ネットワークにおける利用者交通行動の事後確率分布*

Posterior Probability Distribution of Travel Behavior on Network*

衛翀**・井料隆雅***・朝倉康夫****

By Chong WEI**・Takamasa IRYO***・Yasuo ASAKURA****

1．はじめに

道路ネットワークの交通流は利用者の交通行動の集計と考えられる．効用にランダム項（いわゆるランダム効用）が含まれる場合は，利用者の行動（経路選択）は確率的になる．確率的な行動は経路交通量が日々変動する要因のひとつである．利用者の確率的な行動により変動するネットワーク交通流を既述するモデルは複数提案されている[1)2)3)4)]．ただ，これらの研究には理論上のあるいは実用化の問題が残っている[5)]．

本研究の目的は確率的な利用者行動に基づいて，新しい確率的な交通量配分モデルを提案することにある．このモデルは，個人レベルの交通行動と経路交通量の間の関係性を明示的に示すことによって，確率的な交通行動の視点から交通流変動を把握することを可能としている．モデルのアウトプットは，経路（およびリンク）の交通量と所要時間の確率分布である．

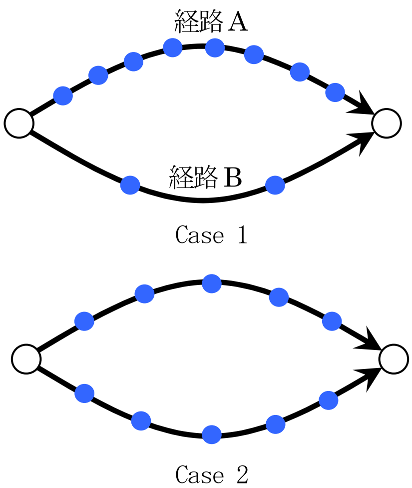

図1　経路利用の例

*キーワーズ：交通行動，ネットワーク配分，ベイス理論

**非会員，工修，神戸大学大学院工学研究科
（兵庫県神戸市灘区六甲台町1-1,
TEL:03-3355-3441、E-mail:doboku@jsce.or.jp）
***会員，工博，神戸大学大学院工学研究科
****会員，工博，神戸大学大学院工学研究科

2．方法論

（1）モデルの概要

まず簡単な例によりモデルの概要を説明する．図1にネットワーク中の●は個々の利用者を表す．Case 1とCase 2のOD交通量は10台でどちらも同じであるが，経路交通量の配分が異なる．経路のコスト関数が同じであれば，Case 1の一部の利用者が経路Aから経路Bにシフトすると移動した利用者の旅行時間を減らすことができるので， OD交通量を固定した場合には，このネットワーク上ではCase 1よりもCase2のような交通流パターンが実現する可能性のほうが高いであろう．ある経路交通量パターンが生じる確率を $P(\mathbf{f})=P(f_{\mathrm{A}},f_{\mathrm{B}})$（$f_{\mathrm{A}}$ ：経路Aの交通量，f_{B} 経路Bの交通量）と書くと，$P(\mathbf{f})=P(f_{\mathrm{A}}=8,f_{\mathrm{B}}=2)$ は $P(\mathbf{f})=P(f_{\mathrm{A}}=5,f_{\mathrm{B}}=5)$ より小さいことになる．

Case 1とCase 2はいずれも確率分布 $P(\mathbf{f})$ から抽出するサンプルと考えることができる．確率分布 $P(\mathbf{f})$ から多くのサンプルを抽出すると，Case 1が抽出される数はCase 2が抽出される数より少なくなるだろう．経路交通量の確率分布 $P(\mathbf{f})$ の形状がわかれば，さまざまなケースごとの交通量とその出現確率から，経路Aと経路Bの交通量の期待値と分散を計算することができる．

（2）経路交通量の確率分布

経路交通量の確率分布の導出を例を用いて説明する．図２で示す例では，経路Aの利用者が１人（利用者ｘ），経路Bの利用者が2人（利用者ｙとｚ）となっている．すべての利用者は以下で示される*Stochastic User Behavior (SUB)* 原則[3)] に従って行動すると仮定する：

A traveler (user) displaying Stochastic User Behavior will select the route which he or she perceives to have minimum cost (or maximum utility). [3)]

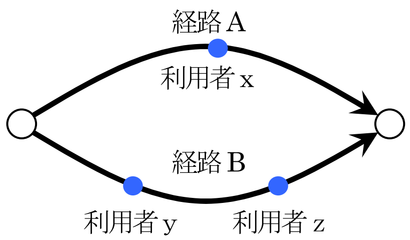

図２　3名の利用者の経路利用状態

ここで，記号s_iを用いて利用者iの状態を表す．$s_i=1$とは利用者iの行動がSUBと一致することを（=最大効用の経路を選択していること）意味するものとする．SUB原則がすべての利用者x, y, zについて成立するとき，経路交通量の確率分布は下記の条件付確率で記述できる．

$$P\left(\mathbf{f} \mid s_i=1\ \forall i\right)=P\left(f_A, f_B \mid s_{\mathrm{x}}=1, s_{\mathrm{y}}=1, s_{\mathrm{z}}=1\right) \tag{1}$$

ただし，$\mathbf{f}=\left[f_A, f_B\right]$は経路交通流ベクトルである．

一方，すべての利用者の経路選択結果（x，y，zがそれぞれ経路A, B, Bを選択）を与件とし，それを条件とした上で$s_i=1$となる条件付確率は下記のように書ける．

$$P\left(s_i=1 \mid c_i\ \forall i\right)=P\left(s_i=1 \mid c_{\mathrm{x}}=\mathrm{A}, c_{\mathrm{y}}=\mathrm{B}, c_{\mathrm{z}}=\mathrm{B}\right) \tag{2}$$

ただし，c_iは利用者iの選択した経路を示す．このときひとりの利用者であるxが$s_{\mathrm{x}}=1$となる確率は次のように記述できる（利用者ｘは経路Aを使っているので）：

$$\begin{aligned} & P\left(s_{\mathrm{x}}=1 \mid c_{\mathrm{x}}=\mathrm{A}, c_{\mathrm{y}}=\mathrm{B}, c_{\mathrm{z}}=\mathrm{B}\right) \\ & =P\left(U_{\mathrm{A}}>U_r\ \forall r \neq \mathrm{A}\right)=P_{\mathrm{A}}(\mathbf{f}) \end{aligned} \tag{3}$$

ただし，U_rは経路rの効用である．

$P_{\mathrm{A}}(\mathbf{f})$は現状の選択結果を前提としたときの経路Aの選択確率である．$P_{\mathrm{A}}(\mathbf{f})$の値は何らかの既存の選択モデルに従って計算することができる．たとえば，MNLモデルの場合は：

$$P_{\mathrm{A}}(\mathbf{f})=\frac{e^{\beta T_{\mathrm{A}}(\mathbf{f})}}{\sum_{\forall r} e^{\beta T_r(\mathbf{f})}} \tag{4}$$

となる．ただし，$T_r(\mathbf{f})$は経路rの旅行時間である．$T_r(\mathbf{f})$は経路交通量$\mathbf{f}$の関数であり，βはMNLモデルのパラメータである．

次に，すべての利用者の経路選択結果を与件としたとき，すべてのiについて$s_i=1$となる確率を考える．この条件付確率は次のように表すことができる：

$$P\left(s_i=1\ \forall i \mid c_i\ \forall i\right)=\prod_{\forall i} P_{c_i}(\mathbf{f}) \tag{5}$$

たとえば，図2で示すケースでは，この条件確率は次のようになる：

$$P\left(s_i=1\ \forall i \mid c_i\ \forall i\right)=P_{\mathrm{A}}(\mathbf{f}) P_{\mathrm{B}}(\mathbf{f}) P_{\mathrm{B}}(\mathbf{f}) \tag{6}$$

交通量配分問題の関心は，個人レベルの選択結果（c_i）ではなく，個人の選択結果の集計である交通量（経路交通量）を求めることである．式(5)の条件付確率に付されている条件は「すべての利用者の経路選択結果」という個人レベルの選択結果である．そこで集計量としての経路交通量を知るため，選択結果c_iの代わりに経路交通流パターン$\mathbf{f}$を条件として，すべてのiについて$s_i=1$となる確率，つまり$P\left(s_i=1\ \forall i \mid \mathbf{f}\right)$を求めることを考える．

まず，個人レベルの選択結果c_iと経路交通流$\mathbf{f}$の関係を考える．明らかに，すべてのiについてc_iを与えると，唯一の経路交通量$\mathbf{f}$を決めることができる．しかし，逆に経路交通量$\mathbf{f}$を与件としただけではc_iを特定できない．図３は経路Aの交通量が１で，経路Bの交通量が２であるとき，生起しうる３つの可能性を示している．同じ経路交通量であっても，どの利用者がどの経路を利用するかに着目すれば，異なる３つのケースが存在する．

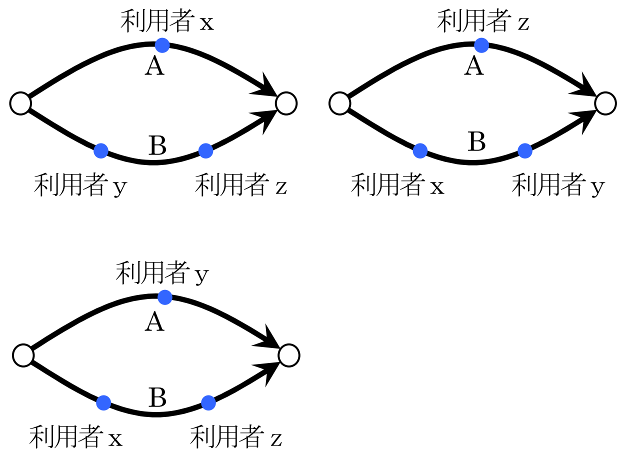

図３　個々の利用者の経路選択

このことを考慮すれば，$P\left(s_i=1\ \forall i \mid \mathbf{f}\right)$は次の式で表せることがわかる：

$$\begin{aligned} P\left(s_i=1\ \forall i \mid \mathbf{f}\right) & =3 P_{\mathrm{A}}(\mathbf{f}) P_{\mathrm{B}}(\mathbf{f}) P_{\mathrm{B}}(\mathbf{f}) \\ & =3 P_{\mathrm{A}}(\mathbf{f})^{f_{\mathrm{A}}} P_{\mathrm{B}}(\mathbf{f})^{f_{\mathrm{B}}} \end{aligned} \tag{7}$$

ただし，$3=3!/1!2!$は図３で示す経路交通量に対して

可能な経路選択結果の数（場合の数）である．これを一般化すれば，$P(s_i = 1\ \forall i \mid \mathbf{f})$ は次の式で表すことができる：

$$P(s_i = 1\ \forall i \mid \mathbf{f}) = \frac{q!}{\prod_{\forall r} f_r!} \prod_{\forall r} p_r(\mathbf{f})^{f_r} \quad (8)$$

ただし，q はOD交通r量である．同時確率 $P(s_i = 1\ \forall i \mid \mathbf{f})$ を交通流の尤度関数と呼ぶ．

我々が求めたいのは全員がSUB仮説を満たしているときの経路交通量の確率分布である．この確率分布は式(1)を一般化して次のように表すことができる：

$$P(\mathbf{f} \mid s_i = 1\ \forall i) \quad (9)$$

本節冒頭の説明のように，「すべての利用者の行動はSUB原則に従う」という仮説を置いている．これは，「経路交通量の確率分布」を得るための条件と考えることができる．したがって，経路交通量の確率分布は，式(9)のように，「すべての利用者の行動はSUB原則に従う」という条件を持つ条件付確率として定式化することができる．

経路交通量の尤度関数を用いて，$P(\mathbf{f} \mid s_i = 1\ \forall i)$ を導出できることを示す．ベイスの定理を用いることにより，尤度関数と $P(\mathbf{f} \mid s_i = 1\ \forall i)$ の関係は次のように表現できる：

$$P(\mathbf{f} \mid s_i = 1\ \forall i) = \frac{P(s_i = 1\ \forall i \mid \mathbf{f}) P(\mathbf{f})}{P(s_i = 1\ \forall i)} \quad (10)$$

SUBが成立しているという仮定の下では，すべての i について $s_i = 1$ である状況のみを考慮すれば十分なので，$P(s_i = 1\ \forall i)$ は定数と考えればよい．一方，$P(\mathbf{f})$ は交通量の事前確率分布であるが，最大エントロピー原理[6]を適用すれば，これは一様分布になると言える．なぜなら，交通流に関する観測や仮説を持たない場合は，経路交通流 $\mathbf{f}$ に対する知識はほぼゼロであり，すべての経路交通流パターンが出現する確率は等しいとみなしてよいからである．

$P(\mathbf{f} \mid s_i = 1\ \forall i)$ は $s_i = 1\ \forall i$ という「知識」を与えた場合の交通流 $\mathbf{f}$ の確率分布であるので，事後確率分布と呼ぶ．上記の分析に基づいて $P(\mathbf{f} \mid s_i = 1\ \forall i)$ は次のようになる：

$$P(\mathbf{f} \mid s_i = 1\ \forall i) \propto P(s_i = 1\ \forall i \mid \mathbf{f}) \quad (11)$$

つまり，$P(\mathbf{f} \mid s_i = 1\ \forall i)$ は経路交通量の尤度と比例関係になると考えてよいことになる．

式(11)に基づいて，経路交通流の期待値と分散を計算することができる．たとえば，経路交通量の期待値は下記のようになる：

$$E(\mathbf{f}) = \int P(\mathbf{f} \mid s_i = 1\ \forall i) \mathbf{f} d\mathbf{f} \quad (12)$$

3. 数値計算法と計算例

式(8)から $P(\mathbf{f} \mid s_i = 1\ \forall i)$ の積分計算を効率的に行うことは簡単ではない．本研究ではMarkov Chain Monte Carlo (MCMC) を用いて，経路交通流の期待値と分散を計算する．図４に計算の概要を示す．MCMCで経路交通量の確率分布 $P(\mathbf{f} \mid s_i = 1\ \forall i)$ からサンプルを抽出する．次に抽出するサンプルの平均値と標本分散を計算する．

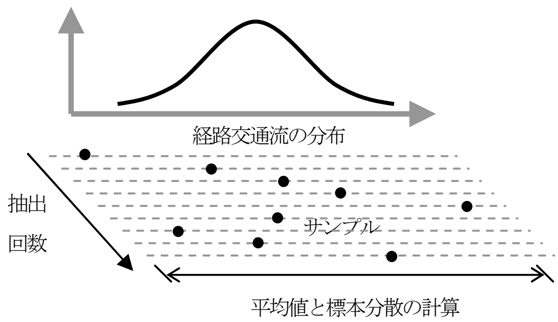

図４　MCMCの方法

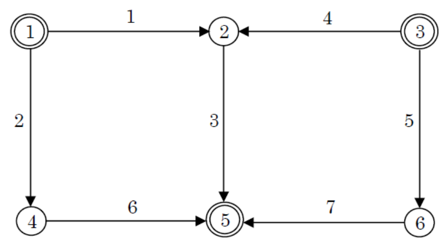

図5　テストネットワーク

図5で示すネットワークで交通量配分を行う．対象ネットワークには２つのODがある．ノード1からノード5までOD交通量は50である．ノード3からノード5までOD交通量は50である．ネットワークは７つのリンクと４つの経路を持つ．経路1はリンク2とリンク6を含み，経路2はリンク1とリンク3を含む．経路3はリンク4とリンク3を含み，経路4はリンク5とリンク7を含む．リンクaの走行時間は下記の式で計算する：

$$t_\gamma = 5 + 2.5(\upsilon_\gamma / 50)^2 \quad (13)$$

式(4)で示すMNLモデルを用いて経路選択確率を計算する．ただし，θの値は-0.35である。

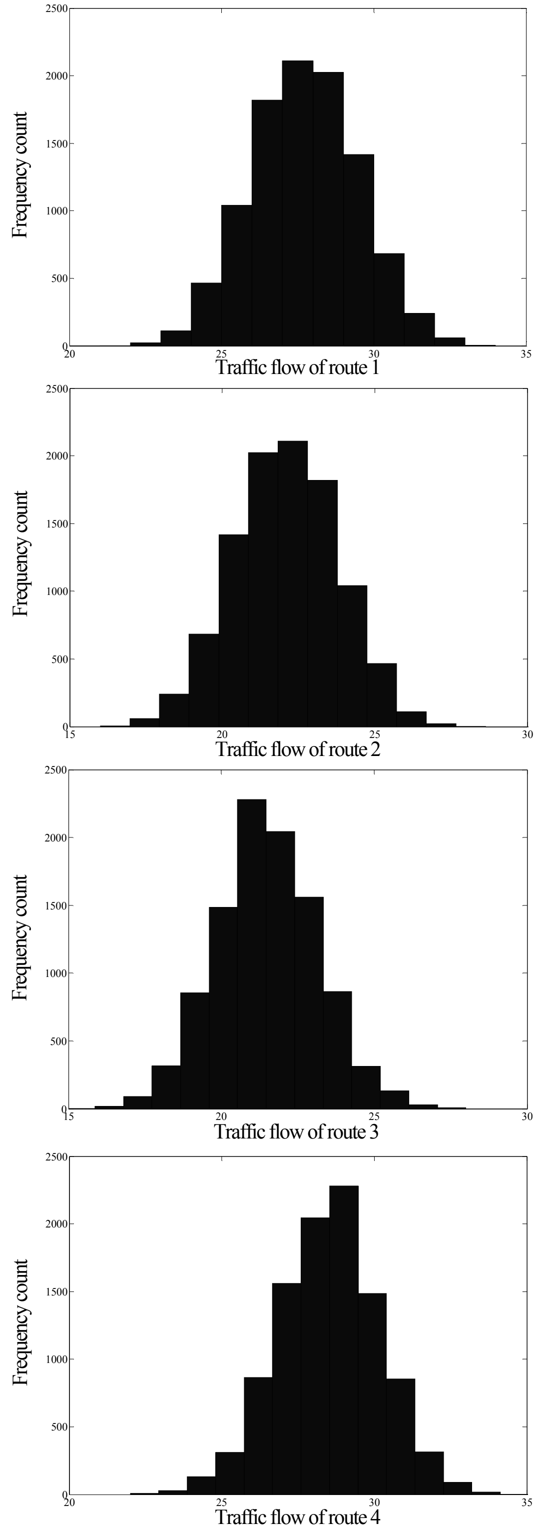

図６　経路交通量の確率分布

図６に抽出したサンプルのヒストグラムを示す．横軸は経路交通量で，縦軸は頻度を表す．抽出したサンプルを用いて経路交通量の平均値と分散を計算した．表１にその計算結果を示す。なお，経路交通量の平均値に基づいて各経路の選択確率を（通常のSUEと同様に）計算すると，各経路交通量の割合（OD交通量と比較）が選択確率とほぼ一致するということを確認できた．

表－１

経路	平均値	標本分散	選択確率
1	28.212	3.118	56.586%
2	21.788	3.118	43.414%
3	21.533	3.242	43.760%
4	28.466	3.242	56.240%
Iterations		10000	

4. まとめ

本研究ではベイス理論に基づいて経路交通流の事後確率分布を導出する方法を示した．さらに，MCMCを用いて事後確率分布からサンプルを抽出し，経路交通流の平均値と分散を計算する方法を提案した．大規模ネットワークへの適用方法は今後の課題としたい．

参考文献

1) Cascetta, E.: A Stochastic Process Approach to the Analysis of Temporal Dynamics in Transportation Networks. Transportation Research Part B, Vol.23, pp.1–17, 1989.

2) Daganzo, C.F. and Sheffi, Y.: On Stochastic Models of Traffic Assignment. Transportation Science, Vol.11, pp.253–274, 1977.

3) Hazelton, M.L., Lee, S. and Polak, J.W.: Stationary states in stochastic process models of traffic assignment: a Markov Chain Monte Carlo approach. In Proceedings of the 13th International Symposium on Transportation and Traffic Theory, (ed. Lesort, J.B), pp.341-357. Pergamon, Oxford, 1996.

4) 中山晶一朗，高山純一: 交通需要と経路選択の確率変動を考慮した交通ネットワーク均衡モデル，土木学会論文集 D，Vol. 62，No. 4，pp. 537-547, 1996.

5) 衛翀：Travel Behavior Analysis Based on Bayesian Statistics and Markov Chain Monte Carlo Method, 博士論文, 神戸大学, 2009.

6) Jaynes, E. T.: Information Theory and Statistical Mechanics. Physical Review, Vol.106, pp.620-630, 1957.