部分空間同定法を用いた動的地域経済成長モデルとパラメータ推定*

宮城俊彦**

１．はじめに

わが国の経済を考えるとき、地方あるいは地域の活性化は益々重要な課題となりつつある。こうした背景にあって、社会基盤整備や各種の政策の地域経済効果が評価できる地域ＣＧＥモデルやＳＣＧＥモデルが脚光を浴びるようになり、多くの研究者が携わるようになってきた。しかし、これらの研究のほとんどが静的なＳＣＧＥモデルを扱っている。社会基盤整備の経済成長への影響、長期的な波及の状況を把握し、評価するためには、多地域 CGE モデルの動学化が必要である。

こうした要請に対し、最近になって多地域 CGE モデルや SCGE モデルの動学化の研究が始められるようになってきた。Shibusawa et al. (2007) は forward-looking dynamics で地域間交易を取り扱える動的多地域 CGE モデルを提案している．ただし，Shibusawa らのモデルではいくつかの構造パラメータは外生的に与えている．また,時間不変のパラメータを仮定している．一方，RICE (Nordhaus and Boyer,2000)あるいは伴(2007)は、地域間交易を取り扱わない多地域 CGE モデルを提案している。すなわち、各地域は独立した存在と見なされ、個別の安定成長経路を辿るが終端時点では全体が均衡するように調整が行なわれている。たとえば、伴のモデルは Ramsey 型最適成長モデルを用いて一国の経済成長を記述し、Lau, Phalke and Rutherford(2002)らのアイデアを採用し、終端時点で金融資産総量を地域に分配する形で均衡させている。このため、各地域の実質成長率は同じと仮定するなど、非現実的な側面もあるが、しかし、動学的安定成長経路を辿るためにはやむをえない仮定といえる。これらのモデルは単純ゆえに SCGE モデルの実用化に適しているが、構造パラメータを外生的に与えており、モデルが実体経済をどれほど再現できるのかについては疑問を残している。動的モデルは一時点での経済ショックの影響の時間的範囲を観察する意義はあるにしても、ある程度、経済の将来予測可能性を前提にしなければ実用上の意義は薄れるともいえる。

これらの動的モデルに対し、本研究では実際の時系列データを下に状態空間モデルを構築し、パラメータを決定し、予測を行なう、いわゆる model-free のアプローチを提案する。特に、部分空間法の１つである特異点分解(SVD)に基づく手法の実用性を示すことを主眼にしている。こうした状態空間アプローチは Kalman filter に代表されるように、特に目新しいものではない。しかし、状態空間アプローチは DSGE モデルと並び動的経済成長モデルの１つとして位置づけられてきた経緯があり(Sims,1980)、また、Canova and Ciccarelli (2004,2009)が示すように多地域 VAR モデルが動的に変化する多地域経済の相互連関の構造同定としては有効であることが分かってきた。また、Island(2004)は状態空間モデルに基づく Hybrid モデルを提案している。すなわち、DSGE あるいは RBC モデルの構造パラメータを時系列データから推定すると同時に、DSGE モデルに組み込まれた経済構造で予測を行なえるように経済モデルの機能化させアプローチである。

本研究で提案する特異点分解法を用いた部分空間法(Subspace Method with Singular Value Decomposition: SMAVD)も VAR モデルと同様、それ自身で経済変化の予測に利用できるが、Hybrid モデルとしても位置づけることができる。これはシステム次数を分析者が指定するという SMAVD の持つ特性による。これらの点を確認するため、

*キーワーズ：多地域ＣＧＥモデル、経済成長、社会基盤整備
**正員　工博　東北大学教授　大学院情報科学研究科
（〒980-8579　宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-06
Tel: 022-795-7495 mail:toshi_miyagi@plan.civil.tohoku.ac.jp)

本研究では Island の結果と比較できるよう、Island が用いた米国のマクロ経済量の 1948 年第１期から 2002 年第２期までの四半期データを用いている。そして、全データのうち一部を教師データとして用い、それを用いて将来を予測し、その適合度を残りのデータセットで予測精度をチェックするという方法をとる。

２．Hansen の RBC モデル

2.1 基本モデル

Hansen の RBC モデルは以下の問題に整理できる。

Choose sequences $\{Y_t, C_t, I_t, H_t, K_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$
to maximize

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\ln C_t - \gamma H_t], \tag{1}$$

subject to

$$Y_t = A_t K_t^{\theta} (\eta^t H_t)^{1-\theta}, \tag{2}$$

$$\ln A_t = (1-\rho)\ln A + \rho \ln A_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{3}$$

$$Y_t = C_t + I_t \tag{4}$$

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t, \tag{5}$$

where

$$\left.\begin{array}{l} 1 > \beta > 0,\ \gamma > 0, \eta > 1 \\ A > 0,\ 1 > \rho > -1,\ \varepsilon_t \sim N(0,\sigma^2) \\ 1 > \delta > 0 \end{array}\right\} \tag{6}$$

Y: 生産、C: 消費　、Ｉ: 投資、
H: 労働、K: 資本、A:技術ショック

この問題の均衡条件は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} &For\ all\ t = 0,1,2,\ldots, \\ &Y_t = A_t K_t^{\theta} (\eta^t H_t)^{1-\theta} \\ &\ln A_t = (1-\rho)\ln A + \rho \ln A_{t-1} + \varepsilon_t, \\ &A > 0,\ 1 > \rho > -1,\ \varepsilon_t \sim N(0,\sigma^2) \\ &Y_t = C_t + I_t \\ &K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t \\ &\gamma C_t H_t = (1-\theta) Y_t \\ &\frac{1}{C_t} = \beta E\left\{\frac{1}{C_{t+1}}\left[\theta\left(\frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}}\right) + 1 - \delta\right]\right\} \end{aligned} \tag{7}$$

(7) は η^t を含むため非定常過程である。定常(stationary)過程に変換するために、η^t で除する。変換された定常過程変数を $\{y_t, c_t, i_t, h_t, k_t, a_t\}$ とおく。また、確率的技術ショックがない場合、経済は時間不変な定留点 (steady-state) $\{y, c, i, h, k, a\}$ に収束する。

2.2 線形化

システムにショックが与えられた場合、システムは定常状態の周辺で変動する。この挙動を表現するため、(7) を定留点の周辺において線形近似する。線形近似にはテイラー近似あるいは log-linear 近似が使われる。log-linear 近似したものを以下に示す。前の変数と区別するためハットをつけている。

$$\begin{aligned} &For\ all\ t = 0,1,2,\ldots, \\ &\hat{y}_t = \hat{a}_t + \theta \hat{k}_t + (1-\theta)\hat{h}_t \\ &\hat{a}_t = \rho \hat{a}_{t-1} + \varepsilon_t \\ &\left(\frac{\eta}{\beta} - 1 + \delta\right)\hat{y}_t = \left[\left(\frac{\eta}{\beta} - 1 + \delta\right) - \theta(\eta - 1 + \delta)\right]\hat{c}_t \\ &\qquad\qquad + \theta(\eta - 1 + \delta)\hat{i}_t \\ &\eta \hat{k}_{t+1} = (1-\delta)\hat{k}_t + (\eta - 1 + \delta)\hat{i}_t \\ &\hat{c}_t + \hat{h}_t = \hat{y}_t \\ &\frac{\eta}{\beta}\hat{c}_t = \frac{\eta}{\beta} E_t \hat{c}_{t+1} - \left(\frac{\eta}{\beta} + 1 - \delta\right) E_t \hat{y}_{t+1} + \left(\frac{\eta}{\beta} + 1 - \delta\right)\hat{k}_{t+1} \end{aligned} \tag{8}$$

2.3 状態空間表現

上の式を行列表現すると、

$$\begin{aligned} &A f_t^0 = B s_t^0 + C \hat{a}_t \\ &where \\ &f_t^0 = \begin{bmatrix} \hat{y}_t & \hat{i}_t & \hat{h}_t \end{bmatrix}^T, \quad s_t^0 = \begin{bmatrix} \hat{k}_t & \hat{c}_t \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{9}$$

行列 A,B,C は構造パラメータで表現されるパラメータ行列でシステム行列と呼ばれる。以上を整理して、最終的に以下のような状態空間モデルを得る。

$$\begin{aligned} s_{t+1} &= \Pi s_t + W \varepsilon_{t+1} \\ f_t &= U s_t \end{aligned} \tag{11}$$

2.4 モデルの推定

有限期間 T までのデータ系列 $\{d_t\}_{t=1}^{T}$ が与えられているものとする。制約条件のため投資 it は冗長である。

$$d_t = [\hat{y}_t \ \hat{c}_t \ \hat{h}_t]^T \quad for \ \ t = 1,2,\ldots,T$$

このとき、経験的な状態空間モデルは次式で与えられる。

$$\begin{aligned} s_{t+1} &= As_t + B\varepsilon_{t+1} \\ d_t &= Cs_t + v_t \end{aligned} \tag{12}$$

係数行列は構造パラメータの関数として表される。したがって、最尤法を用いてパラメータを推計できる。また、Kalman filter を用いて状態空間の時間的変化を追跡することができる。

3. 特異点分解を用いた部分空間法

3.1 状態空間モデル

(13)で与えられる状態空間モデルを考える。

$$\begin{aligned} &x_{t+1} = Ax_t + w_t \\ &y_t = Cx_t + v_t \\ &where \ x_t \in \mathbb{R}^n, y_t \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{n\times n}, C \in \mathbb{R}^{m\times n} \end{aligned} \tag{13}$$

n はシステムの次数であり、分析者が指定する。また、状態ノイズと観測ノイズは白色雑音である。$w_t \sim N(0,Q),\ v_t \sim N(0,R)$。に従えば、この状態空間モデルは制御変数をもたない確率状態空間モデルであり、Akaike(1974)によって導入された。状態変数は観測されることを前提にしていない点でKalman filterと同様の隠れ状態変数である。

3.2 システム行列の推定

$$\begin{aligned} Y_{1:\tau} &= [y_1 \, y_2 \cdots y_\tau] \in \mathbb{R}^{m\times\tau} \\ X_{1:\tau} &= [x_1 \, x_2 \cdots x_\tau] \in \mathbb{R}^{n\times\tau} \end{aligned} \tag{14}$$

とおき、また、SVD への観測値行列を $D = Y_{1:\tau}$ とおく。このとき、SVD によって D は、特異値含む対角行列 $\Sigma = diag\{\sigma_1,\ldots,\sigma_n\}$ および $U \in \mathbb{R}^{m\times n}, V \in \mathbb{R}^{\tau\times n}$ によって次のように分解できる。

$$D \approx U\Sigma V^T \tag{15}$$

また、観測行列、状態空間の推定値は次式で与えられる。

$$\hat{C} = U, \quad \hat{X} = \Sigma V^T \tag{16}$$

ダイナミクス行列は、最小二乗法によって求めることができる。すなわち、

$$\hat{A} = \arg\min_A \left\| AX_{0:\tau-1} - X_{1:\tau} \right\|_F^2 = X_{1:\tau}(X_{0:\tau-1})^\dagger \tag{17}$$

$\|\cdot\|_F$ は Frobenius ノルムを表し、また、†は Moore-Penrose 逆行列を表す。ノイズの共分散行列 Q,R は残差より求めることができる。

３．３ データ行列

部分空間同定法ではデータ行列が以下のようなブロック Hankel 行列で与えられると仮定している(Overschee and Moor,1993)。このとき、d は１時点（あるいはサイクル）で得られるデータを表す。得られたデータセットをどのように区分するかは、いくつかの方法が考えられるが、基本的には分析者に依存する。

$$D = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_\tau \\ y_2 & y_3 & \cdots & y_{\tau+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_d & y_{d+1} & \cdots & y_{d+\tau-1} \end{bmatrix}_{md\times\tau} \tag{18}$$

4. 適用例

Island のモデルと比較するため、彼が用いた 1948 年 1 期から 2002 年 2 期までの米国の GDP、消費、投資、労働時間に関する 4 半期データを用いる。1948.1~1985.1 までのデータを用いて、その後の経済の成長の軌跡をシミュレートする。Islannd モデルでは、Kalman filter の係数行列をその後のサンプルで逐次修正している。図 1 に示した結果は 4 期先を予測するモデルである。1 期先の予測では、実際のデータをほぼ完全に再現できる。

図２は、部分空間同定法の結果を示した。Islannd モデルとは異なり、教師データを使用するだけで、その後のサンプルデータは利用していない。この方法では、システム次数と景気変動のサイクル長の設定で結果が変わってくる。システム次数を Hansen から得られる状態空間モデルに一致させ、短いサイクルで予測すると、短期的な再現性は高いが、中長期の予測は完全に外れる。システム次数に比較し、サイクル長を長く取る

と平滑化された予測値になる。図ではシステム次数を５、サイクル長を３０としたケースであるが、システム次数を３０、サイクル長を７０と設定すると再現性は非常に高くなる。しかし、システムの次数がどのような経済変数に対応しているかは、状態空間モデルだけでは峻別できない。

解釈には経済モデルが必要になる。また、別の見方をすれば、Hansen モデルだけでは実態経済の長期予測はほとんど不可能であり、隠れ状態変数に潜む、潜在的経済変数が必要であることを示唆している。

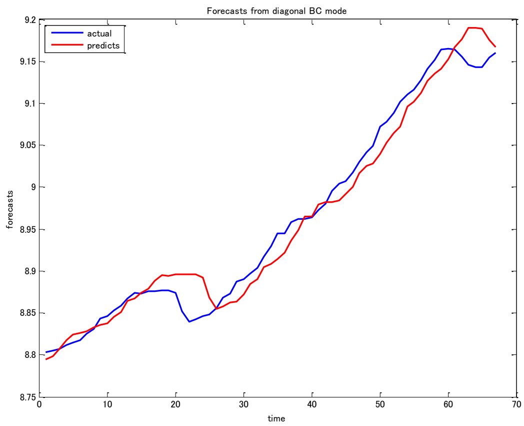

図１　Island の方法による再現性

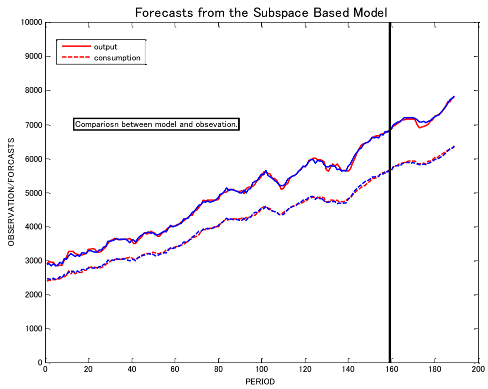

図２　SMAVD による再現性（n=5,d=30）

参考文献

Akaike, H. (1974): Stochastic theory of minimal realization,IEEE Transactions on Automatic Control, 19(6),667-673.

伴　金美(2007):日本経済の多地域動学的応用一般均衡モデルの開発:Forward Looking の視点に基づく地域経済分析, RIETI Discussion Paper Series 07-J-043.

Canova, F., and M. Ciccarelli (2004): Forecasting and turning point prediction in a Bayesian panel VAR model, Journal of Econometrics, 120, 327-359.

Canova, F., and M. Ciccarelli (2009): Estimating multicountry VAR models, International Economic Review, 50(3), 929-959.

Lau, M.I., A. Pahlke and T.F. Rutherford, 2002, Approximating infinite-horizon models in a complementarity format: A primer in dynamic general equilibrium analysis, Journal of Economic Dynamics & Control 26, 577-609.

Nordhaus, W.D. and J. Boyer (2000): Warming the World: Economic Models of Global Warming, The MIT Press.

Shibusawa, H., Y. Higano and Y. Miyata (2007): A dynamic multi-regional CGE model with transportation networks: Equilibrium and optimality, Studies in Regional Science, 37(2), 375-388.

Sims,C.A. (1980):Macroeconomics and reality, Econometrica, 48,1-48.

Van Overschee, P., and B. De Moor (1993):Subspace algorithms for the stochastic identification problem, Automatica, 29(3):649-660.