Beckmann 型都心創発モデルの均衡解の一意性と安定性 *

Non-Uniqueness and Stability of Equilibrium Urban Configuration for Beckmann's Spatial Interaction Model*

高山雄貴 **・赤松隆 ***

By Yuki TAKAYAMA**・Takashi AKAMATSU***

1. はじめに

Beckmann[1)]の先駆的研究を嚆矢として,「都心形成」現象を説明するためのミクロ経済学的基礎に関する多くの研究が行われてきた．その代表的な理論では，都心形成の基本要因は，Beckmann と同様の「空間的相互作用関数」によって表現された経済行動主体間の市場外での相互作用である．そして，その「空間的相互作用関数」により表現された，距離に応じて減衰する外部不経済効果 (空間相互作用) をモデリングの共通基盤として，様々な状況下での均衡立地パターンが明らかにされている．より具体的には，モデル化されている経済主体の種類が,

1) 単一種類の消費者のみ: Beckmann[1)]
2) 単一種類の企業のみ: O'hara[11)], Borukhov and Hochman[2)], Tabuchi[14)]
3) 消費者と企業: Ogawa and Fujita[9)10)], Imai[8)], Fujita and Ogawa[5)]
4) 消費者と複数種類の企業: Fujita[6)]

といった場合について，形成される立地集積 (都心) パターンが示されている．

しかし，以上で述べた既存研究は，均衡解の一意性・安定性が全く確認されていないという問題を抱えている．均衡解が不安定であれば，その立地パターンは意味を持たないにも関わらず，既存研究で示された均衡解が安定的であるか否かは，これまで議論されていない．さらに，既存研究は，均衡解が一意であると仮定し，立地パターンが対称となる場合のみを分析しているに過ぎず，実際に均衡解が一意であるか否かは，明らかにされていない．従って，現状では，既存研究で示された均衡立地パターンが，意味を持たない不安定的な均衡解であり，さらに，それ以外にも非対称な均衡立地パターンが存在する可能性が残されている．この均衡解の一意性・安定性を調べるには，後述するように，空間相互作用の距離に対する減衰効果を表わす「空間割引関数」の数学的特性を知ることが不可欠である．この空間割引関数の重要性は，Ogawa and Fujita[9)]と Fujita and Ogawa[5)]の比較から明らかである; 両者のモデルの構造は，ほぼ同一であり，相違点は，空間割引関数の形状のみである．それにも関わらず，これまで，空間割引関数の数学的特性は，調べられていない.

以上の背景に鑑み，本研究では，Beckmann モデルを例として，都心形成モデルの均衡状態の一意性・安定性を明らかにすることを目的とする．そのために，まず，空間相互作用を表現する空間割引関数の数学的特性を調べる．そして，その特性に基づいて，都心形成モデルの均衡状態の一意性・安定性を確認し，従来から前提とされてきた対称な立地パターン以外にも均衡状態が複数存在することを示す.

本稿では，均衡状態の一意性・安定性を解析するため，既存のモデルで考えられてきた連続的な都市空間を離散化する．これは，既存研究で考えられてきた都市空間が連続的なモデル (連続空間モデル) では，連続性・微分可能性が保証されない場合，その厳密な解析が非常に煩雑になり，さらに，連続空間の安定性は，必ずしも確立した定義が存在しないためである．ただし，都市空間の離散化には，様々な方法が考えられる．そこで，まず，本稿で考える都市空間を離散化した Beckmann モデル (離散空間モデル) が，従来の連続空間モデルと整合的であることを確認する.

2. 連続空間モデルと整合的な離散時間相互作用の構成

(1) 連続空間 Beckmann モデル

離散空間モデルが，従来の連続空間モデルと 1 対 1 対応関係にあることを確認するために，まず，従来の連続空間モデルの空間相互作用を表す交通費用を確認しよう．ここでは，一次元実数空間の区間 $I = [-b, b]$ 上で立地点を選択する主体を考える．ある地点 $x \in I$ の立地密度を $n(x)$ とし，また，立地密度の I 全体にわたる空間分布を $\{n(x)\}$ と表す.

a) 交通費用写像

地点 $x \in I$ における交通費用 $T(x)$ は，$\{n(x)\}$ に関する以下の関数で与えられると仮定する:

$$T(x) \equiv \int_{-b}^{b} d(x, y)n(y)dy. \tag{1}$$

ここで，$d(x, y)$ は x, y 間の距離抵抗を表しており，空間相互作用の距離低減効果を表す空間割引関数である．この交通費用 $T(x)$ は，都市内の全消費者とコミュニ

---

* キーワード：人口分析，都市計画，住宅立地，産業立地

** 学生員，修士，東北大学大学院情報科学研究科

*** 正員，工博，東北大学大学院情報科学研究科
(〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06,
TEL: 022-795-7507; FAX: 022-795-7505)

ケーションするために必要な交通費用を表している．

交通費用 $T(x)$ は，任意の地点 $x \in I$ に対して定義されており，交通費用の I 全体にわたる空間分布 $\{T(x)\}$ を考えることができる．したがって，全地点 $x \in I$ に対する式 (1) の関係は，立地密度の空間分布 $\{n(x)\}$ を交通費用の空間分布 $\{T(x)\}$ に変換する交通費用写像 D を定義している．

本節では，この交通費用写像 D の特性を調べる．ただし，ここでは，空間割引関数 $d(x, y)$ が指数型の関数形 $d(x, y) \equiv 1 - \exp(-\tau|x-y|)$ となる場合のみを調べる．なお，以下では，D の数学的特性を見るために，定数項を除いた場合 (i.e. $d(x, y) \equiv -\exp(-\tau|x-y|)$) を解析する (定数項は，以下で示す逆写像演算子 (4) には影響しない)．

b)　交通費用写像の逆写像 - 立地密度写像

定義した交通費用には，写像 $D : \{n(x)\} \to \{T(x)\}$ の逆写像 $D^{-1} : \{T(x)\} \to \{n(x)\}$，すなわち，交通費用の空間分布 $\{T(x)\}$ を立地密度の空間分布 $\{n(x)\}$ に変換する写像 (演算子) が存在する:

$$n(x) = D^{-1}\{T(x)\}. \tag{2}$$

この交通費用写像の逆写像 (立地密度写像)D^{-1} は，$T(x)$ の定義式 (1) を二階微分することにより，

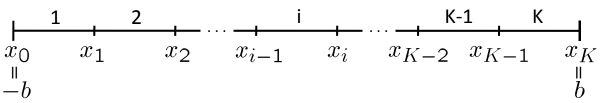
$$\frac{d^2T(x)}{dx^2} = \tau^2 T(x) + 2\tau n(x) \tag{3}$$

が得られることから，次のように表せる:

$$D^{-1} \equiv \frac{1}{2\tau}\left[\frac{d^2}{dx^2} - \tau^2\right]. \tag{4}$$

(2)　離散空間 Beckmann モデル

次に，都市空間が**図–1** のように離散的な場合の交通費用を示そう．ここでは，一次元連続空間の区間 I を K 個 (有限個) の等長区間 (各区間の幅 $\Delta x = 2b/K$) に分割し，i 番目区間 $(i = 1, 2, ..., K)$ の左端座標を x_{i-1} と表す $(x_0 = -b, x_K = b)$．区間 i の立地密度を n_i と表し，連続空間での立地密度の空間分布 $\{n(x)\}$ を K 次元ベクトル $\boldsymbol{n} = [n_1, n_2, ..., n_K]$ で離散近似する．



図–1　都市構造

a)　交通費用写像

都市空間の離散化に対応して，連続空間での交通費用の空間分布 $\{T(x)\}$ は，各離散区間の交通費用 T_i を要素にもつ K 次元ベクトル $\boldsymbol{T} = [T_1, T_2, \ldots, T_K]$ で表現される．これに対応して，連続空間での関係式 (1) は，離散空間では，立地密度ベクトルを交通費用ベクトルに変換する以下の関係式:

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{D}\boldsymbol{n} \qquad \left(T_i(\boldsymbol{n}) \equiv \sum_j d_{ij} n_j\right) \tag{5}$$

で表現される．ここで，d_{ij} は ij 間の距離抵抗を表す空間割引項である．$\boldsymbol{n}$ を $\boldsymbol{T}$ に写す空間割引行列 $\boldsymbol{D}$ は，以下のように与える:

$$\boldsymbol{D} = -\begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & \cdots & t^{K-1} \\ t & 1 & t & \cdots & t^{K-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ t^{K-1} & t^{K-2} & t^{K-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

ここで，$t \equiv \exp(-\tau\Delta x)$ である．この行列は，d_{ij} が $|i-j|$ のみによって決まる Toeplitz 行列である．

b)　交通費用写像の逆写像 - 立地密度写像

連続空間を考えた場合と同様に，離散空間での交通費用写像 D に対して，空間割引行列 $\boldsymbol{D}$ が特異でなければ，その逆写像が存在する．すなわち，逆行列 $\boldsymbol{D}^{-1}$ が存在し，交通費用ベクトル $\boldsymbol{T}$ を立地密度ベクトル $\boldsymbol{n}$ に変換する以下の関係式:

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{T} \tag{7}$$

が得られる．この $\boldsymbol{D}^{-1}$ は，以下のように与えられる．

$$\boldsymbol{D}^{-1} = \zeta \begin{bmatrix} 1 & -t & & & & \\ -t & 1+t^2 & -t & & \mathbf{0} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & -t & 1+t^2 & -t \\ & & & & -t & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

ここで，$\zeta \equiv -1/(1-t^2)$ である．

(3)　連続空間モデルと整合的な離散空間相互作用関数

前節までに示した交通費用逆写像を用いて，離散空間相互作用が連続空間モデルと 1 対 1 対応関係にあることを確認しよう．都市内の居住地数 K が多い場合，交通費用写像 (8) の $t \equiv \exp(-\tau\Delta x) \approx 1 - \tau\Delta x + (\tau\Delta x)^2/2$, $t^{-1} = \exp(\tau\Delta x) \approx 1 + \tau\Delta x + (\tau\Delta x)^2/2$ と表せる．そのため，対角の両隣要素，対角要素は，

$$-\zeta t \approx \frac{1}{2\tau}\frac{1}{\Delta x^2}, \tag{9}$$

$$\zeta(1+t^2) \approx \frac{1}{2\tau}\left(\frac{-2}{\Delta x^2} - \tau^2\right), \tag{10}$$

離散空間モデルの立地密度は，次のように表わせる:

$$n_i(\boldsymbol{T}) = \frac{1}{2\tau}\left[\frac{\Delta T_{i+1} - \Delta T_i}{(\Delta x)^2} - \tau^2 T_i\right]. \tag{11}$$

この表現は，明らかに連続空間の立地密度 (2) を差分近似したものである．したがって，離散空間相互作用は，連続空間モデルと 1 対 1 対応関係にあることがわかる．

(4) 離散空間相互作用関数の数学的性質

次章以降で Beckmann モデルの均衡解の一意性・安定性を確認する準備として，空間割引行列・空間割引関数の正 (負) 定値性を調べる．空間割引行列の正 (負) 定値性は，その行列の固有値の符号により確認できる．そのため，$\boldsymbol{D}$ の正 (負) 定値性は，$\boldsymbol{D}^{-1}$ の正 (負) 定値性と一致する．そこで，$\boldsymbol{D}^{-1}$ の固有値を Gershgorin の定理により導出すると，次の補題が得られる:

補題 1： 空間割引行列の逆行列 $\boldsymbol{D}^{-1}$ の固有値 λ は，次の範囲に存在する:

$$(1+t)(1-t) \leq \lambda \leq -(1-t)(1+t). \tag{12}$$

$0 < t \equiv \exp(-\tau\Delta x) < 1$ より，固有値 λ の最大値はゼロ未満であるため，$\boldsymbol{D}^{-1}$ が，負定値行列であることがわかる．この結果は，次の命題にまとめられる:

命題 1： 離散空間モデルの空間割引行列 $\boldsymbol{D}$ は，負定値行列である．さらに，連続空間の空間割引関数 $d(x,y)$ は，負定値関数である．

3. 離散空間モデルの均衡条件の定式化

(1) モデルの設定

本稿では，**図–1** のネットワークに示すような，等間隔にならぶ K の居住地からなる線形都市を考える．このネットワーク上の左から i 番目の区間は，居住地 i を表す．また，全ての居住地面積は，一定値 $A=1$ とする．そのため，各居住地の立地密度は，人口と一致する．

このモデルの経済主体は，均質な消費者のみである．閉じた都市を考えるため，都市全体の人口は，一定値 N とする．各々の消費者は，都市内の全ての消費者とコミュニケーション (社会的相互作用) を取る．消費者は，以下に表現するように，自らの効用が最大となるように居住地，財の消費量を選択する．

$$\max_{i,z_i,y_i} \{u(z_i,y_i|z_i+r_iy_i+T_i=Y), i=1,...,K\} \tag{13}$$

ここで，$u(\cdot)$ は消費者の効用関数，Y は消費者の所得を表す．また，添え字 i は居住地を表し，z_i は居住地 i の合成財 (ニューメレール) の消費量，r_i は地代，y_i は消費者 1 人あたりの土地面積，T_i は消費者間のコミュニケーションに必要な交通費用である．居住地 i の交通費用 T_i は，1 章で示した空間的相互作用を表している．この交通費用は，前章で示した式 (5) の関係をもつ．また，本稿では，効用関数を，Beckmann[1] と同様に，次の準線形効用関数とする．

$$u(z_i,y_i) \equiv z + \mu \ln y_i \tag{14}$$

この消費者の効用最大化問題は，まず，各居住地で合成財と土地の最適消費量を決定し，そして，その結果決まる間接効用関数が最大の居住地 i を選択するという，2 段階最適化問題と等価である．より具体的には，まず，各居住地で最適な消費行動をしたときの効用は，以下の間接効用関数:

$$v_i(r_i, Y-T_i) \equiv \max_{z_i,y_i} u(z_i,y_i|z_i+r_iy_i+T_i=Y),$$

そして，居住地選択行動は，次のように表わされる:

$$\max_i v_i(r_i, Y-T_i).$$

(2) 均衡条件

Beckmann モデルの均衡状態は，居住地選択の無裁定条件，各居住地での土地の需給均衡条件，消費者数の保存則の 3 条件が同時に満たされた状態である．そこで，各々の条件を定式化しよう．

まず，消費者の居住地選択に関して均衡状態にあるならば，どの消費者も居住地を変更する動機を持たない．したがって，消費者が選択する居住地の効用は，均衡効用水準 V に等しく，消費者が選択しない場合は，V 以下となる:

$$\begin{cases} V = v_i(r_i, Y-T_i) & \text{if} \quad n_i > 0 \\ V \geq v_i(r_i, Y-T_i) & \text{if} \quad n_i = 0 \end{cases} \quad \forall i. \tag{15}$$

次に，土地市場の需給均衡状態では，正の地代が付いていれば，供給面積と需要面積が一致し，そうでなければ供給過多である (簡単のため，住宅の他の代替的用途に対する地代 (農業地代) を 0 とおいている)．ここで，各居住地の総面積 (供給面積) は，一定値 $A=1$ と仮定しているため，この条件は

$$\begin{cases} 1 = y_in_i & \text{if} \quad r_i > 0 \\ 1 \geq y_in_i & \text{if} \quad r_i = 0 \end{cases} \quad \forall i \tag{16}$$

と表される．また，各消費者の住居面積 y_i は，Roy の恒等式より，r_i, Y, T_i の関数:

$$y_i = -\frac{\partial v_i(r_i, Y-T_i)/\partial r_i}{\partial v_i(r_i, Y-T_i)/\partial Y} \tag{17}$$

により与えられる．

最後に，本稿では，閉じた都市を考えているため，消費者数の保存条件は，

$$N = \sum_{i=1}^{K} n_i \tag{18}$$

である．すなわち，各居住地に立地する消費者数 n_i の合計は，都市の総人口 N に等しい．

4. 均衡条件のいくつかの等価表現

前章で示した均衡条件では，均衡解の一意性・安定性を調べることが難しい．そこで，本章では，前章で示した均衡条件を，均衡解の一意性・安定性を容易に確認することのできる，不動点問題・最適化問題として表現する．

(1)　不動点問題としての表現

前章で示した間接効用関数は，次のように表せる:

$$v_i(r_i, Y - T_i) = Y - T_i(\boldsymbol{n}) + \mu \ln(\mu/r_i) - \mu. \quad (19)$$

この間接効用関数より，$r_i \to 0$ ならば，$v_i \to \infty$ となるため，$r_i > 0$ が必ず成立する．すなわち，土地市場の需給均衡条件 (16) は，相補性条件で表現する必要がなく，次のように表すことができる:

$$r_i(n_i) = \mu n_i > 0. \quad (20)$$

さらに，この条件 (20) から，$n_i > 0$ となることがわかる．したがって，消費者の居住地選択の無裁定条件 (15) も，相補性条件で表現する必要はなく，次のように表せる:

$$V = Y - T_i(\boldsymbol{n}) - \mu \ln n_i - \mu \quad \forall i. \quad (21)$$

以上より，均衡条件は，消費者数の保存則 (18) に，得られた条件 (21), (20) を代入することにより，数量変数を未知変数とした不動点問題:

$$n_i = \frac{\exp(-T_i(\boldsymbol{n})/\mu)}{\sum_j \exp(-T_j(\boldsymbol{n})/\mu)} N \equiv P_i(\boldsymbol{n}) N \quad \forall i \quad (22)$$

として表現できることがわかる．この関係式をベクトル表記すると，次のように表せる:

$$\boldsymbol{n} = N\boldsymbol{P}(\boldsymbol{n}). \quad (23)$$

ここで，$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{n}) = [P_1(\boldsymbol{n}), P_2(\boldsymbol{n}), ..., P_K(\boldsymbol{n})]^T$ である．この不動点問題は，経路 i のコスト関数が $T_i(\boldsymbol{n})$ で表され，経路 i の選択確率が logit モデルで与えられる確率的交通均衡配分と同形である．

(2)　最適化問題

不動点問題を等価なポテンシャル問題 (最適化問題) に変換できれば，均衡解の一意性の議論に最適化問題を利用できる．そこで，不動点問題 (23) が等価な最適化問題として表現できることを確認しよう．不動点問題 (23) は，確率的交通均衡配分と同形であるため，$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n})$ の Jacobi 行列 $\nabla \boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{D}$ が対称であれば，等価な最適化問題として表現できることが知られている[3)4)13)15)]．本稿で考える $\boldsymbol{D}$ は対称行列であるため，不動点問題 (23) は，$p_i \equiv n_i/N$ と定義すると，均衡条件と等価な最適化問題が，次の命題としてまとめられる:

命題 2:　離散空間モデルの均衡条件は，以下の数量変数を未知変数とした最適化問題 (主問題) の極値条件と等価である:

$$\min_{\boldsymbol{p}} . \hat{Z}_p(\boldsymbol{p}) = -\mu H(\boldsymbol{p}) + \frac{N}{2} C(\boldsymbol{p}) \quad (24)$$
$$\text{s.t.} \quad 1 = \sum_i p_i, \ p_i \geq 0 \quad \forall i.$$

ここで，$H(\boldsymbol{p}) \equiv -\sum_i p_i \ln p_i$，$C(\boldsymbol{p}) \equiv \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{D} \boldsymbol{p}$.

この最適化問題 (24) より，均衡人口配分は，第 1 項のエントロピー関数 $H(\boldsymbol{p})$ で表わされる分散力と，第 2 項の総交通費用 $C(\boldsymbol{p})$ で表わされる集積力により決まることがわかる．

5.　離散空間モデルの均衡解の性質

(1)　均衡解の一意性

Beckmann モデルの均衡解の一意性を最適化問題 (24) の目的関数の形状により確認しよう．ここでは，目的関数の第 1 項 $-\mu H(\boldsymbol{p})$ と第 2 項 $(N/2)C(\boldsymbol{p})$ の形状に注目する．まず，目的関数の第 1 項は，明らかに狭義凸関数である．第 2 項は，命題 1 より $\boldsymbol{D}$ が負定値であるため，狭義凹関数である．狭義凸関数と狭義凹関数の和である目的関数は，必ずしも狭義凸関数とはならないため，次の命題が得られる:

命題 3:　Beckmann モデルの均衡解は，一般的に一意であるとは言えない．

この命題は，Beckmann[1)]で示されている対称な立地均衡パターン以外にも，均衡状態が存在することを示唆している．

(2)　均衡解の安定性

Beckmann モデルの均衡解の安定性を，不動点問題 (23) を活用して調べよう．均衡解の安定性を考えるためには，立地パターンが均衡状態へ到達するまでの調整過程をモデル化する必要がある．ここでは，時点 s における立地パターン $\boldsymbol{n}$ が，以下の常微分方程式に従って変化すると考える:

$$\dot{\boldsymbol{n}} \equiv \boldsymbol{F}(\boldsymbol{n}) = N\boldsymbol{P}(\boldsymbol{n}) - \boldsymbol{n}. \quad (25)$$

これは，進化・学習ゲーム理論分野でもよく知られている logit 型の Perturbed Best Response dynamics である[12)]．このとき，均衡点 $\boldsymbol{n}^*$ は，行列 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{n}^*)$ の固有値の実部が負であれば，(局所的) 安定となることが示されている．そのため，本稿で示す離散空間モデルの均衡解の安定性に関して，次の命題が成立する:

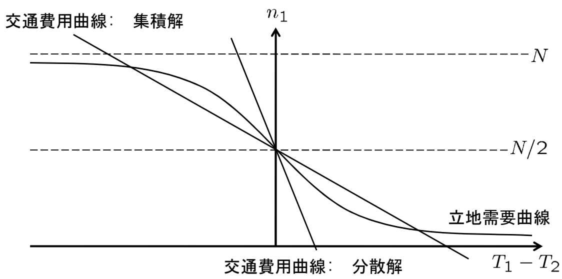
命題 4:　Beckmann モデルの均衡解 $\boldsymbol{n}^*$ は，

$$\nabla \boldsymbol{F}(\boldsymbol{n}^*) = N \nabla \boldsymbol{P}(\boldsymbol{n}^*) - \boldsymbol{I} \quad (26)$$

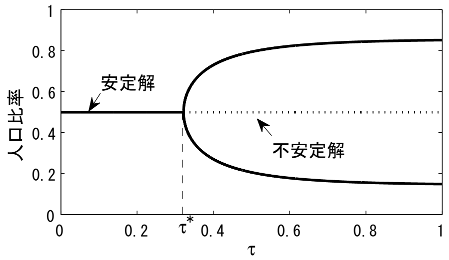
の固有値の実部が全て負であれば (局所的) 安定である．ここで，$\boldsymbol{I}$ は，単位行列である．

離散空間モデルの均衡解 $\boldsymbol{n}^*$ の安定性を調べるためには，命題 4 で示した $\boldsymbol{P}$ の Jacobi 行列の要素を調べる必要がある．この要素は，

$$\begin{aligned} \nabla \boldsymbol{P}(\boldsymbol{n}) &= \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{n}} \equiv \left[\frac{\partial P_i}{\partial n_j} \right] \\ &= \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{T}} \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial \boldsymbol{n}} = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \boldsymbol{T}} \boldsymbol{D} \end{aligned} \quad (27)$$



図–2 均衡解の性質 (2 居住地)



図–3 均衡立地パターンの分岐図

と表せる．ここで，$\partial \boldsymbol{P}/\partial \boldsymbol{T}$ の ij 要素は，次のように表せる:

$$\frac{\partial P_i}{\partial T_j} = \begin{cases} P_i(\boldsymbol{n})P_j(\boldsymbol{n})/\mu & \text{if} \quad i \neq j \\ P_i(\boldsymbol{n})(P_j(\boldsymbol{n})-1)/\mu & \text{if} \quad i = j \end{cases}. \qquad (28)$$

(3) 均衡解の分岐現象

本章第 (1) 節で，Beckmann モデルには，複数の均衡解が存在することを明らかにした．そこで，その均衡解に Beckmann[1)]では示されていない，非対称な立地パターンが存在する可能性を探ろう．より具体的には，$K = 2$ のケースで，非対称な均衡立地パターンを創発する，均衡解の分岐現象について議論する．

ここでは，均衡解の分岐現象を調べる導入として，2 居住地からなる都市において，均衡解が分岐し，複数の均衡解が発生することを不動点問題 (23) により示そう．この不動点問題の解は，消費者数の保存則 ($n_1+n_2 = N$) を用いて未知変数を n_1 のみとすることで，式 (5) から得られる交通費用曲線と式 (23) から得られる立地需要曲線の交点として表現できる (**図–2**).

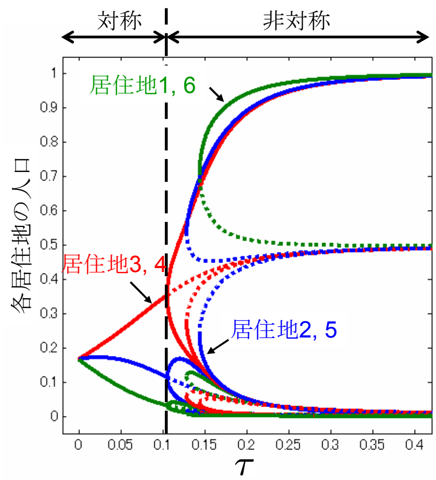
[交通費用曲線]:

$$n_1 = -\frac{T_1 - T_2}{2(1-t)} + \frac{N}{2}. \qquad (29)$$

[立地需要曲線]:

$$n_1 = \frac{1}{1+\exp(-(T_1-T_2)/\mu)}N. \qquad (30)$$

図–2 から明らかなように，均衡解は，交通費用曲線の傾き (ρ_S) と $T_1 - T_2 = 0$ における立地需要曲線の傾き (ρ_D) の関係に応じて変化する．より具体的には，次の 2 通りの関係に応じて，どのような均衡状態となるのかがわかる:



図–4-a Beckmann モデルの均衡立地パターン: $K = 6$

1. $\rho_S \leq \rho_D$: 均衡解は $n_1 = N/2$ の 1 個のみとなる．
2. $\rho_S > \rho_D$: 均衡解は 3 個存在し，2 個の安定 (集積) 解，1 個の不安定 (分散) 解が存在する．

この関係から，$\rho_S = \rho_D$ となる瞬間に均衡解の分岐が起こることがわかる．そこで，仮に N, μ を固定し，τ の変化に対する居住地 1 の均衡状態での人口を調べ，均衡解が分岐する状況を示そう．この結果は，**図–3** の通りとなる．解析により得られた結果と同様に，τ の増加に伴い，分散パターンの均衡解から集積パターンの均衡解へと分岐している．以上より，Beckmann モデルでは，交通費用曲線と立地需要曲線の傾きが等しくなる τ^* を分岐点とする "pitchfork 分岐" が起こることがわかる．

6. Beckmann モデルの均衡状態

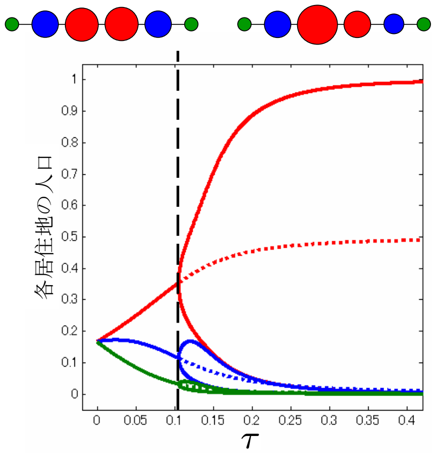
本章では，前章までで示した均衡条件から，均衡状態における立地パターンを数値実験により導出する．そして，既存研究では知られていない，非対称な均衡立地パターンが存在するか否かを調べる．ただし，すべての数値実験は，パラメータを $N = 1, \mu = 0.2, b = 5$ として行う．

(1) Beckmann モデルの均衡立地パターン: $K = 6$

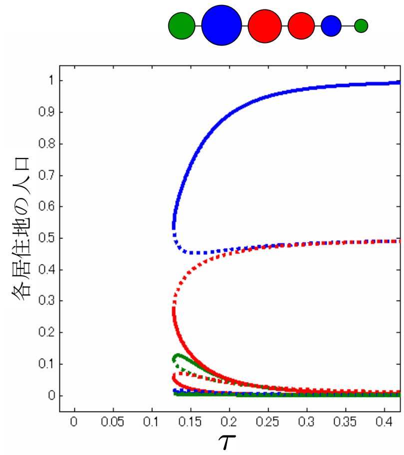
図–4-a〜4-d は，居住地数 $K = 6$ の場合の，均衡解である．横軸に交通費用パラメータ τ，縦軸に各居住地の人口シェア n_i/N をとり，安定解を実線，不安定解を破線で表わした．

まず，全ての均衡解を示した**図–4-a** を見てみよう．この結果から，交通費用パラメータ τ の増加に伴い，次々と均衡解が分岐し，非対称な均衡解が新たに発生することがわかる．この結果は，前章で示した，均衡解が必ずしも一意ではないこと，交通費用パラメータの増加に伴い複雑に分岐が発生することと整合的である．

次に，居住地 3(または 4)，居住地 2(または 5)，居住地 1(または 6) に都心が創発する均衡解を示した**図–4-b〜4-d** を見てみよう．これらの結果から，均衡解の分岐が起



図–4-b　都心が居住地 3 または 4 に形成されるケース



図–4-c　都心が居住地 2 または 5 に形成されるケース

こる毎に，均衡状態の都心の位置が徐々に都市の端部に広がることがわかる．より具体的には，$\tau = 0.1$ の分岐により，居住地 3(または 4) が都心となり，$\tau = 0.125, 0.14$ の分岐が起こることで，徐々に居住地 2(または 5)，居住地 1 (または 6) に都心を形成する均衡解が発生する．

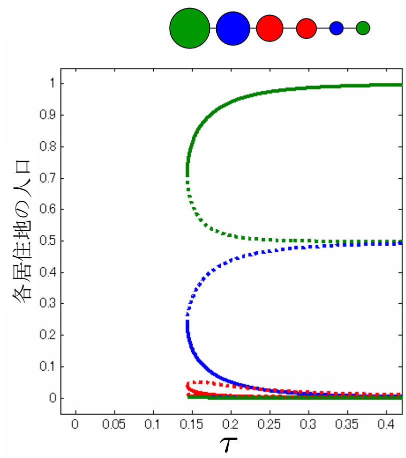
以上の結果は，次の命題にまとめられる:

命題 5:　Beckmann モデルでは，単一都心の非対称な均衡立地パターンが存在する．

7.　おわりに

本稿では，空間割引行列の数学的特性を明らかにし，それに基づいて，既存研究では全く触れられていない，Beckmann モデルの均衡解の安定性・一意性を確認する方法を示した．その方法により，均衡解が一般的に一意ではなく，既存研究で知られている対称な立地パターン以外に，非対称な均衡立地パターンが存在することを明らかにした．

以上の結論は，単一主体間の相互作用のみを考えた Beckmann モデルで得られたものである．そのため，複数主体間の相互作用を導入した，より複雑なモデル (e.g. Fujita and Ogawa[5]など) においても，まだ示されていない均衡状態が存在する可能性は高い．したがって，既存研究のモデルを本研究と同様のアプローチにより再検討する必要があるだろう．これは，今後の重要な研究課題である．



図–4-d　都心が居住地 1 または 6 に形成されるケース

参考文献

1) Beckmann, M.J.: Spatial equilibrium in the dispersed city, *in Mathematical Land Use Theory* (Y.Y.Papageorgiou, Ed.), Lexington Books, Lexington, MA., pp.117-125, 1976.
2) Borukhov, E. and Hochman, O.: Optimum and market equilibrium in a model of a city without a predetermined center, *Environment and Planning A*, Vol.9, pp.849-856, 1977.
3) Daganzo, C.F.: Unconstrained Extrmal Formulationm of Some Transportation Equilibrium Problem, *Transportation Science*, Vol.16, pp.332-360, 1982.
4) Fisk, C.S.: Some Developments in Equilibrium Traffic Assignment, *Transportation Research B*, Vol.14, pp.243-255, 1980.
5) Fujita, M. and Ogawa, H.: Multiple equilibria and structural transition of non-monocentric urban configurations, *Regional Science and Urban Economics*, Vol.12, pp.161-196, 1982.
6) Fujita, M.: A monopolistic competition model of spatial agglomeration: Differentiated product approach, *Regional Science and Urban Economics*, Vol.18, pp.87-124, 1988.
7) Fujita, M. and Thisse, J.F.: *Economics of Agglomeration: Cities, Industrial Location, and Regional Growth*, Cambridge University Press, 2002.
8) Imai, H.: CBD hypothesis and economies of agglomeration, *Journal of Economic Theory*, Vol.28, pp.275-299, 1982.
9) Ogawa, H. and Fujita, M.: Equilibrium land use paterns in a non-monocentric city, *Journal of Regional Science*, Vol.20, pp.455-475, 1980.
10) Ogawa, H. and Fujita, M.: Non-monocentric urban configurations in a two-dimensional space, *Environment and Planning A*, Vol.21, pp.363-374, 1989.
11) O'Hara, D.J.: Location of Firms within a Square Central Business District, *Journal of Political Economy*, Vol.85, pp.1189-1207, 1977.
12) Sandholm, W.H.: *Population Games and Evolutionary Dynamics,* MIT Press, 2008.
13) Smith, T.E.: A cost-efficiency theory of dispersed network equilibria, *Environment and Planning A*, Vol.20, pp.231-266, 1988.
14) Tabuchi, T.: Urban agglomeration economies in a linear city, *Regional Science and Urban Economics*, Vol.16, pp.421-436, 1986.
15) 松井寛 他: 交通ネットワークの均衡分析 -最新の理論と解法-, 土木学会, 1998.