

確定的利用者均衡配分を用いた移動時間信頼性評価に関する基礎的研究*

A basic study on travel time reliability evaluation using deterministic user equilibrium model*

内田賢悦**

By Ken'etsu UCHIDA**

1. はじめに

本研究では、確率的交通容量および確率的 O-D 交通需要下における移動時間信頼性評価法の提案を行う。ドライバーが平均移動時間を最小化するように経路選択を行うことを仮定すると、ある条件下では、経路選択問題は確定的利用者均衡配分によって定式化できることを示す。移動時間信頼性の一意性を確保するためには、経路交通量が一意的に与えられる必要があるが、本研究で提案するモデルでは、経路交通量の一意性は保証されない。本研究で提案するモデルでは、リンク交通量が多変量正規分布によって近似可能である。そこで、リンク交通量から経路交通量を推計する方法も併せて提案する。最後に、テストネットワークを対象とした数値実験を行い、提案したモデルの検証を行う。

2. 確率的リンク交通量

(1) 記号

以下に本研究で用いる主な変数、集合等の記号を示す。

- N: ネットワーク上のノードの集合
A: ネットワーク上のリンクの集合
I: O-D ペアの集合
 J_i : O-D pair i を結ぶ経路の集合
 o_i : O-D pair i の起点セントロイドノード
 d_i : O-D pair i の終点セントロイドノード
 δ_{aj} : リンク a が経路 j に含まれる場合に 1, そうでない場合に 0 をとる変数
 L_n^{in} : 起点ノードが n となるリンクの集合
 L_n^{out} : 終点ノードが n となるリンクの集合
 n_o^a : リンク a の起点ノード
 n_d^a : リンク a の終点ノード
 v_a : リンク a の交通量
 c_a : リンク a の交通容量
 F_{ij} : O-D pair i の経路 j の確率的経路交通量
 q_i : O-D pair i の平均交通需要

(2) 経路交通量

モデル化において重要な 2 つの仮定¹⁾を以下に示す。

- ある日に実現される O-D ペア $i \in I$ 間の交通需要は、平均が q_i の互いに独立なポアソン分布に従う。
- ある日に実現する O-D ペア $i \in I$ の交通需要に対して、道路利用者は経路 $j \in J_i$ を他の経路とは独立に p_{ij} の割合で選択する。

上記の 2 つの仮定は、それぞれの $i \in I$ に対して、経路 j の交通量 F_{ij} は、平均 q_i 、抽出率 p_{ij} のポアソン過程からのランダムサンプリングとなることを示している。すなわち、それぞれの $i \in I$ 間の経路交通量 F_{ij} ($j \in J_i$) は、互いに独立なポアソン分布に従い、その平均は、 $q_i \cdot p_{ij}$ で与えられる ($F_{ij} \sim \text{Poi}(q_i \cdot p_{ij}) \forall i \in I, \forall j \in J_i$)。このとき、リンク $a \in A$ の交通量 (V_a) は、式(1)で表される。

$$V_a = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_i} \delta_{aj} \cdot F_{ij} \quad \forall a \in A \quad (1)$$

また、上述した 2 つの仮定より、リンク交通量の平均、共分散は、それぞれ式(2)、(3)で表される。

$$E[V_a] = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_i} \delta_{aj} \cdot q_i \cdot p_{ij} \quad \forall a \in A \quad (2)$$

$$\text{cov}[V_a, V_b] = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_i} \delta_{aj} \cdot \delta_{bj} \cdot q_i \cdot p_{ij} \quad \forall a, b \in A \quad (3)$$

q_i ($i \in I$)がある程度大きな値をとる場合、リンク交通量は、上記の平均、共分散を有する多変量正規分布によって近似することができる¹⁾。

3. 確率的交通容量

確率的交通容量 C_a ($a \in A$) は、平均が $E[C_a]$ ($a \in A$)、共分散が $\text{cov}[C_a, C_b]$ ($a, b \in A$) で与えられる多変量正規分布に従うと仮定する。ここで、確率的交通容量は、交通フローから推計可能であることを付け加えておく²⁾。

4. 経路選択行動

(1) リンク移動時間

本研究では、式(4)に示す BPR 関数によって、リンク移動時間を表現することにする。

*キーワード 移動時間信頼性, 利用者均衡配分

**正会員 博 (工) 北海道大学大学院工学研究科

(札幌市北区北 13 条西 8 丁目, Tel 011-706-6211, Fax 011-706-6211)

$$t_a(v_a; c_a) = t_a^0 \cdot \left(1 + \gamma \cdot (v_a)^\lambda \cdot (c_a^{-1})^\lambda\right), \quad (4)$$

ここで t_a^0 はリンク a の自由走行時間であり, γ , λ はパラメータである. v_a , c_a にそれぞれの確率変数 V_a , C_a を代入すると式(5)が得られる.

$$t_a(V_a; C_a) = t_a^0 \cdot \left(1 + \gamma \cdot (V_a)^\lambda \cdot (C_a^{-1})^\lambda\right). \quad (5)$$

$D_a = V_a \cdot C_a^{-1}$ とおくと, 式(5)は式(6)に変換される.

$$t_a(V_a; C_a) \Rightarrow \tilde{t}_a(D_a) = t_a^0 \cdot \left(1 + \gamma \cdot (D_a)^\lambda\right). \quad (6)$$

$D_a = E[D_a]$ において, m ($m \geq 1$) 次のテーラー展開を式(6)に施すと, 式(7)を得る.

$$\tilde{t}_a(D_a) = \sum_{k=0}^m b_{ka} \cdot (D_a - d_a)^k, \quad (7)$$

ここで, $d_a = E[D_a]$ である. b_{ka} は, テーラー展開における k 次の項に関する係数であり, 式(8)で与えられる.

$$b_{ka} = \frac{1}{k!} \cdot \left. \frac{\partial \tilde{t}_a^{(k)}(D_a)}{\partial D_a^{(k)}} \right|_{D_a=d_a} = \begin{cases} t_a(E[V_a]) \cdot E[C_a] & \text{if } k=0 \\ \gamma \cdot t_a^0 \cdot \frac{\prod_{l=1}^k (\lambda - l + 1)}{k!} \cdot d_a^{\lambda-k} & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall a \in \mathbf{A}. \quad (8)$$

以上から, リンクの平均移動時間は, 式(9)で与えられる.

$$E[\tilde{t}_a(D_a)] = \sum_{k=0}^m b_{ka} \cdot E[(D_a - d_a)^k] = \begin{cases} \sum_{k=0}^{m/2} b_{2k,a} \cdot (\text{var}[D_a])^k & m: \text{even number} \\ \sum_{k=0}^{(m-1)/2} b_{2k+1,a} \cdot (\text{var}[D_a])^k & m: \text{odd number} \end{cases} \quad \forall a \in \mathbf{A}. \quad (9)$$

一方, リンク移動時間の共分散は式(10)で与えられる.

$$\begin{aligned} & \text{cov}[\tilde{t}_a(D_a), \tilde{t}_b(D_b)] \\ &= \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^m b_{ka} \cdot b_{lb} \cdot E[(D_a - d_a)^k \cdot (D_b - d_b)^l] \\ & \quad - E[\tilde{t}_a(D_a)] \cdot E[\tilde{t}_b(D_b)] \\ &= \left(\sum_{k=1}^m \phi_{ab}^k \right) \cdot \delta_a^k \cdot \delta_b^k \quad \forall a, b \in \mathbf{A}, \end{aligned} \quad (10)$$

where

$$\phi_{ab}^k = k \cdot \frac{\prod_{l=1}^k (\lambda - l + 1)}{k! \cdot d_a^k} \cdot \frac{\prod_{s=1}^k (\lambda - s + 1)}{k! \cdot d_b^k} \cdot (\text{cov}[D_a, D_b])^k \quad \forall a, b \in \mathbf{A}, \quad (11)$$

$$\delta_a^k = t_a(v_a; c_a) - t_a^0 \quad \forall a \in \mathbf{A}. \quad (12)$$

式(9), (10)は D_a モーメントを所与として, Isserlis³⁾ で提案された方法を適用することによって導くことができる. また, $\text{cov}[D_a, D_b]$ ($a, b \in \mathbf{A}$) の計算法に関しては, 内田⁴⁾ を参照されたい. O-D ペア i の経路 j に関する移動時間 (Ξ_{ij}) は, 式(13)で与えられる.

$$\Xi_{ij} = \sum_{a \in \mathbf{A}} \tilde{t}_a(D_a) \cdot \delta_{aj} \quad \forall i \in \mathbf{I}, \forall j \in \mathbf{J}_i. \quad (13)$$

以上から, 経路移動時間の平均および共分散は, それぞれ式(14), (15)で与えられる.

$$E[\Xi_{ij}] = \sum_{a \in \mathbf{A}} E[\tilde{t}_a(D_a)] \cdot \delta_{aj} \quad \forall i \in \mathbf{I}, \forall j \in \mathbf{J}_i, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \text{cov}[\Xi_{i_1 j_1}, \Xi_{i_2 j_2}] &= \sum_{a_1 \in \mathbf{A}} \sum_{a_2 \in \mathbf{A}} \text{cov}[\tilde{t}_{a_1}(D_{a_1}) \cdot \delta_{a_1 j_1}, \tilde{t}_{a_2}(D_{a_2}) \cdot \delta_{a_2 j_2}] \\ &= \sum_{a_1 \in \mathbf{A}} \sum_{a_2 \in \mathbf{A}} \delta_{a_1 j_1} \cdot \delta_{a_2 j_2} \cdot \text{cov}[\tilde{t}_{a_1}(D_{a_1}), \tilde{t}_{a_2}(D_{a_2})] \\ & \quad \forall i_1, i_2 \in \mathbf{I}, \forall j_1 \in \mathbf{J}_{i_1}, \forall j_2 \in \mathbf{J}_{i_2}. \end{aligned} \quad (15)$$

(2) 経路選択行動の定式化

ドライバーが経路移動時間の平均のみを用いて経路選択を行う場合, 経路選択行動は, $f_{ij} = q_i \cdot p_{ij}$ とした場合, 以下に示す最適化問題として定式化される.

$$\min z = \sum_{a \in \mathbf{A}} \int_0^{D_a} E[\tilde{t}_a(w_a)] dw, \quad (16)$$

s.t.

$$F_{ij} \sim \text{Poi}(f_{ij}) \quad \forall i \in \mathbf{I}, \forall j \in \mathbf{J}_i, \quad (17)$$

$$V_a = \sum_{i \in \mathbf{I}} \sum_{j \in \mathbf{J}_i} \delta_{aj} \cdot F_{ij} \quad \forall a \in \mathbf{A}, \quad (18)$$

$$E[V_a] = \sum_{i \in \mathbf{I}} \sum_{j \in \mathbf{J}_i} \delta_{aj} \cdot f_{ij} \quad \forall a \in \mathbf{A}, \quad (19)$$

$$\sum_{j \in \mathbf{J}_i} f_{ij} = q_i \quad \forall i \in \mathbf{I}, \quad (20)$$

$$f_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in \mathbf{I}, \forall j \in \mathbf{J}_i, \quad (21)$$

where

$$D_a = V_a \cdot C_a^{-1} \quad \forall a \in \mathbf{A}. \quad (22)$$

式(17), (18)は, 先述の通り, リンク交通量が多変量正規分布に従うことを意味し, それ以外の制約条件は, f_{ij} を経路交通量とみなした場合, 利用者均衡モデルのものと同一の構造を有する. さらに, 式(7)に1次のテーラー展開を施した場合, 式(16)の目的関数は, 式(23)で与えられ, $c_a = E[C_a]$, $v_a = E[V_a]$ とみなした場合, 利用者均衡配分の目的関数と一致することがわかる.

$$\min z_1 = \sum_{a \in A} \int_0^{E[V_a]} t_a(w_a; E[C_a]) dw. \quad (23)$$

すなわち、テーラー展開の次数が1の場合、ドライバーの経路選択行動は、利用者均衡配分として定式化されることになる。しかしながら、利用者均衡モデルと同様に、本研究で提案するモデルにおいても経路の平均交通量は一意的には決定できない。そこで、次章では、リンク交通量が多変量正規分布に従うことを利用した、平均経路交通量推計問題の定式化を行うことにする。

5. 経路交通量推計問題

式(3)に示した定義によると、 $\text{cov}[V_a, V_b]$ は、リンク a と b 両方を通過する経路交通量の合計である。これを踏まえると、巡回経路を想定しないため、以下の関係が得られる。

$$\text{cov}[V_a, V_b] = 0 \quad \forall a \neq b \in L_n^{\text{out}}, \forall n \in N, \quad (24)$$

$$\text{cov}[V_a, V_b] = 0 \quad \forall a \neq b \in L_n^{\text{in}}, \forall n \in N, \quad (25)$$

$$\text{cov}[V_a, V_b] = 0 \quad \text{if } n_o^a = n_d^b \ \& \ n_d^a = n_o^b \quad \forall a(\neq b) \in A. \quad (26)$$

一方、リンク a を通過したリンク交通量は、ノード n において以下に示す関係を満たさなければならない。

$$\sum_{b \in L_n^{\text{in}}} \text{cov}[V_a, V_b] = \sum_{c \in L_n^{\text{out}}} \text{cov}[V_a, V_c] \quad \forall a \in A, \forall n \in N. \quad (27)$$

式(34)は、リンク a を通過し、ノード n にリンク $b \in L_n^{\text{in}}$ を経由して流れ込んだ交通量の合計値は、そのノードからリンク $c \in L_n^{\text{out}}$ を経由して流出した交通量の合計値と一致しなければならないことを意味している。さらに交通量が発生/集中するセントロイドノードに関して、以下に示す4つの仮定を設けた。

$$L_{o_i}^{\text{in}} = \emptyset \quad \forall i \in I, \quad (28)$$

$$o_i \neq o_{i'} \quad \forall i, i' (i \neq i') \in I, \quad (29)$$

$$L_{d_i}^{\text{out}} = \emptyset \quad \forall i \in I, \quad (30)$$

$$d_i \neq d_{i'} \quad \forall i, i' (i \neq i') \in I. \quad (31)$$

上記の4つの仮定は、各 O-D ペアには固有のセントロイドノードが設けられており、さらにセントロイドノードを通過する交通量が存在しないことを意味する。以上の仮定と、リンク交通量の保存則 (27) を併せて考えると、以下に示す3つの O-D 交通量に関する保存則が得られる。

$$E[V_a] = \sum_{b \in L_{d_i}^{\text{in}}} \text{cov}[V_a, V_b] \quad \forall i \in I, \forall a \in L_{o_i}^{\text{out}}, \quad (32)$$

$$\sum_{a \in L_{o_i}^{\text{out}}} E[V_a] = \sum_{a \in L_{o_i}^{\text{out}}} \sum_{b \in L_{d_i}^{\text{in}}} \text{cov}[V_a, V_b] = q_i \quad \forall i \in I, \quad (33)$$

$$\sum_{c \in L_{o_i}^{\text{out}}} \text{cov}[V_a, V_c] = \sum_{b \in L_{d_i}^{\text{in}}} \text{cov}[V_a, V_b] \quad \forall i \in I, \forall a \in A. \quad (34)$$

式(32)は、セントロイドノード o_i から発生し、ある1本のリンク $a \in L_{o_i}^{\text{out}}$ に流入した交通量は、セントロイドノード d_i にリンク $b \in L_{d_i}^{\text{in}}$ を経由して流れ込むことを意味する。式(33)は、式(32)の両辺を $a \in L_{o_i}^{\text{out}}$ に関して合計すると、平均 O-D 交通量 q_i に一致することを示している。さらに、式(34)は、リンク $c \in L_{o_i}^{\text{out}}$ から流出し、リンク a に流れ込んだ交通量の合計値は、セントロイドノード d_i にリンク $b \in L_{d_i}^{\text{in}}$ から流入しなければならないことを示している。また、各 O-D ペアに固有のセントロイドノードが設けられているため、セントロイドノードに接続するリンクの交通量に関しては、巡回する経路を想定しないため、以下の関係も成立しなければならない。

$$\text{cov}[V_a, V_b] = 0 \quad \forall a \in L_{o_{i_1}}^{\text{out}}, \forall b \in L_{d_{i_2}}^{\text{in}} \quad (\forall i_1 (\neq i_2) \in I), \quad (35)$$

$$\text{cov}[V_a, V_b] = 0 \quad \forall a \in L_{o_{i_1}}^{\text{out}}, \forall b \in L_{o_{i_2}}^{\text{out}} \quad (\forall i_1 (\neq i_2) \in I), \quad (36)$$

$$\text{cov}[V_a, V_b] = 0 \quad \forall a \in L_{d_{i_1}}^{\text{in}}, \forall b \in L_{d_{i_2}}^{\text{in}} \quad (\forall i_1 (\neq i_2) \in I). \quad (37)$$

ドライバーの経路選択問題を解くと、 $E[V_a](a \in A)$ は得られる。したがって、平均リンク交通量ベクトル $E[\mathbf{V}]$ と共分散行列 Σ の対角要素は所与となる。そこで、移動時間信頼性を計算するためには、式(24) – (27)および式(32) – (37)を満たすリンク交通量の共分散を求める必要がある。ここで、平均リンク交通量ベクトルの観測値 $\mathbf{v}_k (k=1, \dots, K)$ が存在するものと仮定する。その場合、共分散ベクトル Σ の非対角要素 $\text{cov}[V_a, V_b] (a(\neq b) \in A)$ は、以下に示す $MVN(E[\mathbf{V}], \Sigma)$ の対数尤度関数を上述した制約条件の下で最大化することによって、推計可能である。

$$\max \ln L = -\frac{K \cdot |A|}{2} \cdot \log(2\pi) - \frac{K}{2} \cdot \log|\Sigma| - \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^K (\mathbf{v}_k - E[\mathbf{V}])^T \Sigma^{-1} (\mathbf{v}_k - E[\mathbf{V}]), \quad (38)$$

subject to (24) - (27) and (32) - (37).

ここで $|A|$ は、ネットワーク上のリンク数であり、さらに上付きの T は、行列またはベクトルの転置操作を意味する。一方、式(27)と(32)に示した関係から、各ノード $n \in N$ における1本のリンク $a \in L_n^{\text{in}} \cup L_n^{\text{out}}$ および各 O-D ペア $i \in I$ における1本のリンク $a \in L_{o_i}^{\text{in}} \cup L_{d_i}^{\text{out}}$ は冗長であるため、それらを \mathbf{V} , \mathbf{v}_k および Σ から削除した問題を考える必要がある。すなわち、これらのリンクを削除しない問題では、 Σ が正則にはならないため、式(45)に示した目的関数は定義されない。したがって、 $\hat{\mathbf{V}}$, $\hat{\mathbf{v}}_k$ および $\hat{\Sigma}$ がそれぞれ \mathbf{V} , \mathbf{v}_k および Σ から冗長なリンクが削除された後のものを表現する

とき、以下に示す $MVN(E[\hat{\mathbf{V}}], \hat{\Sigma})$ の対数尤度関数を最大化することによって、 $\hat{\Sigma}$ の非対角要素を推計することが可能となる。

$$\ln \hat{L} = -\frac{K \cdot |\hat{A}|}{2} \cdot \log(2\pi) - \frac{K}{2} \cdot \log|\hat{\Sigma}| - \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^K (\hat{\mathbf{v}}_k - E[\hat{\mathbf{V}}])^T \hat{\Sigma}^{-1} (\hat{\mathbf{v}}_k - E[\hat{\mathbf{V}}]) \quad (39)$$

ここで $|\hat{A}|$ は、ネットワークから冗長なリンクが削除された後のリンク数である。

Hazelton⁹⁾で議論されているように、 \mathbf{v}_k に誤差が含まれている場合、 $\hat{\Sigma}$ が正則とならない場合がある。これは、観測交通量が式(19)を満たさないことを意味する。この場合、Hazelton⁹⁾に習い、平均 0、分散 σ_ε^2 の正規分布に従う確率変数 ε を用いて、以下に示す観測交通量に関する誤差行列を定義して対応することを考える。

$$\Sigma_z = \text{diag}(E[\hat{\mathbf{V}}] \cdot \sigma_\varepsilon^2). \quad (40)$$

その上で、以下に示す修正対数尤度関数を最大化することによって、 $\hat{\Sigma}$ の非対角要素を推計することが可能である。

$$\ln \hat{L}_z = -\frac{K \cdot |\hat{A}|}{2} \cdot \log(2\pi) - \frac{K}{2} \cdot \log|\hat{\Sigma} + \Sigma_z| - \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^K (\hat{\mathbf{v}}_k - E[\hat{\mathbf{V}}])^T (\hat{\Sigma} + \Sigma_z)^{-1} (\hat{\mathbf{v}}_k - E[\hat{\mathbf{V}}]) \quad (41)$$

本研究では、ドライバーの経路選択問題を解く過程で得られる平均リンク交通量ベクトル \mathbf{v}_k を観測交通量とみなすことにする。 \mathbf{v}_k は、式(19)を満たすが、次章の計算例で示すように、ネットワークのトポロジーとセントロイドノードの位置の関係によって、 $\hat{\Sigma}$ が正則とならない問題に対処するために、式(41)に示した修正対数尤度関数を最大化することによって、 $\hat{\Sigma}$ の非対角要素を推計することにする。

6. 計算例

ここでは、図 1 に示すテストネットワークを対象に計算を行った例を示す。図 1 に示すネットワークでは、すべてのリンクは同じ BPR 関数を持つものとし、以下に示す設定としている。

$$t_a^0 = 10, \quad \gamma = 0.5 \text{ and } \lambda = 4.0$$

交通容量に関しても、すべてのリンクが同じ特性を持つものとし、以下に示す設定としている。

$$E[C_a] = 700, \sqrt{\text{var}[C_a]} / E[C_a] = 0.1, \text{cov}[C_a, C_b] = 2450 \quad (a, b \in A)$$

図 1 では、冗長なリンクは点線で示されている。ドライバーの経路選択問題を解いたところ、以下に示す平均リンク

交通量ベクトルが得られた。

$$E[\hat{\mathbf{V}}] = (E[V_2] \ E[V_3] \ E[V_4] \ E[V_7] \ E[V_9] \ E[V_{10}])^T = (632 \ 368 \ 368 \ 368 \ 632 \ 368)^T.$$

さらに、式(41)を制約条件下で最大化することによって、経路交通量推計問題を解いたところ、以下に示す共分散行列が得られた。この行列は、正則とならないため、式(39)は定義されないことに注意が必要である。また、この共分散行列は、4つの経路（リンク表現）：1-9（交通量 632）、3-5-6-10（368）、8-2（632）、7-5-6-4（368）を示している。

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 632 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 368 & 0 & 0 & 0 & 368 \\ & & 368 & 368 & 0 & 0 \\ & & & 368 & 0 & 0 \\ & & & & 632 & 0 \\ & & & & & 368 \end{pmatrix}$$

この場合、すべての経路移動時間の平均および分散が等しくなり、それぞれ以下で与えられる。

$$E[\Xi_{ij}] = 53 \quad \forall i \in I, \forall j \in J_i$$

$$\text{var}[\Xi_{ij}] = 4.8^2 \quad \forall i \in I, \forall j \in J_i$$

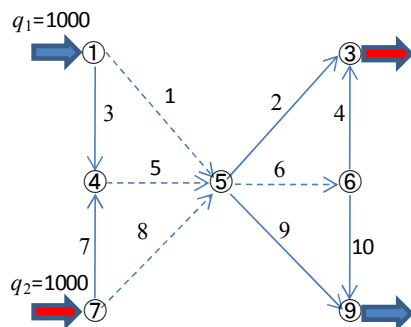


図 1. テストネットワーク

参考文献

- 1) Clark, S. D. and Watling, D. P.: Modelling network travel time reliability under stochastic demand, *Transportation Research B*, Vol.39, pp.119-140, 2005.
- 2) Kenetsu UCHIDA and Kazunori MUNEHIRO: Impact of Stochastic Traffic Capacity on Travel Time in Road Network, *Transportation Research Board 89th Annual Meeting*, CD-ROM, 2010.
- 3) Isserlis, L.: On a formulation for the product-moment co-efficient of any order of a normal frequency distribution in any number of variables, *Biometrika*, Vol.12, Issue 1-2, pp.134-139, 1918.
- 4) 内田 賢悦：需要・供給・認知の確率変動を反映した利用者均衡配分, *土木学会論文集D*, Vol. 65, No. 3, pp.386-398, 2009.
- 5) Hazelton, M. L.: Estimation of origin-destination matrices from link flows on uncongested networks, *Transportation Research B*, Vol.34, pp.549-566, 2000.