

確率的交通容量の推計とネットワーク移動時間信頼性に関する研究*

A study on the estimation of stochastic traffic capacity and travel time reliability*

内田賢悦**

By Ken'etsu UCHIDA**

1. はじめに

本研究では、自動車の追従方程式から導出されるマクロ交通流モデルを用いた確率的交通容量の推計法を示す。特に、積雪寒冷地においては、冬期の移動時間信頼性評価の重要性は、他の地域と比較して、相対的に高いと考えられるため、冬期の気象状況、道路・路面管理作業を考慮した確率的交通容量の推計法も併せて示す。次に、交通流観測データから、実際に夏期と冬期の確率的交通容量を推計する。さらに、こうして得られた確率的交通容量が道路ネットワーク上の移動時間に与える影響を調べるため、筆者らが開発した交通量配分モデルを適用して得られた解析結果を示す。

2. 確率的交通容量の推定法

(1) 仮定・仮説

本研究では、自動車の追従方程式 GM モデルから導かれるマクロ交通流モデルを適用し、確率的交通容量を推計する。確率的交通容量の分散に関しては、以下に示す仮定に基づき推計することにする。はじめに、交通容量の変動（分散）に影響を与える要因として、以下を考える。

- ・ 追従行動に影響を及ぼすが、追従方程式において表現されていないパラメータがあること（以下では、要因 ε と呼ぶことにし、それによる交通容量の変動を σ^ε によって表すことにする）。
- ・ 追従方程式において表現されているパラメータ自体が確率変数となっていること（以下では、要因 p と呼ぶことにし、それによる交通容量の変動を σ^p によって表すことにする）。

以上の仮定から、道路ネットワーク上のリンクの確率的交通容量（ C ）の分散（ σ^C ）は、式(1)で与えられる。

$$\sigma^C = \sigma^\varepsilon + 2 \cdot \sigma^{\varepsilon, p} + \sigma^p. \quad (1)$$

ここで $\sigma^{\varepsilon, p}$ は、要因 ε と p に起因する共分散である。確率的交通容量は、その平均を c とすると、式(2)に示す正規分布に従うことを仮定する。

$$C \sim N(c, \sigma^C) \quad (2)$$

本研究では、積雪寒冷地における夏期と冬期の確率的交通容量の推計を念頭に置いているが、積雪時の確率的交通容量に関して以下に示す仮説を立てた。

積雪時において、ある路面状態の下で計測される確率的交通容量は、無積雪時のものと比較した場合、平均は低下するが、分散は変化しない。

上記の仮説が成立する場合、あるリンクを対象として、無積雪時あるいは積雪時の確率的交通容量の分散を一度推計すれば、異なる路面状態では、確率的交通容量の平均のみを推計することによって、その状態での確率的交通容量を同定することができる。

(2) 未知パラメータによる交通容量の変動

GM モデルにいくつかの境界条件を与えることにより、密度（ k ）と空間速度（ v ）との平均値の関係を表すマクロ交通流モデル（ $k-v$ 式）が得られる（式(3)）。

$$v(k) = v_f \cdot \left[1 - \left(\frac{k}{k_j} \right)^{l-1} \right]^{\frac{1}{1-m}}. \quad (3)$$

ここで k_j は、飽和密度であり、本研究では定数と仮定する。また、 v_f は自由走行速度、 l 、 m は推計可能なモデルパラメータである。いま、交通流観測データセットは n 個あり、速度、密度、交通流率が得られるものとし、 i 番目のデータセットを (v_i, k_i, q_i) と表現する。速度（ v_i ）は、要因 ε の影響により変動し、式(4)で与えられるものと仮定する。

$$v_i = v(k_i) + \varepsilon_i, \quad (4)$$

where $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma)$ ($i = 1, \dots, n$) and $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ ($i \neq j$). すなわち、 v_i は、確率変数 $V_i \sim N(v(k_i), \sigma)$ からのランダムサンプリングと考えることにする。ここで、 σ は回帰による変動の分散であり、その推計値（ $\hat{\sigma}$ ）は、式(5)に示す非線形最小二乗法を解いて得られるパラメータの推計値（ $\hat{v}_f, \hat{l}, \hat{m}$ ）を用いて、式(6)で与えられる。

$$\min \sum_{i=1}^n (v_i - v(k_i))^2, \quad (5)$$

subject to v_f, l and m .

$$\hat{\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^n (v_i - v(k_i; \hat{v}_f, \hat{l}, \hat{m}))^2}{n-3}. \quad (6)$$

以上から、確率的速度 $V(k)$ は、密度の関数として、式(7)

*キーワード 交通容量、移動時間信頼性、利用者均衡配分

**正会員 博（工） 北海道大学大学院工学研究科

（札幌市北区北13条西8丁目、Tel 011-706-6211, Fax 011-706-6211）

に示す正規分布に従う。

$$V(k) \sim N(v(k), \hat{\sigma}). \quad (7)$$

交通量保存則 ($q = k \cdot v$) と式(3)から得られる交通流量と速度の平均値の関係を表す $q-v$ 式を用いると、要因 ε による確率的交通容量の平均 (c^ε) は、式(8)で与えられる。

$$c^\varepsilon = \max(q) = k_f \cdot v_0 \cdot \left(1 - \left(\frac{v_0}{\hat{v}_f} \right)^{1-\hat{m}} \right)^{\frac{1}{\hat{l}-1}}. \quad (8)$$

ここで v_0 は、 $\partial q / \partial v|_{v=v_0} = 0$ を満たす臨界速度である。また、確率的交通容量の平均においては、臨界密度 (k_0) は、式(9)で与えられる。

$$k_0 = \frac{c^\varepsilon}{v_0}. \quad (9)$$

その結果、確率的臨界速度は、式(7)に示した関係から、式(10)に示す正規分布に従うことになる。

$$V(k_0) \sim N(v(k_0), \hat{\sigma}) = N(v_0, \hat{\sigma}). \quad (10)$$

一方、交通量保存則と式(10)に示した関係から、要因 ε による確率的交通容量 (C^ε) は、式(11)で与えられる。

$$C^\varepsilon = k_0 \cdot V(k_0). \quad (11)$$

以上から、 C^ε は、式(12)に示す正規分布に従うことになる。

$$C^\varepsilon \sim N(c^\varepsilon, \sigma^\varepsilon) = N(c^\varepsilon, (k_0)^2 \cdot \hat{\sigma}). \quad (12)$$

(3) 確率的パラメータによる交通容量の変動

前節で推計されたマクロ交通流モデルのパラメータは、確率変数の平均値であると捉えることができる。ここでは、パラメータの分布から、確率的パラメータによる交通容量の分散を推計することにする。はじめに、パラメータ値の分散共分散行列を推計するため、式(3)をパラメータ v_f, l, m に関して偏微分したものを考える。これらにおいて、 $k = k_i$ ($i = 1, \dots, n$) と置いたものをそれぞれ、 $\hat{z}_{v_f, i}$, $\hat{z}_{l, i}$, $\hat{z}_{m, i}$ と表現し、式(13)に示す行列 $\mathbf{Z}$ を定義する。

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \hat{z}_{v_f, 1} & \hat{z}_{l, 1} & \hat{z}_{m, 1} \\ \hat{z}_{v_f, 2} & \hat{z}_{l, 2} & \hat{z}_{m, 2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{z}_{v_f, n} & \hat{z}_{l, n} & \hat{z}_{m, n} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

パラメータの分散共分散行列 ($\mathbf{V}$) は、 $\mathbf{Z}$ を用いて式(14)によって推計される。

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \sigma_{v_f} & \sigma_{v_f, l} & \sigma_{v_f, m} \\ \sigma_{l, v_f} & \sigma_l & \sigma_{l, m} \\ \sigma_{m, v_f} & \sigma_{m, l} & \sigma_m \end{bmatrix} = (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \cdot \hat{\sigma}. \quad (14)$$

ここで、上付きの T は、ベクトルの転置操作を表している。さらに、パラメータが正規分布に従うと仮定すると、要因 p

による確率的交通容量 (C^p) の分散は、式(15)によって推計される。

$$\sigma^p = \delta^T \mathbf{V} \delta = (s)^2 \cdot \hat{\sigma}, \quad (15)$$

$$\text{where} \quad \delta = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial v_f} & \frac{\partial q}{\partial l} & \frac{\partial q}{\partial m} \end{pmatrix}^T, \quad (16)$$

$$(s)^2 = \delta^T (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \delta. \quad (17)$$

ここで、式(21)の $\delta q / \delta v_f$ は、式(8)に示した関係から、式(18)で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\delta q}{\delta v_f} &= \left(\frac{\partial q}{\partial v_f} + \frac{\partial q}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial v_f} \right) \Bigg|_{v=v_0, v_f=\hat{v}_f, l=\hat{l}, m=\hat{m}} \\ &= \frac{\partial q}{\partial v_f} \Bigg|_{v=v_0, v_f=\hat{v}_f, l=\hat{l}, m=\hat{m}}, \end{aligned} \quad (18)$$

同様に、式(16)の $\delta q / \delta l$, $\delta q / \delta m$ は、それぞれ式(19), (20)で与えられる。

$$\frac{\delta q}{\delta l} = \frac{\partial q}{\partial l} \Bigg|_{v=v_0, v_f=\hat{v}_f, l=\hat{l}, m=\hat{m}}, \quad (19)$$

$$\frac{\delta q}{\delta m} = \frac{\partial q}{\partial m} \Bigg|_{v=v_0, v_f=\hat{v}_f, l=\hat{l}, m=\hat{m}}. \quad (20)$$

以上から、要因 p による確率的交通容量は、その平均を $c^p (= c^\varepsilon)$ とすると、式(21)に示す正規分布に従う。

$$C^p \sim N(c^p, \sigma^p) = N(c^p, (s)^2 \cdot \hat{\sigma}). \quad (21)$$

(4) 確率的交通容量の変動

以上では、要因 ε と p 、それぞれによる確率的交通容量の分布の推計法を示した。ここでは、2つの要因を同時に考えた確率的交通容量の分布の推計法を考えることにする。前節で示したように、 $c^\varepsilon = c^p$ となるが、これを $c (= c^\varepsilon = c^p)$ で表すことにする。さらに、 C^ε と C^p の分散に共通した項 $\hat{\sigma}$ が含まれることを考えると、 C^ε , C^p は、それぞれ式(22), (23)で表現することができる。

$$C^\varepsilon = c + k_0 \cdot \varepsilon, \quad (22)$$

$$C^p = c + s \cdot \varepsilon, \quad (23)$$

$$\text{where} \quad \varepsilon \sim N(0, \hat{\sigma}). \quad (24)$$

以上の関係を用いると、 C^ε と C^p の共分散 ($\sigma^{\varepsilon, p}$) は、式(25)から求めることができる。

$$\sigma^{\varepsilon, p} = \text{cov}(C^\varepsilon, C^p) = k_0 \cdot s \cdot E[(\varepsilon)^2] = k_0 \cdot s \cdot \hat{\sigma}. \quad (25)$$

したがって、式(1)に示した確率的交通容量の分散 (σ^C) は、式(26)で与えられる。

$$\sigma^C = \sigma^\varepsilon + 2 \cdot \sigma^{\varepsilon, p} + \sigma^p = (k_0 + s)^2 \cdot \hat{\sigma}. \quad (26)$$

以上から、式(2)に示した確率的交通容量は、式(27)に示す正規分布に従うことになる。

$$C \sim N(c, \sigma^C) = N(c, (k_0 + s)^2 \cdot \hat{\sigma}) \tag{27}$$

3. 冬期の確率的交通容量の推計法

積雪寒冷地における冬期の確率的交通容量は、気象状況と道路・路面管理作業の影響を受けて変動するため、ある一時点の交通流観測データを用いて推計される積雪時の確率的交通容量は、冬期のそれとみなすことはできない。ここでは、2.(1)に示した仮説が成立する場合、積雪時の路面状態の一番いい状態（状態 b とし、たとえば、除排雪作業直後の状態が考えられる）と、一番悪い状態（状態 w とし、たとえば、除排雪直前の状態が考えられる）の交通流観測データが得られると、それらから冬期の確率的交通容量を推定する方法を考えることにする。

状態 b での確率的交通容量の平均を c^b 、状態 w でのそれを c^w と表現すると、冬期の確率的交通容量の平均は、図-1に示すように推移すると想定される。この図では、確率的交通容量の平均は、気象の影響を受けるため、変化は一定ではないが減少傾向にあり、 c^w になると、除排雪作業により c^b まで回復する様子を表している。2.(1)に示した仮説が成立する場合を考える。このとき、冬期にドライバーが経験する確率的交通容量は、一様分布 $Uni(c^w, c^b)$ からのランダムサンプリングとなり、さらに、正規分布に従う誤差項 $N(0, \sigma^C)$ を伴って、表現され则认为る。その場合、冬期の確率的交通容量の確率密度関数は、一様分布と正規分布の畳み込み積分によって、式(28)で与えられる。

$$f(u) = \frac{\Psi((u - c^w)/\sigma^C) - \Psi((u - c^b)/\sigma^C)}{c^b - c^w}, \tag{28}$$

where $\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$ (29)

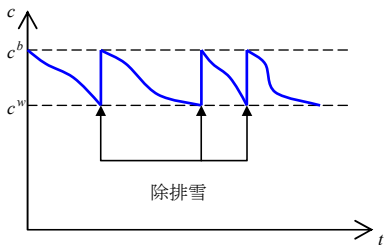


図-1 確率的交通容量の平均の推移（冬期）

4. 数値計算例

(1) 確率的交通容量の推計

ここでは、北海道の国道 230 号に設置された感知器から

得られた交通流観測データを用いて、無積雪時と積雪時の確率的交通容量の推計を行なうことにする。感知器が設置されている区間は、信号等、交通の干渉が起こるような要因はなく、対向 2 車線の単路部とみなすことができる。観測は、路面上に積雪のない 2007 年 11 月 10 日（無積雪時と想定）、および積雪のある 2008 年 1 月 24 日（積雪時と想定）に行なった。

図-2 に積雪時の推計された $k-v$ 曲線を示す。ここでは、 $k-v$ 式で用いる飽和密度（ k_j ）を 120 (pcu/km) と仮定した。表-1 には、推計されたパラメータ値を示す。この結果から、第 2 章で示した仮説がほぼ成立することが確認された。図-3 には、無積雪時と積雪時の交通容量の分布、さらに無積雪時の状態を b 、積雪時の状態を w として式(28)から推計される分布（畳み込み積分による分布）、さらには、この分布に正規分布を当てはめたときの分布（冬期の確率的交通容量とする）を示す。冬期の確率的交通容量は、平均、分散がそれぞれ、1693、245²で与えられる正規分布となる。

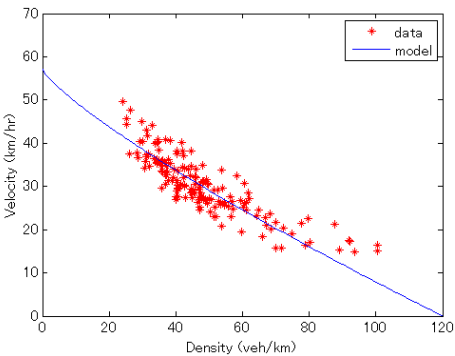


図-2 $k-v$ 曲線（積雪時）

表-1 推計されたパラメータ値

	交通容量		パラメータ ($k-v$ 式)		
	平均 (veh/hr)	分散	$\hat{v}_f$ (km/hr)	$\hat{l}$	$\hat{m}$
無雪	1910	211 ²	69.6	2.1	0.2
積雪	1476	215 ²	57.0	1.8	0.0

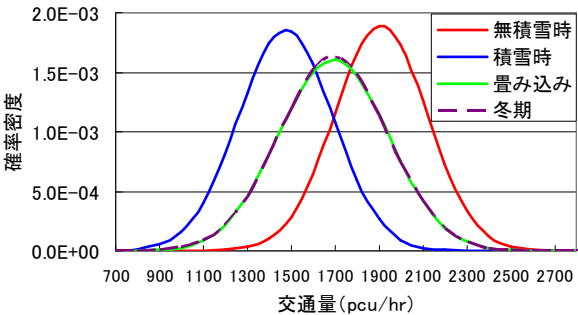


図-3 推計された確率的交通容量

(2) 確率的交通容量が移動時間に与える影響

ここでは、確率的交通容量が道路ネットワーク上の移動時間に与える影響を調べるため、札幌市における主要幹線道路を参考に作成したテストネットワーク(図-4)を対象に、数値実験を行った結果を示す。数値実験は、夏期と冬期の確率的交通容量を想定して行なった。本研究で適用する交通量配分モデルは、内田¹⁾により提案されているモデルのうち、交通容量の確率変動のみを反映したものである。この配分モデルでは、交通容量が確率変数として表現されるため、得られる移動時間も確率変数として表現されることになる。また、通常の利用者均衡配分と等価な問題構造を持つため、この配分モデルは、大規模なネットワークにも適用可能である。夏期の各リンクの自由移動時間は、実際のリンク長および法定速度を用いて算出した値を用いた。一方、各リンクの平均交通容量は、一律片側 12,000 (pcu/day) として与えた。また、冬期の平均交通容量は、無積雪時と冬期の平均交通容量から冬期の低減率を求め、夏期の平均交通容量を補正したものを用いた。確率的交通容量の分散に関しては、冬期と表-1 に示した無積雪時の確率的交通容量の変動係数の関係から設定した。リンク間の確率的交通容量の相関については、夏期、冬期ともに 0.5 と仮定した。以上をまとめたものを表-2 に示す。ここで、BPR 関数のパラメータは、交通量と速度の関係から推計したが、その方法は紙面の制約から割愛する。OD 交通量は、OD ペアの組 (1, 54), (5, 52), (8, 50), (33, 39) に対して、それぞれ双方向に 30,000 (pcu/day) として与えた。

図-5, 6 は、それぞれ夏期および冬期における各 OD ペア間のある経路に関する確率的移動時間の平均と標準偏差を示している。これらの図から、冬期の移動時間は、夏期のものと比較した場合、平均だけではなく標準偏差も大きくなり、移動時間に関する不確実性も高まることが示された。また、図-7 は、夏期と冬期の確率的総移動時間が正規分布に従うと仮定して描いた分布である。この図からも、冬期には、不確実性が增大することが改めて示された。

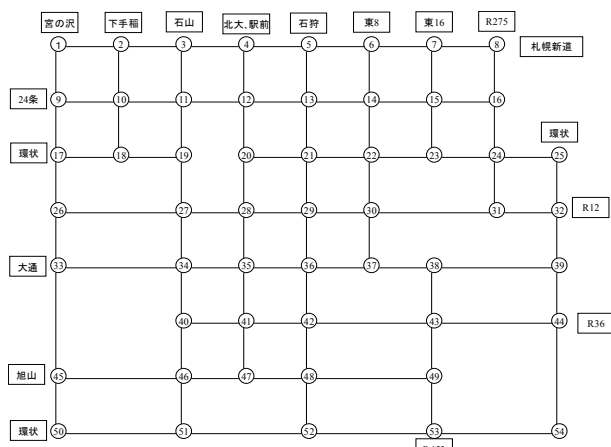


図-4 テストネットワーク

表-2 条件設定

	交通容量		BPR 関数		
	平均	変動係数	γ	λ	$\hat{v}_f$ (km/hr)
夏期	12,000	0.11	0.6	2.0	69.6
冬期	10,700	0.14	0.7	1.5	57.0

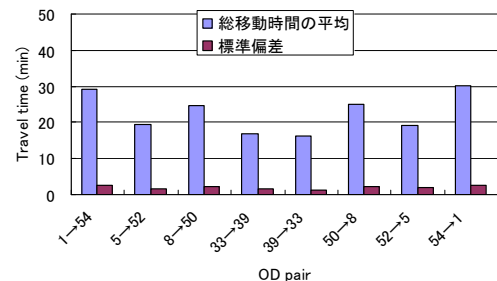


図-5 OD ペア間の移動時間の平均と標準偏差 (夏期)

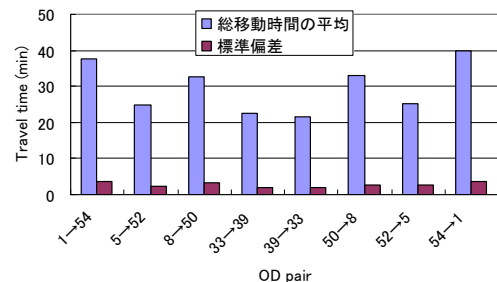


図-6 OD ペア間の移動時間の平均と標準偏差 (冬期)

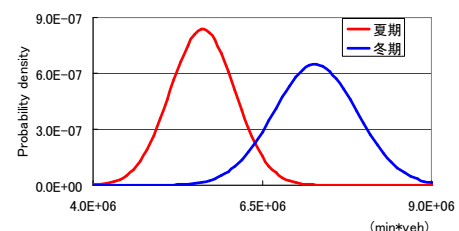


図-7 総移動時間の分布

6. まとめ

本研究では、マクロ交通流モデルを適用した確率的交通容量の推計法を示した。さらに、確率的交通容量が道路ネットワーク上の移動時間に与える影響を定量的に示した。移動時間信頼性評価の重要性は、近年、世界的に高まりつつあり、確率的交通容量からのアプローチは、ネットワークモデルでの取り扱いの容易性から、実規模の道路ネットワークを対象とした評価も可能である¹⁾。

参考文献

- 1) 内田賢悦：需要・供給・認知の確率変動を反映した利用者均衡配分，土木学会論文集投稿中。