

2次元 Core-Periphery モデルにおける人口集積・分散パターン*

Bifurcation Analysis of a Two-dimensional Core-Periphery Model*

高山雄貴**・赤松隆***

By Yuki TAKAYAMA**・Takashi AKAMATSU***

1. はじめに

古典的な経済地理学分野の中心地理論は、財の生産拠点である都市の規模・空間的配置と輸送費用の関係を説明している。その中で、Lösch⁸⁾は、市場圏が六角形状になるように企業(都市)が配置されることを示した。しかし、その説得力のある結論が認められる一方で、古くからミクロ経済学的基礎が欠如している点が問題視されてきた。

そこで、都市の規模・空間分布と輸送費用の関係をミクロ経済学的基礎のあるモデルで説明する試みが、長年行われてきた。その流れに関連する研究は、土木計画分野でも蓄積されている(e.g., 小林¹⁰⁾, 上田・松葉¹¹⁾)。これらの研究では、社会基盤整備が国土・地域構造に与える影響を明らかにすることを主目的として、都市の集積現象を扱っている。しかし、そのいずれも、モデルの挙動に関して断片的な数値計算例しか示されておらず、都市集積の一般的特性は明らかにされていない。

新経済地理学分野では、Löschによる六角形の市場圏をもつ企業(都市)の配置パターン(以降、Lösch型集積パターン)形成を説明し得ると期待されるモデルがいくつか提案されている。その代表的なモデルは、KrugmanによるCore-Periphery(CP)モデル⁷⁾である。このモデルは、輸送費用の減少が人口・企業の集積をもたらすことを一般均衡の枠組みで明らかにしている。しかし、その期待とは裏腹に、最近まで、大半の研究は空間が退化した2都市間の集積・分散現象を分析するのみに留まっていた³⁾。その中でも例外的に、Akamatsu et al.¹⁾は、多都市CPモデルを理論的に分析する方法を提示している。そして、その手法を適用することで、多都市CPモデルで創発する集積パターンを明らかにしている。しかし、提示された分析手法は1次元空間でしか適用できず、中心地理論との整合性を直接確認できる2次元CPモデルの特性は未だ解明されていない。

本研究では、2次元空間多都市CPモデルで、Lösch型集積パターンが創発することを明らかにする。そのために、Akamatsu et al.の分岐解析手法を拡張し、2次元空間に適用できる方法を提示する。そして、その手法を用いて、輸送費用の減少に伴い創発する集積パターン

の一般的特性を示す。本研究で得られる結果は、Lösch型集積パターンの創発がミクロ経済学的基礎から説明されることを初めて示しており、これは既存研究では全く知られていないオリジナルな貢献である。

2. Core-Periphery モデル

本稿では、Pfluger⁹⁾による2都市CPモデルを多都市の枠組みに拡張する¹⁾。そこで、本章では、都市・経済環境の設定を示した後、各々のモデルについて、均衡条件を定式化する。

(1) 都市・経済環境の設定

離散的な K 個の都市が存在する都市経済システムを考える。労働者は、知識・技術水準に応じてskilled workerとunskilled workerに分類されると仮定する。skilled workerは、高度な知識・技術を活かして、知識集約的な作業に従事する労働者であり、自らが労働・居住する都市を選択できる。unskilled workerは、高度な知識・技術を持たず、労働集約的な作業に従事する労働者である。また、すべての都市に一樣に分布し、労働・居住する都市を選択できない。skilled worker, unskilled workerの総人口は、各々、 H, L であり、全都市に一樣に分布するunskilled workerの各都市の人口が $l = 1$ となるように人口の単位を定義する。

この経済には、農業部門と工業部門の2部門が存在する。農業部門は、収穫一定の技術により、unskilled workerの労働を生産要素として1種類の同質な財を生産する完全競争的な部門である。工業部門は、収穫増の技術により、skilled及びunskilled workerの労働を生産要素として差別化された財を生産する独占競争的な部門である。ある都市で生産された財は、隣接する都市間を結ぶ交通ネットワークにより他の都市へ輸送することができるため、どの都市でも消費することができる。

(2) 主体の行動

a) 消費者行動

都市 i の消費者は、効用関数 $U_i(C_i^M, C_i^A)$ を所得制約 Y_i の下で最大化するように、工業財と農業財の消費量 C_i^M, C_i^A を決定する:

$$\max_{C_i^M, C_i^A} U_i(C_i^M, C_i^A) = \mu \ln C_i^M + C_i^A \quad (1a)$$

$$\text{s.t. } p_i^A C_i^A + \sum_j \int_{k \in n_j} p_{ji}(k) q_{ji}(k) dk = Y_i, \quad (1b)$$

* キーワード: 計画基礎論, 国土計画, 産業立地

** 学生員, 東北大学大学院 情報科学研究科

(〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06,

TEL:022-795-7507, E-mail:takayama@plan.civil.tohoku.ac.jp)

*** 正員, 工博, 東北大学大学院 情報科学研究科 教授

¹⁾ この拡張は、著者らの研究グループによる1次元多都市CPモデルを扱った既存研究と全く同一である。その詳細は、Akamatsu et al.¹⁾, Akamatsu and Takayama²⁾参照。

ここで、 $\mu \in (0, 1)$ は工業財への支出割合を表す定数、 $p_i^A = 1$ は都市 i における農業財の価格でありニューメーラールとする。 k は工業財の種類を表すインデックスであり、常に工業財の種類が連続的かつ無限に存在すると仮定するため連続変数とする。 $p_{ji}(k), q_{ji}(k)$ は、各々、都市 j で生産され都市 i で消費される工業財の種類毎の価格と消費量、 n_j は都市 j で生産された工業財の種類を表す。また、 C_i^M は、工業財の消費量 $q_{ji}(k)$ を代替の弾力性 $\sigma > 1$ を用いて集計した、

$$C_i^M \equiv \left(\sum_j \int_{k \in n_j} q_{ji}(k)^{(\sigma-1)/\sigma} dk \right)^{\sigma/(\sigma-1)}$$

によって定義される。

b) 企業行動

農業部門では、unskilled worker の労働のみを生産要素とし、同質な財を完全競争のもとで収穫一定の技術により生産する。この場合、一般性を失うことなく、1 単位の unskilled worker の労働により、1 単位の財が生産されると基準化できる。したがって、限界費用原理から、農業財の価格 p_i^A は、unskilled worker の賃金 w_i^L と等しくなる。また、農業財の輸送には費用がかからないと仮定するため、どの都市においても農業財の価格、unskilled worker の賃金は等しい (i.e., $p_i^A = w_i^L = 1 \forall i$)。

工業部門では、企業は Dixit-Stiglitz 型の独占的競争市場下で、差別化された工業財を生産する。企業が工業財を生産するためには、skilled worker の労働を α 単位と、生産量 $x_i(k)$ に応じて unskilled worker の労働を $\beta x_i(k)$ 単位、生産要素として投入する必要があると仮定する。この仮定から、工業財の生産費用関数 $c(x_i(k))$ は、skilled worker の賃金を w_i とすると、 $c(x_i(k)) = \alpha w_i + \beta x_i(k)$ と表現できる。企業は、この費用関数 $c(x_i(k))$ と前節の消費者行動により与えられる財の需要関数 $Q_{ij}(k)$ を所与として自ら生産する工業財の価格 $p_{ij}(k)$ を設定する:

$$\max_{\{p_{ij}(k)\}} \Pi_i(k) = \sum_j p_{ij}(k) Q_{ij}(k) - c(x_i(k)).$$

工業財の輸送には費用がかかると考える。この輸送費用は、氷塊費用の形をとると仮定する。すなわち、都市 i から j に 1 単位の工業財を輸送すると、最初の 1 単位のうち $1/\phi_{ij}$ 単位だけが実際に到着し、残りは解けてしまうと考える。

(3) 短期均衡条件と均衡解の導出

都市経済システムにおいて、財の生産・消費量と賃金、財価格は、skilled worker が移住できない程、短期間で均衡すると仮定する。この状態を“短期均衡状態”と呼ぼう。短期均衡の条件下では、都市 ij 間の交易条件を表す空間割引行列 $D \equiv [d_{ij}] = [\phi_{ij}^{1-\sigma}]$ を利用することにより、skilled labor の間接効用関数 v を skilled labor の人口分布 $\mathbf{h} = [h_0, h_1, \dots, h_{K-1}]$ の陽関数として

表現できる²:

$$v(\mathbf{h}) = S(\mathbf{h}) + \sigma^{-1} \left[\mathbf{w}^{(H)}(\mathbf{h}) + \mathbf{w}^{(L)}(\mathbf{h}) \right]$$

ここで、右辺のベクトルは、

$$\begin{aligned} S(\mathbf{h}) &\equiv (\sigma - 1)^{-1} \ln[D\mathbf{h}], \\ \mathbf{w}^{(L)}(\mathbf{h}) &\equiv M\mathbf{1}, \quad \mathbf{w}^{(H)}(\mathbf{h}) \equiv M\mathbf{h}, \\ M &\equiv D(\text{diag}[D\mathbf{h}])^{-1}, \end{aligned}$$

1 は全ての要素が 1 の $K \times 1$ ベクトルである。また、ベクトルの各要素に対数をとる場合、 $\ln[\mathbf{a}] \equiv [\ln a_0, \ln a_1, \dots]^T$ と表記した。

(4) 調整ダイナミクスと長期均衡条件

長期的には、skilled worker は、自らの得る効用を最大化するように労働・居住する都市を選択することができる。この skilled worker の都市選択及び移住行動が長期的に落ち着く状態を“長期均衡状態”と呼ぼう。CP モデルの長期均衡状態は、後に示されるように、複数存在する。したがって、均衡選択のためには、均衡解周りの摂動に対する安定性、すなわち局所的な漸近安定性を調べる必要がある。そこで、本節では長期均衡状態を定義し、その安定性を調べる方法を示す。

長期均衡状態とその安定性を定義するには、skilled worker の人口分布が均衡状態へ到達するまでの調整ダイナミクスを定義する必要がある。本研究では、この調整ダイナミクスとして、一般的な CP モデルで用いられる Replicator dynamics を採用する:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{h}} &= \mathbf{F}(\mathbf{h}) \equiv \text{diag}[\mathbf{h}](v(\mathbf{h}) - \bar{v}(\mathbf{h})\mathbf{1}), \\ \bar{v}(\mathbf{h}) &\equiv H^{-1} \mathbf{h}^T v(\mathbf{h}). \end{aligned} \quad (2)$$

調整ダイナミクス (2) により、長期均衡状態を定義しよう。長期均衡状態 \mathbf{h}^* は、調整ダイナミクスの定常状態とする。すなわち、以下を満たす人口分布 \mathbf{h}^* が長期均衡状態である:

$$\mathbf{F}(\mathbf{h}^*) \equiv \text{diag}[\mathbf{h}^*](v(\mathbf{h}^*) - \bar{v}(\mathbf{h}^*)\mathbf{1}) = 0.$$

(5) 長期均衡状態の安定性と分岐

均衡状態 \mathbf{h}^* の局所的な漸近安定性は、動的システム理論でよく知られているように、調整ダイナミクスの右辺 $\mathbf{F}(\mathbf{h}^*)$ の Jacobi 行列

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{F}(\mathbf{h}^*) &= \text{diag}(v(\mathbf{h}^*) - \bar{v}(\mathbf{h}^*)\mathbf{1}) \\ &+ H^{-1} \text{diag}(\mathbf{h}^*) \left[H \nabla v - \mathbf{1} \mathbf{h}^{*T} \nabla v - \mathbf{1} v(\mathbf{h}^*)^T \right] \end{aligned} \quad (3)$$

の固有値により調べることができる。より具体的には、 $\nabla \mathbf{F}(\mathbf{h}^*)$ の固有値の実部が全て負であれば安定、そうでなければ不安定である。式 (3) に含まれる Jacobi 行列 ∇v は (i, j) 要素が $\partial v_i(\mathbf{h}^*) / \partial h_j$ の行列であり、以下のように表される:

$$\nabla v = \nabla S(\mathbf{h}^*) + \sigma^{-1} \left[\nabla \mathbf{w}^{(L)}(\mathbf{h}^*) + \nabla \mathbf{w}^{(H)}(\mathbf{h}^*) \right].$$

² 消費者の都市選択に無関係である定数項と係数 μ は省略した。

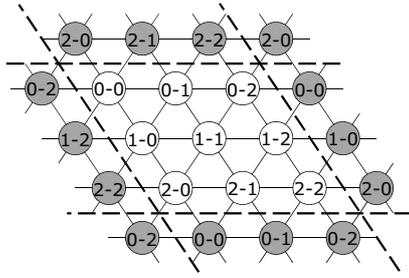


図-1 3×3都市の周期構造

ここで、右辺の3つの Jacobi 行列は、各々、以下のよう
に与えられる:

$$\begin{aligned}\nabla S(\mathbf{h}^*) &\equiv (\sigma - 1)^{-1} M, \\ \nabla \mathbf{w}^{(L)}(\mathbf{h}^*) &\equiv -M^T M, \\ \nabla \mathbf{w}^{(H)}(\mathbf{h}^*) &\equiv M^T - M^T \text{diag}[\mathbf{h}^*] M.\end{aligned}$$

CP モデルでは、パラメータ (e.g., 輸送費用) の変化に伴い均衡状態 \mathbf{h}^* の安定性が切り替わる。この安定性が変化する現象は、数学的には分岐現象と呼ばれ、CP モデルでは、その分岐現象により様々な集積パターンが創発する。そこで、次章以降では、輸送費用の減少に伴う均衡解の分岐挙動を調べることで、CP モデルで創発する集積パターンを明らかにする。

3. 2次元空間の設定と解析の準備

(1) 周期境界 2次元 3×3都市システム

2次元平面を正三角形で分割し、その各頂点上に都市が存在する図-1 に示すような都市システムを考える。この都市システムには、3×3都市が存在し、その i 行 j 列に位置する都市を都市 $i-j$ と表記する。また、2次元空間の境界は周期境界とする。すなわち、図-1の白色の3×3都市の境界は、灰色の都市で表されるように、周期的につながっていると考える。

前章までに定義したベクトルは、 $3i+j$ 番目の要素が都市 $i-j$ に関する要素となるように並べる。より具体的には、ベクトルの要素は、順に都市 0-0, 0-1, 0-2, 1-0, ..., 2-2 の変数を表す。

2つの都市 $i-j, k-l$ 間の距離は、 $t(i-j, k-l)$ と表す。隣接する都市間の距離を1に基準化し、隣接していない都市間の距離は最短経路で定義する。すなわち、

$$t_{[3]}(i-j, k-l) \equiv \begin{cases} m_{[3]}(i, k) + m_{[3]}(j, l) & \text{if } (i-k)(j-l) \geq 0, \\ \max(m_{[3]}(i, k), m_{[3]}(j, l)) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$m_{[3]}(x, y) \equiv \min(|x-y|, 3-|x-y|).$$

すると、都市間の工業財の輸送に必要な氷塊費用は、

$$\phi_{i-j, k-l} \equiv \exp[\tau t(i-j, k-l)]$$

と定義される。ここで、 $\tau \in [0, \infty)$ は輸送費用の大きさを表すパラメータである。この $\phi_{i-j, k-l}$ の定義から、都市 $i-j$ から $k-l$ への交易条件を $(3i+j, 3k+l)$ 要素に持

つ空間割引行列は、

$$D = \begin{bmatrix} D_0 & D_1 & D_1^T \\ D_1^T & D_0 & D_1 \\ D_1 & D_1 & D_0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

で与えられる。ここで、 D_0, D_1 は、各々、第1行が $d_0 = [1, r, r]$, $d_1 = [r, r^2, r]$ の巡回行列、 r は隣接する都市間の輸送条件を表し、次のように定義される:

$$r \equiv \exp[(1-\sigma)\tau]. \quad (5)$$

(2) 空間割引行列の固有値

前節で示した空間構造下では、空間割引行列 (4) の各ブロック行列 D_k が巡回行列の順に並び、かつ、そのブロック行列自体も巡回行列の順に並ぶ。これは、Block Circulant with Circulant Blocks (以降、BCCB) と呼ばれる行列であり、2次元離散 Fourier 変換行列 Z

$$Z \equiv Z_{[3]} \otimes Z_{[3]} \quad (6)$$

による相似変換を施すことで対角化できることが知られている (e.g., Davis⁴)。ここで、 \otimes はクロネッカー積、 $Z_{[3]}$ は3×3の離散 Fourier 変換行列である:

$$Z_{[3]} = [z_{[3],0}, z_{[3],1}, z_{[3],2}], \quad (7)$$

$$z_{[3],k} = [\omega^0, \omega^k, \omega^{2k}]^T, \quad (8)$$

$$\omega \equiv \exp[i(2\pi/3)]. \quad (9)$$

空間割引行列 D の固有値・固有ベクトルは、以上の性質を利用することで、容易に与えられる。そこで、以降の分岐解析で重要な役割を果たす、空間割引行列の行和 $d \equiv (d_0 + 2d_1) \cdot 1$ で正規化した行列 D/d の固有値・固有ベクトルの特性を調べると、次の補題が得られる。

補題 3.1 空間割引行列 D/d の固有値・固有ベクトルは、以下の特性を持つ。

- 1) 第 $3i+j$ 固有ベクトル ($i, j = 0, 1, 2$) は、2次元離散 Fourier 変換行列の第 $3i+j$ 行ベクトル:

$$z_{3i+j} = [z_{[3],j}^T, \omega^i z_{[3],j}^T, \omega^{2i} z_{[3],j}^T]^T \quad (10)$$

によって与えられる。ここで、 $\omega \equiv \exp(i(2\pi/3))$ である。

- 2) 第 $3i+j$ 固有値 $f_{3i+j}(i, j = 0, 1, 2)$ は、

$$f_{3i+j} = \begin{cases} 1 & \text{if } i=j=0 \\ (1-2r)(1-r)/d & \text{if } i=j \neq 0 \\ (1+r)(1-r)/d & \text{otherwise} \end{cases} \quad (11)$$

で与えられる。

- 3) $f_{3i+j}(i \neq j)$ は $0 < r \leq 1$ の r に関する単調減少関数である。また、その値域は、 $[0, 1)$ である。 $f_{3i+i}(i \neq 0)$ は r に関して単峰であり、 $r \in (0, 0.5]$ の範囲では正、 $r \in (0.5, 1)$ では負の値を取る。
- 4) f_{3i+j} の最小値は任意の $r \in (0, 1)$ において、 f_4, f_8 である。

(3) 調整ダイナミクスの Jacobi 行列の固有値

2次元 CP モデルにおいて創発する集積パターンを調べる準備として、全ての都市の条件が均一となる状況を考える．より具体的には、各都市に skilled worker が $h \equiv H/9$ 人ずつ均等に分散した人口分布 \bar{h} (分散均衡状態) を初期の状態とする．このとき、 $\nabla F(\bar{h})$ が BCCB となることを示そう．人口分布 $h = \bar{h}$ である場合、 $M = (hd)^{-1}D$ であるから、間接効用とその Jacobi 行列は、

$$v(\bar{h}) = \bar{v}(\bar{h})\mathbf{1}, \quad (12)$$

$$\nabla v(\bar{h}) = h^{-1} \{b(D/d) - a(D/d)^2\} \quad (13)$$

に帰着する．ここで、

$$a \equiv \sigma^{-1}(1 + h^{-1}), \quad b \equiv (\sigma - 1)^{-1} + \sigma^{-1}. \quad (14)$$

したがって、 $\nabla F(\bar{h})$ は以下のように与えられる:

$$\nabla F(\bar{h}) = -(\bar{v}(\bar{h})/9)E + h\{I - (1/9)E\}\nabla v(\bar{h}). \quad (15)$$

ここで、 E は全ての要素が 1 である 9×9 行列である．この Jacobi 行列の右辺に現れる行列 D, I, E は BCCB であるため、 $\nabla F(\bar{h})$ もまた BCCB である．

以上より、調整ダイナミクスの Jacobi 行列の固有値 g は、 $\nabla F(\bar{h})$ が BCCB であるため、以下の命題に示されるように、 D/d の固有値 f の簡単な関数で表される:

補題 3.2 skilled worker が全都市に均等に分散した状態 \bar{h} を考える．このとき、2次元 CP モデルの調整ダイナミクスの Jacobi 行列 $\nabla F(\bar{h})$ は以下の特性を持つ:

- 1) 第 $3i+j$ 固有ベクトル ($i, j = 0, 1, 2$) は、行列 D/d の固有ベクトルと同様、2次元離散 Fourier 変換行列 Z の第 $3i+j$ 行ベクトル z_{3i+j} で与えられる．
- 2) 第 0 固有値は常に $-\bar{v}(\bar{h})$ である．第 $3i+j$ 固有値 $g_{3i+j}(i, j = 0, 1, 2)$ は、行列 D/d の第 $3i+j$ 固有値 f_{3i+j} の 2 次関数:

$$g_{3i+j} = G(f_{3i+j}) \quad (16)$$

$$G(x) \equiv bx - ax^2 \quad (17)$$

で表される．ここで、 a, b は $h \equiv H/9$ と σ から決まる定数で式 (14) によって与えられる．

(4) 立地パターンと固有ベクトル

補題 3.2 で示された調整ダイナミクスの固有ベクトル z_k は、Akamatsu et al.¹⁾で示されているように、その要素の配列パターンによって、各都市への skilled worker 人口集積パターンを表現している．例えば、 z_0 は、全要素が 1 であり、skilled worker が均等に分散した状態 (図-2-a) に対応する; $z_{3i+j}(i \neq j)$ は、図-2-b に示すように、直線上の都市に skilled worker が集積したパターン (以降、直線パターン) を表している; 同様に、 z_{3i+i} は、隣接する都市間の距離が $\sqrt{3}$ 倍に広がるパターンである (図-2-c)．この図-2-c で表される集積パターンをボロノイ分割すると、その市場圏が正六角形となること

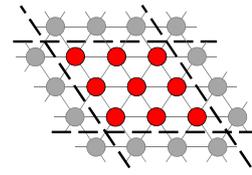


図-2-a 分散均衡状態

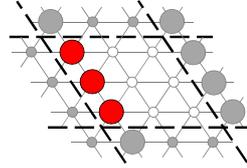


図-2-b 直線パターン

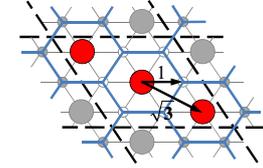


図-2-c Lösch 型集積パターン

図-2 固有ベクトルが表す集積パターン

が確認できる．これは、この集積パターン (以降、Lösch 型集積パターン) が Lösch による中心地理論で示された都市の配置パターンと一致することを意味している．

4. 分散均衡状態からの分岐:

Lösch 型集積パターンの創発

(1) 分岐発生条件

2次元 CP モデルで輸送費用の減少に伴い集積パターンが創発するには、均衡解が分岐する必要がある．そこで、分散均衡状態 \bar{h} から、輸送費用の減少に伴う分岐が発生する条件を確認しておこう．均衡解の分岐は、補題 3.2 で示した $\nabla F(\bar{h})$ の固有値 g_{3i+j} の符号が変化したときに発生する．この符号変化が起こるには、 $f_{3i+j}(i, j \neq 0)$ の値域の範囲内で $G(x) = 0$ となる必要がある．したがって、分岐の発生条件は、

$$1 - \sigma^{-1} > h \quad (18)$$

で与えられる．この条件が満たされない場合、輸送費用 τ が高い状況でも g_{3i+j} が常に正となり、分散状態が不安定的となる．すなわち、 τ の減少に伴う分散均衡状態からの分岐が発生しない．そこで、以降の分岐解析では、この条件が満たされている状況のみを考える．

(2) Lösch 型集積パターンの創発

本節では、分散均衡状態から輸送費用の減少に伴い発生する分岐挙動を調べる．分岐が発生するのは、 $g_{3i+j} = 0$ を満たす瞬間である．すなわち、空間割引行列の固有値 f_{3i+j} が、 $G(x) = 0$ の解

$$x_+^* = b/a > 0, \quad x_-^* = 0 \quad (19)$$

で表される臨界値に達したときに分岐が発生する．

f_{3i+j} の分岐臨界値 x_+^* を利用して、輸送費用パラメータ τ が減少した場合に生じる均衡解の分岐挙動を示そう．ただし、本稿では、 τ と r に一対一対応関係 (5) があることから、 $r \in (0, 1]$ の増加に伴う分岐挙動を調べる．その準備のために、まず、固有値 $f_{3i+j}(\cdot)$ を r の関数と考え、その逆関数を $r_{3i+j}(\cdot)$ とする:

$$r_{\pm}^* = r_{3i+j}(x_{\pm}^*) \Leftrightarrow x_{\pm}^* = f_{3i+j}(r_{\pm}^*). \quad (20)$$

補題 3.1 からわかるように, $x_{\pm}^* \geq 0$ の範囲では, $x_{\pm}^* = f_{3i+j}$ を満たす $r \in (0, 1)$ が一意に決まる. したがって, $r_{3i+j}(\cdot)$ が一価関数であることに注意が必要である.

初期状態では, 輸送費用が十分高く (r が十分小さく),

$$r < r_{3i+j}(x_{\pm}^*) \quad \forall i, j \neq 0 \quad (21)$$

が成立しているとしよう. 逆関数 (20) の定義から, この条件は, $f_{3i+j} > x_{\pm}^* \quad \forall i, j \neq 0$ と等価であるため, $g_{3i+j} < 0 \quad \forall i, j$ が成立する. したがって, この状況では分散均衡状態 \bar{h} は, 安定的である.

輸送費用が徐々に減少 (r が徐々に増加) すると, ある i^*, j^* に対して

$$r > r_{3i^*+j^*}(x_{\pm}^*) \quad (22)$$

が成立する. この条件は, $f_{3i^*+j^*} < x_{\pm}^*$ となることを表している. これは, $g_{3i^*+j^*} > 0$, すなわち, 分散均衡状態が不安定化し, 分岐が発生することを意味する. ここで, 最初に式 (22) を満たす i^*, j^* は, 補題 3.1 より

$$3i^* + j^* = \arg \min_k f_k = 4, 8 \quad (23)$$

である. したがって, r が臨界値

$$r_+^* \equiv \min_k r_k(x_{\pm}^*) = r_{3i^*+j^*}(x_{\pm}^*) \quad (i = 1, 2) \quad (24)$$

に達したときに, $z_{3i^*+j^*}$ ($i = 1, 2$) に対応した集積パターン $h = \bar{h} + \delta z_4$ が創発する. r が r_+^* からさらに増加すると, δ が急激に増加し, 図-2-c に示す Lösch 型集積パターン $h_{(3)} = [3h, 0, 0, 0, 3h, 0, 0, 0, 3h]^T$ となる.

以上で示された, 分散均衡状態における r の分岐臨界値 r_+^* は, D/d の固有値 f と x_{\pm}^* が与えられれば, 容易に求められる. パラメータと分岐臨界値 r_+^* の関係も, パラメータと x_{\pm}^* の関係 (19) から確認できる. 以上の点を含めて, 2 次元 CP モデルにおいて, 分散均衡状態から発生する分岐挙動を命題にまとめておこう.

命題 4.1 2 次元 CP モデルにおいて, 条件 (18) が満たされていると仮定する. r が十分小さく分散均衡状態が安定的な状態から r を増加 (輸送費用を減少) させると,

- 1) 式 (24), (19) で与えられる r の臨界値 r_+^* で, Lösch 型集積パターン (図-2-c) への分岐が発生する.
- 2) 分岐臨界値 r_+^* は, σ が小さく H が大きいほど小さい.

5. Lösch 型集積パターンからの分岐:

Lösch 型集積パターンの進展

(1) 調整ダイナミクスの Jacobi 行列の固有値

本章では, Lösch 型集積パターンからさらに輸送費用が減少 (r が増加) したときに発生する分岐の挙動を調べる. Lösch 型集積パターンの安定性を調べるには, $\nabla F(h_{(3)})$ の固有値を調べる必要がある. この固有値は, 分散均衡状態とは異なり BCCB とはならないため, 解析的に導出できないように思える. しかし, Lösch 型集

積パターン $h_{(3)}$ の部分的な対称性を利用すれば, 固有値を得ることができる.

この対称性を利用するために, 都市集合 C を skilled worker が居住する都市 $C_0 = \{0-0, 1-1, 1-2\}$ と, 居住しない都市 $C_2 = \{0-1, 1-2, 2-0\}$, $C_3 = \{0-2, 1-0, 2-1\}$ の部分集合に分割する. この分割は, 以下の置換 σ を考えることと一致する:

$$\sigma: \begin{bmatrix} 0-0 & 0-1 & 0-2 & | & 1-0 & 1-1 & 1-2 & | & 2-0 & 2-1 & 2-2 \\ \hline 0-0 & 1-1 & 2-2 & | & 0-1 & 1-2 & 2-0 & | & 0-2 & 1-0 & 2-1 \end{bmatrix}.$$

この置換を行うために, 次の置換行列を定義しよう:

$$P \equiv \begin{bmatrix} P_{(0)} \\ P_{(1)} \\ P_{(2)} \end{bmatrix}. \quad (25)$$

ここで, $P_{(\cdot)}$ は 3×9 行列である. $P_{(k)}$ の i, j 要素は, $i+k < 3$ のとき $j = 4i+k$ であれば 1, $i+k \geq 3$ のとき $j = 4i+k-3$ であれば 1, そうでなければ 0 である. この置換行列を利用すると, i, j 要素が a_{ij} である行列 A を考える場合, PAP^T の i, j 要素は, $a_{\sigma(i)\sigma(j)}$ となる. さらに, $PP^T = I$ も成立する.

空間割引行列 D は, この置換行列 P により

$$D^{\#} \equiv PDP^T = \begin{bmatrix} D^{(0)} & | & rE_{[3]} & | & rE_{[3]} \\ \hline rE_{[3]} & | & D^{(0)} & | & rE_{[3]} \\ \hline rE_{[3]} & | & rE_{[3]} & | & D^{(0)} \end{bmatrix} \quad (26)$$

と変換することができる. ここで, 部分行列 $D^{(0)}$ は, 第 1 行ベクトルが $d_0^{(0)} \equiv [1, r^2, r^2]$ の巡回行列, $E_{[3]}$ は全ての要素が 1 の 3×3 行列である.

空間割引行列の部分行列が巡回行列であることを利用すると, $\nabla^{\#} F(h_{(3)}) \equiv P \nabla F(h_{(3)}) P^T$ の各ブロックの部分行列も巡回行列であることが確認できる. この事実を用いると, 第 3 章 (3) 節と同様の手順により, 次の補題が得られる:

補題 5.1 Lösch 型集積パターン $h_{(3)}$ での調整ダイナミクスの Jacobi 行列 $\nabla F(h_{(3)})$ の固有値は, 以下のよう

$$g_{3i+j} = \begin{cases} -\bar{v}(h_{(3)}) & \text{if } i = j = 0 \\ bf_j^{(0)} - \hat{a}(f_j^{(0)})^2 & \text{if } i = j = 1, 2 \\ v_1(h_{(3)}) - \bar{v}(h_{(3)}) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (27)$$

ここで, $\hat{a} \equiv \sigma^{-1}\{1+(3h)^{-1}\}$, $v_1(h_{(3)})$ は skilled worker が居住していない都市の効用水準である. また, $f_k^{(0)}$ は, $D^{(0)}$ を行和 $d^{(0)} \equiv d_0^{(0)} \cdot 1$ で正規化した行列 $D^{(0)}/d^{(0)}$ の第 k 固有値である:

$$f^{(0)} = [1, (1-r^2)/d^{(0)}, (1-r^2)/d^{(0)}]^T. \quad (28)$$

(2) Lösch 型集積パターンの進展

補題 5.1 より, Lösch 型集積パターン $h_{(3)}$ において, $g_{3i+j} = 0$ となる f_j の分岐臨界値は,

$$x_{(3),+}^* = b/\hat{a} > 0, \quad x_{(3),-}^* = 0 \quad (29)$$

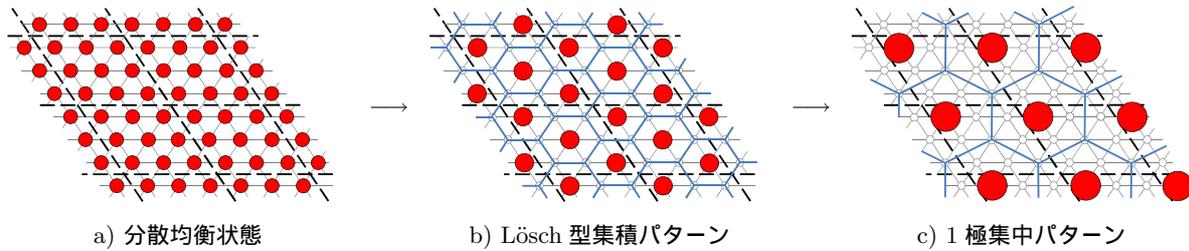


図-4 輸送費用減少に伴う集積パターンの推移

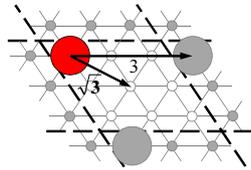


図-3 1 極集中パターン

で与えられる．式 (28) より $f_k^{(0)} (k \neq 0)$ の値域は $[0, 1)$ である．したがって， r の増加（輸送費用の減少）に伴う分岐は， $f_k^{(0)} = x_{(3),+}^*$ を満たす r の臨界値 $r_{(3),+}^*$

$$r_{(3),+}^* = \sqrt{\frac{1 - b/\hat{a}}{1 + 2b/\hat{a}}} \quad (30)$$

で発生する．このとき創発する集積パターンは，固有ベクトル $\hat{z} = [1, 0, 0, 0, -1/2, 0, 0, 0, -1/2]^T$ に対応した集積パターン $h = h_{(3)} + \delta \hat{z}$ である． $r_{(3),+}^*$ からさらに r を増加させると， $\delta \in (0, 6h]$ が急激に増加し，最終的に h は図-3 で示す 1 極集中パターン $h_{(1)} = [9h, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ となる．1 極集中パターンを周期的に並べると，図-4 c) で示すように，Lösch が示した六角形状の市場圏が形成されていることが分かる．以上の議論は，次の命題にまとめられる．

命題 5.1 2 次元 CP モデルにおいて，Lösch 型集積パターンが安定的であると考える．その状態からさらに r を増加させると，

1) 式 (30) で与えられる臨界値 $r_{(3),+}^*$ で 1 極集中パターンが分岐により創発する．

2) 臨界値 $r_{(3),+}^*$ は， σ が小さく H が大きいほど小さい

以上で得られた解析結果から，輸送費用の減少に伴い集積パターンがどのように進展するかを見てみよう．図-4 は，分散均衡状態，Lösch 型集積パターン，1 極集中パターンの skilled worker の分布を周期的に並べた図である．この結果から，分岐により集積が進むにつれて，工業財の六角形状の市場圏が，その形（六角形）を保ちながら広がっていることがわかる．これは，Lösch⁸⁾ による中心地理論の結果が，ミクロ経済学的基础により説明されることを意味する．

6. おわりに

本研究では，新経済地理学分野の CP モデルを 2 次元空間多都市モデルに拡張し，その均衡解の分岐特性を明らかにした．その結果，分散均衡状態が安定的な状態から輸送費用を減少させると，分岐により Lösch 型集積

パターンが創発することを明らかにした．さらに輸送費用を減少させると，市場圏が拡大した Lösch 型集積パターンが分岐により創発することも示された．以上の結果は，ミクロ経済学的基础を持つ CP モデルにおいて，Lösch 型集積パターンが安定均衡解となることを示しており，従来研究では全く知られていない，本研究のオリジナルな貢献である．

本研究の結論は，Pfluger⁹⁾ モデルに限定されたものではない．Ikeda et al.⁶⁾，Akamatsu and Takayama²⁾ で示されているように，Pfluger モデルは，Krugman⁷⁾，Forslid and Ottaviano⁵⁾ モデルと同一の分岐特性を持つ．したがって，Krugman モデル，Forslid and Ottaviano モデルを 2 次元空間に拡張しても，本研究と同様の結論が得られる．ただし，2 次元空間を 3×3 都市の三角形格子で分割するという設定は，より一般化する必要があるだろう．例えば， $N \times N$ 都市や正方形格子の場合の分岐解析は，今後の研究課題である．

参考文献

- 1) Akamatsu, T., Takayama, Y. and Ikeda, K.: Spatial Discounting, Fourier, and Racetrack Economy: A Recipe for the Analysis of Spatial Agglomeration Models, *MPRA Paper* 21738, University Library of Munich, 2010.
- 2) Akamatsu, T. and Takayama, Y.: A Simplified to Analyzing Multi-regional Core-Periphery Models, *MPRA Paper* 21739, University Library of Munich, 2010.
- 3) Behrens, K. and Thisse, J.F.: Regional Economics: A New Economic Geography Perspective, *Regional Science and Urban Economics*, Vol.37, pp.457-465, 2007.
- 4) Davis, P.J.: *Circulant Matrices*, John Wiley & Sons, 1979.
- 5) Forslid, R. and Ottaviano, G.: An Analytically Solvable Core-Periphery Model, *Journal of Economic Geography*, Vol.3, 229-240, 2003.
- 6) Ikeda, K., Akamatsu, T. and Kono, T.: Spatial Agglomeration Pattern of a System of Cities: Bifurcation Theory for Core-Periphery Model, Working Paper, 2009.
- 7) Krugman, P.: Increasing Returns and Economic Geography, *Journal of Political Economy*, Vol.99, pp.483-499, 1991.
- 8) Lösch, A.: *Die räumliche Ordnung der Wirtschaft*, Gustav Fische, 1940 (*The Economics of Location*, translated by W. Woglom, New Haven, CT: Yale University Press, 1956).
- 9) Pfluger, M.: A Simple Analytically Solvable, Chamberlinian Agglomeration Model, *Regional Science and Urban Economics*, Vol.34, 565-573, 2004
- 10) 小林潔司: 知識産業と企業の立地均衡に関する理論的研究, 土木学会論文集, No.395/IV-9, pp.95-104, 1988.
- 11) 上田孝行, 松葉保孝: 都市群システムにおける構造の安定性と変化に関するモデル分析, 土木学会論文集, No.542/IV-32, 33-44, 1996.