮想データとし，ロジットモデル内のパラメータ θ の真値を 0.1 として，ポアソン分布に従う OD 交通量を確率的に均衡配分して得られた値を用いるものとする．その観測交通量データを**表-1** に示す．

平均経路旅行時間関数について，積率母関数を用いた方法[16]もしくは確率母関数を用いた方法[17]により，リンク番号を k としたとき，平均リンク旅行時間関数 $\bar{c}'_k(\mu_k)$ は平均リンク交通量を μ_k，自由旅行時間を α_k，交通容

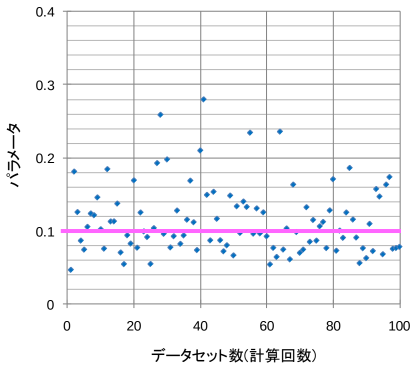

図-2　パラメータ散布状態(最尤推定法)

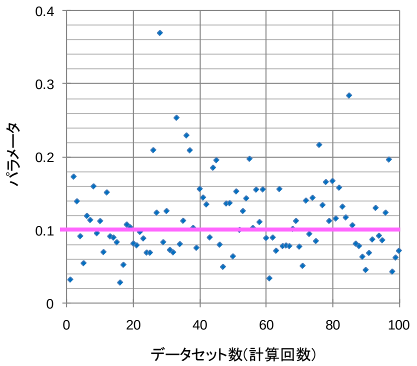

図-3　パラメータ散布状態(最小二乗法)

表-2　パラメータ推定結果の比較

	推定パラメータθ	
	平均	標準偏差
最尤推定法	0.1134	0.0463
最小二乗法	0.1155	0.0550

量をβ_kとして以下の式で与えられる．

$$\bar{c}'_k(\mu_k) = \alpha_k\left(1+\frac{\mu_k^2+\mu_k}{\beta_k^2}\right) \tag{11}$$

これを用いて，平均経路旅行時間$\bar{c}_{ij}$は以下の式で表わされる．

$$\bar{c}_{ij} = \mathbf{\Delta}^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{c}}'_k(\mu) \tag{12}$$

以上に示した各種データを用いてのパラメータの推定，リンク交通量の配分計算を，最尤推定法及び最小二乗法によって計算した結果を**表-2**に，推定パラメータの散布状態を**図-2**，**図-3**に示す．パラメータθについては最尤推定法の結果の方が最小二乗法よりも真値に近いが，これらの違いは統計的に有意なほどの違いではない．

上述の数値計算結果では，最尤推定法と最小二乗法との推定結果について，統計的に有意な違いは見られなかったが，既に述べたように，最尤推定法によって，推定パラメータの有意性の検討やモデル選択に関する統計学的な判断が可能となる．また，観測リンク数を多くすると，推定量は真値に近くなることが保証されている．本研究での最尤推定上では，このように統計学の観点から優れた手法といえる．

6.　おわりに

本研究では，最尤推定法によってリンク間の交通量の相関を考慮した交通ネットワーク均衡モデルのパラメータ推定法を単純なネットワークに適用し，その優位性について考察した．適用したネットワークが単純であったため，最尤推定法と最小二乗法とのパラメータ推定結果には自体には大きな違いは見られなかったが，本研究における最尤推定法モデルを用いることによって均衡モデルのパラメータの有意性やモデル選択の検討が可能であることなどが確認できた．

現時点では金沢市道路ネットワークにおける適用と考察を行っていないため，それらについては講演時に示すこととしたい．

参考文献

1) Robillard, P. : Calibration of Dial's Assignment Method, *Transportation Science*, Vol. 8, pp. 117-125, 1974.
2) Fisk, C. : Note on the Maximum Likelihood calibration on Dial's Assignment Method, *Transportation Research*, Vol. 11, pp. 67-68, 1977.
3) Daganzo, C.F. : Some Statistical Problems in connection with Traffic Assignment, *Transportation Research*, Vol. 11, pp. 385-389, 1977.
4) Hazelton, M.L. : Estimation of Origin-Destination Matrices from Link Flows under Uncongested Networks, *Transportation Research*, Vol. 34B, pp. 549-566, 2000.
5) 中山晶一朗，高山純一：リンク交通量を用いた交通ネットワーク均衡モデルのパラメータ推定：リンク間相関を考慮した最尤法，土木学会論文集 D, Vol.62, No.4, pp.548-557, 2006.
6) Chen, M. and Alfa, A. : A Network Design Algorithm Using a Stochastic Incremental Traffic Assignment Approach, *Transportation Science*, Vol.25, pp.215-224, 1991.
7) Davis, G.A. : Exact Local Solution of the Continuous Network Design Problem via Stochastic User Equilibrium Assignment, *Transportation Research*, Vol.28B, pp.61-75,1994
8) Yang, H., Meng, Q. and Bell, M. G. H. : Simultaneous Estimation of the Origin-Destination Matrices and Travel-Cost Coefficient for Congested Network in a Stochastic User Equilibrium, *Transportation Science*, Vol.35, pp.107-123, 2001.
9) Lo, H. P. and Chan, C. P. : Simultaneous Estimation of an Origin-Destination Matrix and Link Choice Proportions Using Traffic Counts, *Transportation Research*, Vol.37A,pp.771-788, 2003.
10) Ying, J. Q. and Yang, H. : Sensitivity Analysis of Stochastic User Equilibrium Flows in a Bi-Modal Network with Application to Optimal Pricing, *Transportation Research*, Vol.39B, pp.769-795, 2005.
11) 中山晶一朗，高山純一，長尾一輝，笠嶋崇弘：旅行時間の不確実性を考慮した交通ネットワーク均衡モデル，土木学会論文集，No. 772/IV-65，pp. 67-77，2004.
12) Clark, S. and Watling, D. : Modeling Network Travel Time Reliability under Stochastic Demand, *Transportation Research* Vol.39B, pp.119-140, 2005.
13) Nakayama, S., Connors, R. and Watling, D. : Estimation of Parameters of Network Equilibrium Models: A Maximum Likelihood Method and Statistical Properties of Network Flow, Transportation and Traffic Theory: *Proceedings of the 18th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, accepted, 2009.
14) 中山晶一朗，高山純一，長尾一輝，所俊宏：現実道路ネットワークの時間信頼性評価のための確率的交通均衡モデル及びそれを用いた情報提供効果分析，土木学会論文集 D, Vol.62, No.4, pp.537-547, 2006.
15) Clark, C. E. : The Greatest of a Finite Set of Random Variables, *Operations Research*, Vol.9, pp.145-162, 1965.
16) 中山晶一朗，高山純一，長尾一輝，笠嶋崇弘：旅行時間の不確実性を考慮した交通ネットワーク均衡モデル，土木学会論文集，No.772/IV-65, pp.67-77, 2004.
17) 中山晶一朗，高山純一：交通需要と経路選択の確率変動を考慮した確率的交通ネットワーク均衡モデル，土木学会論文集 D, Vol.62, No.4, pp.537-547, 2006.