時間帯別交通均衡配分の効率的解法 － 多起点・多終点の場合*

Some Efficient Algorithms for Semi-dynamic Traffic Equilibrium Assignment with Queue Evolution - Many-to-Many O-D Pair Case*

吉相俊**・赤松隆***・井上紳一****・和田健太郎**
By Sangjoon KIL**・Takashi AKAMATSU***・Shinichi INOUE****・Kentaro WADA**

1．はじめに

道路網の計画や近年盛んに行われているTDM施策において，ピーク時の交通状態の予測は不可欠である．しかしながら，従来の静的配分では渋滞状態を表現することができない. 一方, 渋滞状態を表現できる動的配分は, 時々刻々のOD交通量データの入手が困難である．

これらの問題点に対し，近年，渋滞を明示的に表現でき，かつ，モデルの入力データが入手可能な時間帯別交通均衡配分モデルが，菊池・赤松モデル[1)]，中山モデル[2)]により提案された．菊地・赤松モデルは，構築したモデルが一般形の非線形相補性問題（NCP：Nonlinear Complementarity Problem）に帰着可能であることを示した．NCPについては，これまでに数理計画分野で多くの標準的なアルゴリズムが提案されているため，効率的な解法の開発が期待できる．また，DP原理が成立しているため，問題を時間帯毎に分割し解くことが可能である．一方，中山モデルは，解の一意性が保証されるという利点がある．しかし，DP原理が成立しないため，全時間帯を同時に計算しなければならない.

そこで，吉ら[3)]は，菊地・赤松モデルを対象とした，効率的解法を開発した．ただし，この研究では，単一の起点または終点を持つsingle-commodityフローのみを対象としており, 多起点・多終点を持つ multi-commodityフローについては開発されていない．しかし，現実のネットワークへの適用を考えると，multi-commodityフローの解法の開発は必須である.

以上より，本研究の目的は，吉ら[3)]の研究を一般化し，multi-commodityフローの場合の時間帯別交通均衡配分問題の効率的解法を開発することである. 提示する解法は, 1）厳密解への収束の保証ができ，2）大規模ネットワークに適用できるという特徴を持つ．具体的には，1）については，NCPに対し，適切な条件の下で収束が保証できる従来の枠組，Smoothing Newton Methodを利用する．2）については，解くべき連立方程式が，a）疎行列であること，b）その係数行列の構造を活かし，問題を未知変数ごとに分解することで，記憶容量・計算量を減らす.

本論文は4つの章から構成されている．第2章では，本研究が対象とする時間帯別交通均衡配分について概説する．第3章では，まず，NCPに対し収束が保証できる従来の枠組について説明する．次に，一般的な枠組を本モデルへ適用し，計算を効率的にするための工夫を示す．最後に第4章で本論文をまとめる.

2．時間帯別交通均衡配分モデルの定式化

本研究で対象とするモデルは，基本的に菊地・赤松[1)]に示されたものと同一である（詳細は菊地・赤松[1)]を参照）．唯一違う点は，本研究では，利用者の経路選択均衡条件が確率的な場合を新たに追加したことである．これは，菊地・赤松モデルでは，経路選択均衡条件が確定的な場合，multi-commodityフローに対して解の一意性が保証できないためである．以下では菊地・赤松[1)] に沿ってモデルの定式化を簡潔に示す.

（1）モデルの状況設定

道路網はノード集合 N とそれらを結ぶ有向リンク集合 L からなるネットワークによって表現されるものとする．各ノードは整数の連番によって区別され，各リンクは，ノード i からノード j へ向かっている場合 (i, j) と表される．また，各リンクは，リンク上流の非渋滞領域を表す“走行リンク”，下流端での待ち行列によって生じる渋滞領域を表す“待ち行列リンク”の二つのサブリンクで構成されると考える.

本モデルでは，時間の流れをある一定の長さ T を持つ時間帯ごとに分割し，離散的に考える．ただし，1時間帯の長さはいずれのリンクのリンク旅行時間よりも長いものと仮定する．このとき，状態変化は時間帯間のみで起こり，時間帯内では定常状態にあるとみなす．これにより，ある時間帯で捌け残った待ち行列は次の時間帯へ繰越され，次の時間帯での交通状態へ影響を及ぼすことになる.

---

*キーワーズ：交通配分，時間帯別配分，NCP，アルゴリズム
**学生員，東北大学大学院　情報科学研究科
（仙台市青葉区荒巻青葉6-6，TEL022-795-7507，FAX022-795-7505）
***正員，工博，東北大学大学院教授　情報科学研究科
****正員，工修，計量計画研究所　交通まちづくり研究室
（新宿区市ヶ谷本村町2-9，TEL03-3268-9911，FAX03-5229-8081）

（2）定式化

時間帯別交通均衡配分モデルでは，以下に示す6つの条件が同時に成立する．

a）各リンクでの待ち行列進展条件

リンク(i, j)の終点dに向かう時間帯tでの流入台数を$\lambda_{ij}^d(t)$，流出台数を$\mu_{ij}^d(t)$，待ち行列台数を$x_{ij}^d(t)$とすれば，リンクでの時間帯を追った車両台数の保存則を表す条件は，次のように表せる．

$$x_{ij}^d(t) = x_{ij}^d(t-1) + \lambda_{ij}^d(t) - \mu_{ij}^d(t) \quad \forall (i,j), d \qquad (2.1)$$

ここで，リンク(i, j)の時間帯tでの流入台数を$\lambda_{ij}(t)$，流出台数を$\mu_{ij}(t)$，待ち行列台数を$x_{ij}(t)$と定義すれば，次の関係を満たす：

$$\lambda_{ij}(t) = \sum_d \lambda_{ij}^d(t) \qquad (2.2a)$$

$$\mu_{ij}(t) = \sum_d \mu_{ij}^d(t) \qquad (2.2b)$$

$$x_{ij}(t) = \sum_d x_{ij}^d(t) \qquad (2.2c)$$

即ち，式(1)は，終点別に足し合わせることにより，

$$x_{ij}(t) = x_{ij}(t-1) + \lambda_{ij}(t) - \mu_{ij}(t) \quad \forall (i,j) \qquad (2.3)$$

と書ける．

b）各リンクの容量制約条件

リンク(i, j)のサービス率には, 物理的特性から決まる上限(i.e., 最大流出率：μ_{ij}^*)があると考える. このとき，時間帯tにおいて，待ち行列が存在する場合では流出台数は最大流出率となり, そうでない場合には, 時間帯tの流入台数$\lambda_{ij}(t)$と時間帯$t-1$の待ち行列台数$x_{ij}(t-1)$の和に等しくなる．即ち，次の条件を満たす．

$$\begin{cases} \mu_{ij}(t) = \mu_{ij}^* & if \quad x_{ij}(t) > 0 \\ \mu_{ij}(t) \le \mu_{ij}^* & if \quad x_{ij}(t) = 0 \end{cases} \quad \forall (i,j) \qquad (2.4)$$

ただし，待ち行列が存在するか否かはリンクの全流出台数$\mu_{ij}(t)$によって決まり，終点別に独立ではない．

c）各ノードでのフロー保存則

ネットワーク上の各ノードでは，流入台数と流出台数が等しくなる必要がある．よって，各ノードにおけるフロー保存則は次のように表される．

$$\sum_{i \in I(k)} \mu_{ik}^d(t) - \sum_{j \in O(k)} \lambda_{kj}^d(t) + q_k^d(t) = 0 \quad \forall k \ne d, \forall d \qquad (2.5)$$

ただし，$q_k^d(t)$は, 時間帯tに起点kを出発して終点dに向かうOD交通量である．また，$I(k)$はノードkへ流入するリンクの上流側ノードの集合，$O(k)$はノードkから流出するリンクの下流側ノードの集合である．

d）リンク旅行時間とフロー及び待ち行列の関係

リンク(i, j)の旅行時間$c_{ij}(t)$は，走行リンクで費やす時間$m_{ij}(t)$と待ち行列リンクにおける渋滞待ち時間の和として次のように表される．

$$c_{ij}(t) = m_{ij}(\lambda_{ij}(t)) + x_{ij}(t) / \mu_{ij}^* \qquad (2.6)$$

$$m_{ij}(\lambda_{ij}(t)) = m_0 \left\{ 1 + a\left(\lambda_{ij}(t)/\mu_{ij}^*\right)^b \right\} \qquad (2.7)$$

ここで，m_0はリンク固有の値であり，$m_{ij}(t)$はBPR関数で表されるとする．

e）利用者の経路選択均衡条件

利用者の経路選択が確率的である場合を考える．このとき，（リンク・ベースの）利用者のロジット選択は次式で与えられる（導出は，Akamatsu[4]を参照）．

$$c_{ij}(t) + p_{jd}^\theta - p_{id}^\theta + \frac{1}{\theta} \ln \frac{\lambda_{ij}^d(t)}{\sum_k \lambda_{ik}^d(t)} = 0 \qquad (2.8)$$

ここで，θはロジット・パラメーターであり，p_{id}^θはノードiから終点dまでの期待最小経路所要時間である．上記の式(2.8)は，ロジット・パラメーターθが$\theta \to \infty$の時，菊地・赤松[1]で示された経路選択条件に一致する．

f）First-In-First-Out(FIFO)条件

追越しがない状況を仮定すれば，リンクでの車両の到着順序と退去順序は等しくなければならない．このFirst-In-First-Out(FIFO)条件は，多起点・1終点の場合では，待ち行列進展条件(2.1)と容量制約条件(2.4)によって自動的に満たされる（詳細は菊地・赤松[1]を参照）．しかし，多起点・多終点の場合では式(2.1)，(2.4)に加えて終点別のFIFO条件を明示的に表す条件が必要となる. このFIFO条件は，動的配分では連続時間tについて次のように表される．

$$\frac{\lambda_{ij}^d(t)}{\lambda_{ij}(t)} = \frac{\mu_{ij}^d(t + c_{ij}(t))}{\mu_{ij}(t + c_{ij}(t))} \quad \forall (i,j), d \qquad (2.9)$$

ただし，時間帯別配分では時間帯内での流入時刻・流出時刻の関係を明示的に表現できないため，式(2.9)を時間帯別配分にそのまま適用することはできない. そこで, 2時間帯以上にまたがる待ち行列は存在しないという仮定を導入すると，式(2.1)のもとでFIFO条件に対応する式が次のように得られる．

$$x_{ij}^d(t) = x_{ij}(t) \cdot \delta_{ij}^d(t) \quad \forall (i,j), d \qquad (2.10)$$

ただし，$\delta_{ij}^d(t)$は次式で定義される．

$$\delta_{ij}^d(t) \equiv \begin{cases} \dfrac{\lambda_{ij}^d(t)}{\lambda_{ij}(t)} & if \quad \lambda_{ij}(t) > 0 \\ 0 & if \quad \lambda_{ij}(t) = 0 \end{cases} \qquad (2.11)$$

これは，待ち行列を経験する車両の割合が終点別に等しくならなければならないことを意味している．

（3）非線形相補性問題としての表現

以上で定式化されたモデルは，時間帯$t-1$に関する変数が決まれば，時間帯tのみを未知変数とした問題として考えられる．即ち，前向きDP原理が成立している．このことを利用すれば，時間帯$t-1$に関する変数を所与とした以上の定式化は，次に示すNCPと等価である（詳細は菊地・赤松[1]を参照）．

[NCP] Find $\mathbf{Y} \in \mathbf{\Omega}$ such that

$$\mathbf{Y} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{Y}) = 0,\ \mathbf{Y} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{F}(\mathbf{Y}) \geq \mathbf{0} \tag{2.12}$$

ここで,

$$\mathbf{\Omega} = R_+^{|L|} \times R_+^{|L|\times|D|} \times R_+^{|N|\times|D|},\quad \mathbf{Y} = [\mathbf{x} \quad \boldsymbol{\lambda} \quad \mathbf{p}]^T,$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{\Lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{M}^{-1} & \mathbf{0} & -\hat{\mathbf{A}}^T \\ -\hat{\mathbf{A}}_{-} \boldsymbol{\delta} \mathbf{\Lambda}^T & \hat{\mathbf{A}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\mu}} \\ \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{m} + \mathbf{\Pi} \\ -\mathbf{r} \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

である．$\mathbf{A}$はリンク・ノード接続行列であり，$\mathbf{A}_+$（$\mathbf{A}_-$）はリンク・ノード接続行列において-1 (1) 要素を0に置き換えた行列である．また，$\mathbf{M}$は対角要素にμ_{ij}^*を持つ$|L|\times|L|$次対角行列であり，$\mathbf{\Lambda} \equiv [\ldots, \mathbf{I}, \ldots]$，$\hat{\mathbf{A}} \equiv diag[\mathbf{A}]$である．$\bar{\boldsymbol{\mu}}$，$\mathbf{\Pi}$，$\mathbf{r}$は，各々,

$$\bar{\mu}_{ij} \equiv \mu_{ij}^* - x_{ij}(t-1) \tag{2.14}$$

$$r_k^d \equiv \sum_{i\in I(k)} x_{ij}^d (t-1) + q_k^d \tag{2.15}$$

$$\pi_{ij}^d \equiv \frac{1}{\theta} \ln \frac{\lambda_{ij}^d(t)}{\sum_k \lambda_{ik}^d(t)} \tag{2.16}$$

と定義される要素を持つベクトルである. さらに, $\boldsymbol{\delta}$は, $\boldsymbol{\lambda}$に関する関数であることに注意が必要である．これにより，モデルの数学的構造を明らかにするのが容易になり，また，効率的なアルゴリズムの開発が可能となる.

3．時間帯別交通均衡配分の効率的解法の提案

本研究で提示する解法は，NCPに対し，適切な条件の下では，収束が保証される枠組に基づいている．具体的には，収束が非常に速い（二次収束）Newton法系統の枠組を活用する．この枠組は，大きく2つに分類できる．第1は，微分不可能な関数を，劣勾配を活用し解こうとするInexact Newton Methodと呼ばれる一群の枠組である．第2は，微分不可能な関数を微分可能な関数に近似し，本来解くべき問題を間接的に解くSmoothing Newton Methodと呼ばれる一群の枠組である．本研究では，本モデルを解くときに，後者の方がよりロバストであるという吉ら[3]の数値実験結果により，後者のみを対象とする.

（1）一般的なアルゴリズム

本研究では，Smoothing Newton Methodの枠組の中で，Qi and Liao[5]を採用する．この枠組の解法には，smoothing parameterを外生変数として扱うものと，内生変数として扱うものがある. 前者の解法は, 収束の保証ができない. 一方，Qi and Liao[5]を含む後者の解法は，収束が保証できる特徴を持つ.

この解法の基本的な考え方を説明する．まず，以下の一般的なNCP：

$$\mathbf{Y} \geq 0,\ \mathbf{F}(\mathbf{Y}) \geq 0,\ \mathbf{Y}^T \mathbf{F}(\mathbf{Y}) = 0 \tag{3.1}$$

は，Merit関数：

$$\Psi(\mathbf{Y}) := \frac{1}{2} \| \mathbf{\Phi}(\mathbf{Y}) \|^2 \tag{3.2}$$

を定義することによって，以下の等価な最適化問題に帰着する.

$$\min_{\mathbf{Y}} \Psi(\mathbf{Y}) \tag{3.3}$$

ここで，$\mathbf{\Phi}(\mathbf{Y})$は,

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{Y}) := \begin{bmatrix} \phi(y_1, F_1(\mathbf{Y})) \\ \vdots \\ \phi(y_n, F_n(\mathbf{Y})) \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

であり，$\phi(y, F)$は,

$$\phi(y, F) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \geq 0, F \geq 0, y \cdot F = 0 \tag{3.5}$$

を満たす任意の関数であるが，以下では Fischer-Burmeister関数：

$$\phi(y, F) := \sqrt{y^2 + F^2} - y - F \tag{3.6}$$

を用いることとする．次に，smoothing parameter ωが含まれたsmoothing関数：

$$\phi_\omega(y, F) := \sqrt{\omega^2 + y^2 + F^2} - y - F \tag{3.7}$$

を用い，全区間で微分可能な問題に近似させる（以下, 添字ωを添えている関数は，式(3.6)を式(3.7)に置き換えた関数）．近似させたときの最適化問題は，smoothing parameter ωを極限$\omega \to 0$とすることで元の最適化問題に一致する：

$$\lim_{\omega\to 0} \left(\min_{\mathbf{Y}} \Psi_\omega(\mathbf{Y}) \right) = \min_{\mathbf{Y}} \Psi(\mathbf{Y}) \tag{3.8}$$

smoothing parameter ωは未知変数$\mathbf{Y}$を同時に未知変数として扱う．そこで，smoothing parameter ωを含む，新しい未知変数ベクトル：

$$\mathbf{z} := (\omega, \mathbf{Y}) \tag{3.9}$$

および新しい関数：

$$\mathbf{H}(\mathbf{z}) = \mathbf{H}(\omega, \mathbf{Y}) := \begin{bmatrix} e^\omega - 1 \\ \mathbf{\Phi}_\omega(\mathbf{Y}) \end{bmatrix} = 0, \quad \omega > 0 \tag{3.10}$$

を定義すると，解くべき問題は,

$$\min_{\mathbf{z}} \tilde{\Psi}(\mathbf{z}) \tag{3.11}$$

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{z}) := \frac{1}{2}\|\mathbf{H}(\mathbf{z})\|^2 \tag{3.12}$$

となる．これをNewton法を用いて解く場合，解の改訂ベクトル$\Delta\mathbf{z}$はNewton方程式：

$$\left(\nabla^2\tilde{\Psi}\right)\cdot\Delta\mathbf{z} = -\nabla\tilde{\Psi} \tag{3.13}$$

を解くことによって求められる．ここで$\tilde{\Psi}$が平方和の形になっていることを利用すると，$\tilde{\Psi}$の勾配ベクトルとヘッセ行列はそれぞれ,

$$\nabla\tilde{\Psi} = (\nabla\mathbf{H})^T\cdot\mathbf{H} \tag{3.14}$$

$$\nabla^2\tilde{\Psi} = (\nabla\mathbf{H})^T\cdot(\nabla\mathbf{H}) + \sum H_i\cdot\nabla^2 H_i \tag{3.15}$$

となる. 最適解が0となる問題ではヘッセ行列の第二項を無視しても収束が保証される（Gauss-Newton法）ので，Newton方程式は,

$$(\nabla\mathbf{H})^T\cdot(\nabla\mathbf{H})\cdot\Delta\mathbf{z} = -(\nabla\mathbf{H})^T\cdot\mathbf{H} \tag{3.16}$$

と書き直せる．もしも$\nabla\mathbf{H}$が正則であれば，改訂ベクトル$\Delta\mathbf{z}$を求めるための方程式は更に,

$$(\nabla\mathbf{H})\cdot\Delta\mathbf{z} = -\mathbf{H} \tag{3.17}$$

と書き直せる．もしも$\nabla\mathbf{H}$が正則でない場合には，式(3.17)も解を持たないので，まず式(3.17)を解いてみて，解けない場合には代りに最急降下方向を改訂ベクトル$\Delta\mathbf{z}$に採用すればよい.

以下に，このアルゴリズムをstep形式で，簡単にまとめる.

Step0.（初期値の設定）

解法内のパラメーターの設定，$\mathbf{z}^0 := (\omega_0, \mathbf{x}^0)$，$k := 0$.

Step1.（収束判定）

収束条件を満たせば終了.

Step2.（Newton step）

式(3.11)により，$\Delta\mathbf{z}^k \in \mathbf{R}^{n+1}$を求める.

$$\nabla\mathbf{H}(\mathbf{z}^k)\cdot\Delta\mathbf{z}^k = -\mathbf{H}(\mathbf{z}^k) \tag{3.18}$$

Step sizeの探索を行う.

Step3.（Gradient step）

式(3.11)が解けないか，Step sizeが小さすぎる場合,

$$\Delta\mathbf{z}^k := -\nabla\tilde{\Psi}(\mathbf{z}^k). \tag{3.19}$$

Step sizeの探索を行う.

Step4.（解の更新）

解およびSmoothing parameter ω_kを更新し,

$k := k+1$とし，Step1へ.

（２）時間帯別交通均衡配分への適用

上記の解法を本モデルに適用する際に工夫が必要になるのは，解の改訂ベクトルを求めるために解くべき連立方程式(3.18)である．具体的には，現実的なネットワークにおいては，未知変数及び連立方程式(3.18)でのJacobian $\nabla\mathbf{H}(\mathbf{z}^k)$の要素数が，各々，$10^4$～$10^7$，$(10^4)^2$～$(10^7)^2$のオーダーの問題になる. そのため，記憶容量，計算量の面で計算不可能であると言える．そのため，ここでは，まず，本モデルに適用した際の連立方程式(3.18)を示し，（３）では，この連立方程式を効率的に解くための工夫を示す.

本モデルに上記の枠組を適用した際の連立方程式(3.18)は，以下のように表わされる：

$$\begin{bmatrix} e^{\omega} & \mathbf{0} \\ \mathbf{c} & \mathbf{D}+\mathbf{E}\nabla\mathbf{F}(\mathbf{Y}^k) \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\omega \\ \Delta\mathbf{x} \\ \Delta\boldsymbol{\lambda} \\ \Delta\mathbf{p}\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} e^{\omega}-1 \\ \boldsymbol{\Phi}_{\omega}(\mathbf{Y}_1^k) \\ \boldsymbol{\Phi}_{\omega}(\mathbf{Y}_2^k) \\ \boldsymbol{\Phi}_{\omega}(\mathbf{Y}_3^k)\end{bmatrix}. \tag{3.20}$$

ここで，列ベクトル$\mathbf{c} = [\mathbf{c}_1 \ \ \mathbf{c}_2 \ \ \mathbf{c}_3]$，ブロック対角行列$\mathbf{D} = diag[\mathbf{D}_1 \ \ \mathbf{D}_2 \ \ \mathbf{D}_3]$，$\mathbf{E} = diag[\mathbf{E}_1 \ \ \mathbf{E}_2 \ \ \mathbf{E}_3]$であり,

$$(\mathbf{c}_i)_j = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \left(\mathbf{Y}_i^k\right)_j^2 + \left(\mathbf{F}_i(\mathbf{Y}^k)\right)_j^2}} \quad \forall j \tag{3.21}$$

$$\mathbf{D}_i = \frac{1}{\omega}diag(\mathbf{Y}_i^k)diag(\mathbf{c}_i) - \mathbf{I} \tag{3.22}$$

$$\mathbf{E}_i = \frac{1}{\omega}diag(\mathbf{F}_i(\mathbf{Y}^k))diag(\mathbf{c}_i) - \mathbf{I} \tag{3.23}$$

である．ここで，添え字 $i(=1,2,3)$は，各々，$\mathbf{x}^k$，$\boldsymbol{\lambda}^k$，$\mathbf{p}^k$に対応している. また, 連立方程式(3.13)は, smoothing parameterと未知変数に分解できる：

$$\Delta\omega = (1-e^{\omega})/e^{\omega} \tag{3.24}$$

$$\left[\mathbf{D}+\mathbf{E}\nabla\mathbf{F}(\mathbf{Y}^k)\right]\begin{bmatrix}\Delta\mathbf{x} \\ \Delta\boldsymbol{\lambda} \\ \Delta\mathbf{p}\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3\end{bmatrix}. \tag{3.25}$$

ここで，$\mathbf{P}_i$は,

$$\mathbf{P}_i = \boldsymbol{\Phi}_{\omega}(\mathbf{Y}_i^k) + \mathbf{c}_i\Delta\omega \quad i = 1,2,3 \tag{3.26}$$

と与えられる.

上記の連立方程式(3.25)の係数行列は，一見，複雑にみえるが，実は，疎行列で構成されている．具体的には，係数行列は, リンク・ノード接続行列$\mathbf{A}$, リンク容量$\mathbf{M}$（対角行列），及び，式(3.22)，(3.23)，$\nabla\mathbf{F}(\mathbf{Y}^k)$の疎行列で構成される．ここで，$\nabla\mathbf{F}(\mathbf{Y}^k)$を具体的に書くと,

$$\nabla \mathbf{F}(\mathbf{Y}^k)=\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{\Lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{\Lambda}^T\mathbf{M}^{-1} & \mathbf{G}_1 & -\hat{\mathbf{A}}^T \\ \mathbf{G}_2 & \hat{\mathbf{A}}-\mathbf{G}_3 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

である．ここで，まず，$\mathbf{G}_1$ は対角要素に，

$$\begin{aligned}(\mathbf{G}_1)_{nn} &= abm_0\left(\lambda_{ij}^k \big/ \mu^*\right)^{b-1} \\ &+\frac{1}{\theta}\left(1\big/\lambda_{ij}^{d\,k}-1\big/\lambda_{ij}^k\right)\end{aligned} \tag{3.28}$$

を持つ対角行列である．ここで，n は，$\lambda_{ij}^{d\,k}$ を要素に持つベクトル$\boldsymbol{\lambda}^k$ のn 番目要素に対応する．次に，$\mathbf{G}_2$，$\mathbf{G}_3$ は，

$$\mathbf{G}_2=\left[\mathbf{G}_2^{d_1} \ldots \mathbf{G}_2^{d_n}\right]^T \tag{3.29}$$

$$\mathbf{G}_3=\begin{bmatrix} \mathbf{G}_3^{d_1d_1} & \cdots & \mathbf{G}_3^{d_1d_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{G}_3^{d_nd_1} & \cdots & \mathbf{G}_3^{d_nd_n} \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

のようなブロック行列であり，各々のブロックの要素は，

$$(\mathbf{G}_2^{d_a})_{mn}=\begin{cases} \delta(\lambda_{ij}^{d\,k}) \\ \quad \textit{if there existes a link } i\to j \textit{ and } m=j \cdot \\ 0 \qquad\qquad \textit{otherwise} \end{cases} \tag{3.31}$$

$$(\mathbf{G}_3^{d_ad_b})_{mn}=\begin{cases} \dfrac{x_{ij}}{\lambda_{ij}^{\ k}}\left\{1-\delta(\lambda_{ij}^{d\,k})\right\} \\ \quad \textit{if there existes a link } i\to j \\ \quad\quad \textit{and } d_a=d_b \textit{ and } m=j \\ \dfrac{x_{ij}}{\lambda_{ij}^{\ k}}\left\{-\delta(\lambda_{ij}^{d\,k})\right\}x_{ij} \\ \quad \textit{if there existes a link } i\to j \\ \quad\quad \textit{and } d_a\neq d_b \textit{ and } m=j \\ 0 \qquad\qquad \textit{otherwise} \end{cases} \tag{3.32}$$

と与えられる．ただし，d_a は，終点番号を表し，δ は，

$$\delta(\lambda_{ij}^{d\,k})\equiv\begin{cases} \lambda_{ij}^{d\,k}\big/\lambda_{ij}^{\ k} & \textit{if} \quad \lambda_{ij}^{\ k}(t)>0 \\ 0 & \textit{if} \quad \lambda_{ij}^{\ k}(t)=0 \end{cases} \tag{3.33}$$

と定義する．

以上により，連立方程式(3.25)の係数行列が疎行列であることが確認できた．しかし，疎行列であることを利用しても，大規模な問題を解くには無理がある．そのため，本研究では，次節で示すような工夫をする．ただし，以下に示す方法は，連立方程式(3.25)の係数行列の対角成分が，全てゼロでない場合に限ることに注意する．

（３）記憶容量・計算量の節約

本研究では，連立方程式(3.25)を効率的に解くために，係数行列の対角要素に注目した．この対角要素は，式(3.22)，(3.23)，及び，(3.27)で構成されている．即ち，連立方程式(3.25)の係数行列の対角要素は，各々，対角行列になっていることが分かる．このことに着目し，連立方程式(3.25)の1行目，3行目を利用し，2行目の$\Delta\mathbf{x}$，$\Delta\mathbf{p}$ についての要素を消去する：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_1+\mathbf{E}_1 & -\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_2\mathbf{E}_1 & (\hat{\mathbf{A}}-\mathbf{G}_3)\mathbf{E}_2 & \mathbf{D}_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta\mathbf{x} \\ \Delta\boldsymbol{\lambda} \\ \Delta\mathbf{p} \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{P}_3 \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

ここで，$\mathbf{Q}_1$ と$\mathbf{Q}_2$ は，

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_1 &= (\mathbf{D}_2+\mathbf{G}_1\mathbf{E}_2)+\hat{\mathbf{A}}^T\mathbf{E}_3(\mathbf{D}_3)^{-1}(\hat{\mathbf{A}}-\mathbf{G}_3)\mathbf{E}_2 \\ &\quad -\mathbf{R}(\mathbf{D}_1+\mathbf{E}_1)^{-1}(-\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}_2)\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\mathbf{Q}_2=\mathbf{P}_2+\hat{\mathbf{A}}^T\mathbf{E}_3(\mathbf{D}_3)^{-1}\mathbf{P}_3-\mathbf{R}(\mathbf{D}_1+\mathbf{E}_1)^{-1}\mathbf{P}_1 \tag{3.36}$$

から求められる．ただし，

$$\mathbf{R}=\mathbf{\Lambda}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{E}_1+\hat{\mathbf{A}}^T\mathbf{E}_3(\mathbf{D}_3)^{-1}\mathbf{G}_2\mathbf{E}_1 \tag{3.37}$$

以上から，連立方程式(3.18)の解は，$\Delta\boldsymbol{\lambda}\to\Delta\mathbf{x}\to\Delta\mathbf{p}$ の順番で，逐次的に求めることができる．具体的には，以下のそれぞれの連立方程式：

$$\mathbf{Q}_1\Delta\boldsymbol{\lambda}=-\mathbf{Q}_2 \tag{3.38}$$

$$(\mathbf{D}_1+\mathbf{E}_1)\Delta\mathbf{x}=-\mathbf{P}_1+\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}_2\Delta\boldsymbol{\lambda} \tag{3.39}$$

$$\mathbf{D}_3\Delta\mathbf{p}=-\mathbf{P}_3-\mathbf{G}_2\mathbf{E}_1\Delta\mathbf{x}-(\hat{\mathbf{A}}-\mathbf{G}_3)\mathbf{E}_2\Delta\boldsymbol{\lambda} \tag{3.40}$$

を解けば良い．以上により，連立方程式(3.25)を未知変数ごとに分解することができた．

次に，連立方程式(3.38)～(3.40)を解く場合が，連立方程式(3.25)をそのまま解く場合に比べ，どのくらい計算量・記憶容量の節約ができたか考える．まず，リンク数L，ノード数N，終点数D とすると，連立方程式(3.25)の未知変数のオーダーは，$(L+LD+ND)$ となる．即ち，連立方程式の係数行列のオーダーは，この二乗となる．一方，連立方程式(3.38)～(3.40)の係数行列のオーダーは，各々，$(LD)^2$，L^2，$(ND)^2$ となる．具体的に考えると，まず，連立方程式(3.39)，(3.40)は，係数行列が対角行列であるため，簡単に解くことができる．次に，式(3.38)については，係数行列である式(3.35)がかなり複雑にみえる．しかし，実際には，対角とリンク・ノード接続行列$\mathbf{A}$ の非ゼロ要素がある個所のみに非ゼロ要素がある，疎行列である．以上から，未知変数ごとに分解した連立方程式(3.38)～(3.40)を順次に解くことは，連立方程式(3.25)を直接解くときに比べ，記憶容量・計算量が節約できたと言える．

（4）Cyclic Decompositionを利用した解法

現実的なネットワークにおける多起点・多終点の問題を解く場合，未知変数の数は10^4～10^7のオーダーに達する．記憶容量については前節で示した方法により大幅な制約が可能であるが，このように多くの未知変数を持つ連立方程式を解くには膨大な計算時間を要する可能性がある．

そこで，cyclic decomposition（Gauss-Siedel分解）の考え方を利用して，解くべき問題を終点別に分解して順次解いてゆく方法が考えられる．すなわち，未知変数ベクトル全体のうち或る一つの終点に関する未知変数のみに着目し,他の未知変数については固定することによって，着目した終点に関してのみ解の更新を行い，次に別の終点に関してのみ解の更新を行うことを，順次繰り返す方法である．

問題を終点別に分解することにより，計算のステップは増加するものの，各回で解くべき連立方程式の未知変数の数は10^2～10^4のオーダーに抑えることができるため，トータルでは計算時間の削減が期待できる．

ただし，問題を終点別に分解すると，式(3.16)におけるJacobian $\nabla\mathbf{H}$が正方ではない（したがって正則でもない）ため，式(3.17)のように変形することができなくなり，式(3.16)をそのまま解く必要が生じる．したがって，前節で示した方法による記憶容量と計算量の節約が利用できないというデメリットも持っている．

このように問題を終点別に分解して解く場合と，前節までで示したように終点別に分解しないで解く場合については，数値実験による比較の結果を発表時に報告する予定である．

4．おわりに

本研究では，大規模問題に対しても適用可能な，時間帯別交通均衡配分の効率的解法を提示した．より具体的には，本モデルがNCPとして表現可能であることに着目し，NCPに対し収束が保証された枠組であるSmoothing Newton Methodを活用した．また，この枠組を本モデルに適用する際に，大規模な問題に対して適用可能にするため，解の改訂ベクトルを求める際の計算を効率的にするため，工夫をした．具体的には，連立方程式の係数行列の対角要素が対角行列であることに着目し，未知変数ごとに分解した．本稿では，紙面の都合により，数値実験結果は載せてないが，発表では，数値実験結果も報告する予定である．

参考文献

1）菊地志郎, 赤松隆：リンクの流入･流出交通量を内生化した時間帯別交通均衡配分に関する基礎的研究, 土木計画学研究・論文集, No.24, pp.577-585, 2006.

2）中山晶一朗：混雑の時空間移動を考慮した準動的配分モデル，土木学会論文集，vol.64, pp.340-353, 2008.

3）吉相俊，赤松隆，菊地志郎，井上紳一，和田健太郎：時間帯別交通均衡配分の効率的解法，土木計画学研究・論文集，投稿中.

4）T.Akamatsu：Decomposition of path choice entropy in general transport networks, Transportation Science, vol. 31, pp.349-362, 1997.

5）H.Qi，L.Liao：A Smoothing Newton method for general nonlinear complementarity problems，Computational Optimization and Applications，vol.17，pp.231-253，2000.