1次元多都市システムにおける人口集積パターンの創発メカニズム*

Bifurcation Mechanism of the Core-Periphery System of Cities Model*

赤松隆**・高山雄貴**・池田清宏***・菅澤晶子**
By Takashi AKAMATSU**・Yuki TAKAYAMA**・Kiyohiro Ikeda***・Akiko SUGASAWA**

1. はじめに

(1) 背景と目的

近年，経済のグローバル化進展に伴い，地域・都市間の競争が激化している．我国を含む先進諸国では，企業・工場の国外移転が相継ぎ，また，欧米諸都市では，高度な知識・技術を持つ人材を惹きつけるための方策が，重要課題となっている．この様な現象に対して，適切な地域・都市政策を考えるためには，労働力や資本の都市・地域間移動と集積のメカニズムに関する理論的基盤が必要である．

生産要素の空間的移動と集積を一般均衡の枠組で扱った代表的理論は，Krugman[3)]の Core-Periphery(CP) モデルである．このモデルは，都市間輸送費用減少に伴う人口集積現象のメカニズムを説明できるという興味深い特徴がある．そのため，この理論は，非常に多くのモデル・バリエーションと研究蓄積を生み，基本特性の頑健性が検証されることとなった．そして，それら一連の研究は，新経済地理学 (NEG) と呼ばれ，都市経済学・地域経済学・国際経済学・産業組織論・労働経済学 等 の諸分野に跨る研究分野を形成しつつある．

この NEG の理論は，上述の CP モデルの特徴からも理解できる様に，社会基盤整備や地域経済政策の長期的効果を予測・評価する際の基盤となりうるものである．しかし，現在の NEG 理論は，土木計画分野で求められる定量的な予測・評価に用いるには，未だ，幾つかの本質的な限界・課題を残している．その最大の課題の一つは，NEG 勃興期に喧伝された "空間経済" の標語とは裏腹に，大半の研究が空間の退化した 2 都市モデルの分析に縮退していることである．2 都市モデルは，空間的距離・配置パターンが完全に捨象されたモデルである．そのため，現実の都市システムで観測される多様な空間的パターンの形成メカニズムを明らかにできない．従って，空間が重要な役割を果たす現実的な政策課題に適用可能な理論の構築を念頭におくなら，より一般的な多都市モデルの一般特性を解明してゆくことが必要である．

本研究は，上記課題解決を目指す研究の一環として，1 次元空間上の多都市 CP モデルにおける集積パターン創発メカニズムを明らかにする．そのために，本稿では，まず，NEG 分野で標準的な Pfluger[4)]・Forslid and Ottaviano[1)]の 2 都市 CP モデルを多都市システムの枠組みに拡張する．そして，その短期均衡状態が解析的に得られることを示す (第 2, 3 章)．この多都市 CP モデルの特性を把握する上での最大の難所は，均衡解の分岐現象にある．すなわち，CP モデルでは，輸送費用パラメータの低下に伴い，人口が各都市に分散した均衡状態から少数の都市に集積した均衡状態へと分岐する．NEG 分野の多くの研究が 2 都市モデル解析に留まっている最大の理由は，多都市 CP モデルにおける分岐解析の困難さにある．その問題に対し，本稿では，この分岐の基本的な仕組みは，以下で説明する分析法を用いれば，容易に理解できることが示される (第 4 章)．

(2) 本研究で提示するアプローチの特徴

本稿の基本的な目的は，多都市 CP モデルの一般的な特性を明らかにすることであるが，その眼目は，CP モデルの解析だけにあるのではない．むしろ，本研究の特徴は，集積経済を扱う様々なモデルの特性を統一的に理解するための汎用性の高い分析法を提示している点にある．

本稿で提示する分析法は，次の 3 つの鍵概念: A) 空間割引行列, B) 離散フーリエ変換, C) 円周都市システム, で特徴づけられる．実際，これらを組み合わせれば，CP モデルに限らず，空間的な経済集積現象を表現する様々なモデルの特性を，極めて単純な方法で統一的に焙り出すことができる．以下では，3 つの概念の意味を追いながら，本研究のアプローチを概観しよう．

A) の "空間割引" は，産業・人口の空間的配置パターンは，経済的な集積力・分散力の各々の効果が空間的にどのように減衰するかに決定的に依存することを主張している．より具体的には，本稿で扱う CP モデルでは，ある都市で人口・企業数が増加した場合，その都市での生産財の多様性増加による集積力と競争激化による分散力が発生する．そして，集積力・分散力の各々の影響は，財の輸送費用と空間的不完全競争の存在から，当該都市のみならず，他の都市にも漏出する．その spillover の程度が空間的な広がりとどの様な関係にあるかによって，産業・人口の集積・分散パターンは決まる．

この spillover 効果をモデル中で系統的に表現するための基本部品が，"空間割引行列" である．そして，

a) 空間割引行列 $\boldsymbol{D}$ の特性 (固有値)，および，

b) $\boldsymbol{D}$ と対象モデルの効用関数 Jacobi 行列の関係，

さえ明らかにすれば，モデルで創発しうる空間的な集積・分散パターンを完全に把握できる．この事実は，本稿で具体的な分析例を示す CP モデルに限られたことではなく，集積経済による空間的パターン形成を表現する一連のモデルで一般的に成立する．

B) は，どのような集積パターンが創発しうるかを判定するための指標が，離散フーリエ変換 (Discrete Fourier Transformation (DFT)) によって，極めて単純かつ直接的な形で得られることを意味している．そのより具体的

* キーワード：人口分析，産業立地，システム分析，地域計画
** 東北大学大学院情報科学研究科
*** 東北大学大学院工学研究科
(〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06,
TEL: 022-795-7507; FAX: 022-795-7505)

な意味と重要性は以下のとおりである．

まず，集積パターンの創発可能性を判定するためには，一般に，均衡条件を満たす複数の集積・分散パターンのうち，安定的に実現可能な解を抽出する必要がある．例えば，標準的なNEG研究では，均衡解への調整ダイナミクスを仮定し，解の局所的安定性を考える．この考え方で安定性を判定するためには，調整ダイナミクスのJacobi行列固有値を知る必要がある．すなわち，ある均衡点での全固有値 (実部) が負であれば，その解は安定である; そうでない場合，その解は不安定であり，大きな固有値を持つ固有ベクトル方向へ向かうことが判る．さらに，この固有値をモデルの鍵パラメータの関数として表現できれば，パラメータ変化に伴い特定の集積パターンへの "分岐" が発生するか否かを判定できる．

本研究の第4章で明らかにされるように，CPモデルでは，このJacobi行列固有値は，空間割引行列 $\boldsymbol{D}$ の固有値の2次関数となる．従って，$\boldsymbol{D}$ の固有値さえ得られれば，CPモデルの持つ本質的特性を，一般的に把握することができる．この固有値を明晰に解析するための鍵が，離散Fourier変換 (DFT) である．ただし，DFTが $\boldsymbol{D}$ の固有値解析に威力を発揮できるのは，次に説明する "円周都市システム" の条件と組合わされた場合である．

C) は，円周上に多数の立地点を並べるという理想化された空間条件下での分析の重要性を意味している．このような空間条件の設定は，Salop[6], Fujita et al.[2] 以降の研究では，その価値が十分には認識・活用されていないようである．しかし，この条件下での分析は，その意義が本稿でも具体的に示されるように，空間的な経済集積パターンを表現する各種モデルの特性を理解する上で，極めて重要である．以下では，この点をより具体的に説明しておこう．

集積経済現象を扱ったモデルでは，複数均衡や解の分岐といった複雑な現象が発生しうる．そのため，モデルの挙動特性は，一般に，モデル自体が持つ本質的特性とモデルの置かれた空間的境界条件の両者に依存する．実際，モデル自体は同一であっても，境界条件の設定を変えれば，表面上の均衡立地パターンは，一見，全く異なった挙動を示しうる．にも関わらず，集積経済モデルを分析した従来研究では，この2つを必ずしも明確に峻別しないまま分析している場合が多い．それに対して，円周都市システムでは，境界条件の影響を取り除き，モデル自体の持つ本質的特性を純粋な形で見ることができる．従って，円周都市システムは，CPモデルに限らず，集積経済現象を扱った様々なモデルの挙動特性を統一的に比較し，モデル間の関係を理解するための理想的な "Testbed" である．

さらに，円周都市システムでは，様々な空間経済モデルの分析が著しく容易になる．すなわち，この条件下では，空間経済モデルの最重要部品である空間割引行列 $\boldsymbol{D}$ が "巡回行列" となる．その結果，$\boldsymbol{D}$ の固有値は，その行ベクトルのDFTとして解析的かつ容易に得られる．しかも，DFT 行列の各行 (固有ベクトル) のパターンは，各都市への集積パターンと1対1対応している．そのため，各固有値を見るだけで，どの集積パターンが，どのような条件下で卓越するかを，極めて簡単に知ることができる．なお，円周都市システムの数学的に本質的な点は，空間的条件の設定が "周期境界" となっていることである．このような対称性の高い系で成立する特性には，群論的分岐理論から保証される一般性がある．このことから，上記の特性は，1次元空間に限られるものではなく，"周期境界条件" であれば，2次元空間でも成立する．従って，本稿で具体的に示す理論は1次元空間に限定されていても，その考え方自体は，2次元空間へも容易に拡張可能である．

2. 短期均衡状態のモデル

本稿では，Forslid and Ottaviano[1] と Pfluger[4] による2都市モデルを多都市の枠組みに拡張する．Forslid and Ottaviano モデル（以降，FOモデル）と Pfluger モデル (以降，Pfモデル) は，消費者の効用関数が異なる以外，同様の構造をもつため，以下では，両モデルを併記する．

(1) 都市・経済環境の設定

a) 労働者

労働者は，知識・技術水準に応じて skilled, unskilled labor に分類されると仮定する．skilled labor は，知識集約的な作業に従事する労働者であり，自らが労働・居住する都市を選択できる．unskilled labor は，労働集約的作業に従事する労働者である．また，すべての都市に一様に分布し，労働・居住する都市を選択できない．skilled, unskilled labor の総人口は，各々，H, L であり，全都市に一様に分布する unskilled labor の各都市の人口が $l = 1$ となるように人口の単位を定義する．

b) 都市経済システム

離散的な K 個の都市が存在する都市経済システムを考える．この経済には，農業部門と工業部門の2部門が存在する．農業部門は，収穫一定の技術により1種類の同質な財を生産する完全競争的な部門である．工業部門は，収穫逓増の技術により差別化された財を生産する独占競争的な部門である．ある都市で生産された財は，隣接する都市間を結ぶ交通ネットワークにより他の都市へ輸送することができる．

(2) 消費者行動

都市 i の消費者は，効用関数 $U_i(C_i^M, C_i^A)$ を所得制約 Y_i の下で最大化するように，工業財と農業財の消費量 C_i^M, C_i^A を決定する:

$$\max_{C_i^M, C_i^A} U_i(C_i^M, C_i^A) \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \quad p_i^A C_i^A + \sum_j \int_{k\in\rho_j} p_{ij}(k) q_{ij}(k) dk = Y_i, \tag{2}$$

[FOモデル]: $U_i = \mu \ln C_i^M + (1-\mu) \ln C_i^A$

[Pfモデル]: $U_i = \mu \ln C_i^M + C_i^A$

ここで，$\mu \in (0, 1)$ は工業財への支出割合を表す定数，$p_i^A = 1$ は都市 i における農業財の価格であり，ニューメレールとする．k は，工業財の種類を表すインデックスであり，常に工業財の種類が連続的かつ無限に存在すると仮定するため，連続変数とする．$p_{ij}(k), q_{ij}(k)$ は，都市 j で生産され，都市 i で消費される工業財の種類毎の価格，消費量である．また，工業財の消費量 C_i^M は，工

業財の消費量 $q_{ij}(k)$ を代替の弾力性 $\sigma > 1$ を用いて CES 関数により集計したものである．

(3) 生産者の行動と独占的競争

農業部門では，unskilled labor のみを生産要素とし，同質な財を完全競争のもとで収穫一定の技術により生産する．この場合，一般性を失うことなく，1 単位の unskilled labor により，1 単位の財が生産されると基準化できる．したがって，限界費用原理から，農業財の価格 p_i^A は，unskilled labor の賃金 w_i^L と等しい．

工業部門では，企業は Dixit-Stiglitz 型の独占的競争を行う．また，企業が工業財を生産するためには，skilled labor を α 単位と，生産量 $x_i(k)$ に応じて unskilled labor を $\beta x_i(k)$ 単位，生産要素として投入する必要があると仮定する．この仮定から，工業財の生産費用関数は，skilled labor の賃金を w_i とすると，$c(x_i(k)) = \alpha w_i + \beta x_i(k)$ と表現できる．工業部門では，企業は，この費用関数 $c(x_i(k))$，消費者の需要関数 $Q_{ji}(k)$ を所与として自ら生産する工業財の価格 $p_{ji}(k)$ を設定する:

$$\max_{\{p_{ji}(k)\}} \Pi_i(k) = \sum_j p_{ji}(k) Q_{ji}(k) - c(x_i(k)). \quad (3)$$

工業財の輸送には費用がかかり，その輸送費用は，氷塊費用の形をとると仮定する．すなわち，都市 i, j 間で 1 単位の工業財を輸送すると，$1/\phi_{ij}$ 単位だけが実際に到着し，残りは解けてしまうと考える．

(4) 短期均衡条件と均衡解の導出

都市経済システムにおいて，財の生産・消費量と賃金，財価格は，skilled labor が移住できない程，短期間で均衡すると仮定する．この状態を "短期均衡状態" と呼ぼう．短期均衡の条件下では，都市 ij 間の交易条件を表わす空間割引行列 $\boldsymbol{D} \equiv [d_{ij}] = [\phi_{ij}^{1-\sigma}]$ を利用することによって，skilled labor の間接効用関数 $\boldsymbol{V}$ を，次の命題に示すように，skilled labor の人口 $\boldsymbol{h}$ の陽関数として表現できる．

命題 1 FO, Pf モデルともに，間接効用関数 $\boldsymbol{V}$ が skilled labor の各都市の人口 $\boldsymbol{h}$ の陽関数として表現できる．

[FO モデル]

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{h}) = -\mu \boldsymbol{S}(\boldsymbol{h}) + \ln\left[\boldsymbol{w}^{(H)}(\boldsymbol{h}) + \boldsymbol{w}^{(L)}(\boldsymbol{h})\right] \quad (4)$$

[Pf モデル]

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{h}) = -\boldsymbol{S}(\boldsymbol{h}) + \frac{1}{\sigma}\left[\boldsymbol{w}^{(H)}(\boldsymbol{h}) + \boldsymbol{w}^{(L)}(\boldsymbol{h})\right] \quad (5)$$

ここで，ベクトルの各要素に対数をとる場合，$\ln \boldsymbol{w} \equiv [\ln w_0, \ln w_1, ...]^{\mathrm{T}}$ と表記した．また，

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{h}) \equiv -(\sigma - 1)^{-1} \ln \boldsymbol{T}(\boldsymbol{h}), \quad (6)$$

$$\boldsymbol{w}^{(L)}(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M} \boldsymbol{1}. \quad (7)$$

[FO モデル]

$$\boldsymbol{w}^{(H)}(\boldsymbol{h}) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\sigma} \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M} \boldsymbol{H}\right)^n\right] \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M} \boldsymbol{1}, \quad (8)$$

[Pf モデル]

$$\boldsymbol{w}^{(H)}(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M} \boldsymbol{h}, \quad (9)$$

$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{D}\boldsymbol{h}, \boldsymbol{M} = \mathrm{diag}(1/T_i(\boldsymbol{h})), \boldsymbol{H} = \mathrm{diag}(h_i)$.

3. 長期均衡状態のモデル

(1) 労働者の都市選択行動と長期均衡条件

長期的には，skilled labor は，自らの得る効用を最大化するように労働・居住する都市を選択することができる．そこで，skilled labor の都市選択及び移住行動が長期的に落ち着く状態を "長期均衡状態" と呼ぼう．

本稿で構築するモデルでは，skilled labor の都市選択に対する選好に異質性があり，都市 i を選択する skilled labor の割合 $P_i(\boldsymbol{n})$ が，LOGIT 型の選択確率:

$$P_i(\boldsymbol{h}) = \frac{\exp(\theta V_i(\boldsymbol{h}))}{\sum_j \exp(\theta V_j(\boldsymbol{h}))}. \quad (10)$$

で与えられると仮定する．ここで，$\theta \in (0, \infty)$ は，skilled labor の選好異質性を反映したパラメータである．したがって，都市 i の skilled labor 人口 h_i を決める長期均衡条件式は，次のように表わすことができる:

$$\boldsymbol{h} = H\boldsymbol{P}(\boldsymbol{h}). \quad (11)$$

ここで，$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{h}) = [P_1(\boldsymbol{h}), P_2(\boldsymbol{h}), \cdots, P_K(\boldsymbol{h})]^T$ である．

(2) 均衡解の分岐と安定性

均衡解の分岐や安定性を考えるためには，skilled labor の人口分布が均衡状態へ到達するまでの調整過程をモデル化する必要がある．ここでは，時点 t における人口パターン $\boldsymbol{h}$ が，以下の常微分方程式:

$$\dot{\boldsymbol{h}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{h}) = H\boldsymbol{P}(\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{h}. \quad (12)$$

に従って変化すると考える．これは，進化・学習ゲーム理論分野でもよく知られている LOGIT 型の Perturbed Best Response dynamics である[5]．このとき，均衡点 $\boldsymbol{h}^*$ は，次のように表わされる Jacobi 行列 $\nabla \boldsymbol{F}(\boldsymbol{h}^*)$:

$$\nabla \boldsymbol{F}(\boldsymbol{h}) = H\boldsymbol{J}(\boldsymbol{h})\nabla \boldsymbol{V}(\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{I}, \quad (13)$$

の固有値の実部が負であれば (局所的) 安定となり，均衡解 $\boldsymbol{h}$ の分岐は，Jacobi 行列 $\nabla \boldsymbol{F}(\boldsymbol{h})$ の固有値実部が符号変化する際に起こる．ここで，$\boldsymbol{I}$ は単位行列，$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{h}) \equiv [\partial P_i(\boldsymbol{V})/\partial V_j]$ である．

4. 円周都市における集積パターン解析法

本章では，第 2, 3 章で定式化された多都市 CP モデルの特性を解析的に把握する方法を示す．多都市 CP モデルの特性を探る上での最重要ポイントは，均衡解の分岐メカニズムである．このメカニズムを理解するためには，調整ダイナミクスの Jacobi 行列固有値が分岐パラメータに対してどのような特性を持つかを把握する必要がある．この具体的な解析は，一般には非常に複雑で，数値計算に頼らない限り，ほぼ不可能である．しかし，第 (1) 節で定義する円周都市システムと第 (2) 節で示す空間割引行列の固有値 $\boldsymbol{f} = [f_0, f_1, ...]^{\mathrm{T}}$ の特性 (命題 2) を活用すれば，この解析は，著しく容易になる．実際，第 (3) 節では，調整ダイナミクスの固有値が，$\boldsymbol{f}$ の簡単な関数として表現できることが示される (命題 3)．そして，第 (4), (5) 節では，命題 2 と 3 を基に，CP モデルの一般的な分岐挙動が明らかにされる．

(1) 都市システム空間の設定と空間割引行列

半径 1 の円周上に番号 $i = 0, 1, \cdots, K-1$ の順に (左回りに)$K = 2^J$ 個の都市を配置する．2 つの都市 i, j 間

の距離は $t(i,j)$ と表される．隣接する都市間の距離は均等であると仮定し，隣接していない都市間の距離は最短経路距離で定義する．すなわち，

$$t(i,j)=(2\pi/K)m(i,j). \tag{14}$$

ここで，$m(i,j)\equiv\min\{|i-j|,K-|i-j|\}$ である．

都市間の工業財の輸送に必要な氷塊費用 ϕ_{ij} は，この空間条件 $\{t(i,j)\}$ に対して定義される．すなわち，氷塊費用 ϕ_{ij} は，式 (14) で表わされる $t(i,j)$ に対して，

$$\phi_{ij}\equiv\exp(\tau t(i,j)) \tag{15}$$

と定義される．この ϕ_{ij} の定義から，空間割引行列 $\boldsymbol{D}\equiv[d_{ij}]$(2 章 (4) 節参照) は，$d_{ij}\equiv\exp[(1-\sigma)\tau t(i,j)]$ と定義され，第 j 列ベクトルは，

$$\boldsymbol{d}_j\equiv[d_{0j},d_{1j},\cdots,d_{K-1j}]^T. \tag{16}$$

円周都市システムでは，空間割引行列 $\boldsymbol{D}$ の要素の配列には "巡回行列" と呼ばれる規則性がある．すなわち，

$$r\equiv\exp((1-\sigma)\tau(2\pi/K)) \tag{17}$$

と定義すると，行列 $\boldsymbol{D}$ の (i,j) 要素は，$d_{ij}=r^{m(i,j)}$ で与えられる．

(2)　空間割引行列の固有値と離散 Fourier 変換

空間割引行列 $\boldsymbol{D}$ が巡回行列であることに着目すると，その固有値は離散 Fourier 変換により得られることがわかる．すなわち，$\boldsymbol{D}$ は離散 Fourier 変換行列 $\boldsymbol{Z}$ によって対角化される:

$$\boldsymbol{Z}^*\boldsymbol{D}\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{\Lambda}. \tag{18}$$

ここで，$\boldsymbol{\Lambda}\equiv\mathrm{diag}[\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_{K-1}]$，$\boldsymbol{Z}^*$ は $\boldsymbol{Z}$ の共役転置行列．そして，対角行列 $\boldsymbol{\Lambda}$ の対角要素は，ベクトル $\boldsymbol{d}_0$ の離散 Fourier 変換:

$$\boldsymbol{\lambda}\equiv[\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_{K-1}]^T=\boldsymbol{Z}\boldsymbol{d}_0 \tag{19}$$

により与えられる．ここで，ベクトル $\boldsymbol{d}_0$ の要素の並びが $M=K/2$ 番要素 r^M を境に反転することに注意すると，$\boldsymbol{D}$ の K 個の固有値は，$M-1$ 種の 2 重根と 2 種 $(k=0,M)$ の単根からなることが判る．さらに，上式の右辺は解析的に評価でき，結局，$\boldsymbol{D}$ の固有値は，r の簡単な関数として表現される．

さて，以降で CP モデルの分岐特性を考察する際には，行列 $\boldsymbol{D}$ をその行和 $d\equiv\boldsymbol{d}_0\cdot\boldsymbol{1}=\lambda_0$ で正規化した行列 $\boldsymbol{D}/d$ の固有値 $\boldsymbol{f}(r)$ が重要な役割を果たす．そこで，$\boldsymbol{f}(r)$ の特性を調べると，以下の結論が得られる:

命題 2: 円周都市システムにおける空間割引行列 $\boldsymbol{D}/d$ の固有値・固有ベクトルは，以下の特性を持つ．

1) 第 k 固有ベクトル $(k=0,1,\cdots,K-1)$ は，離散 Fourier 変換行列の第 k 行ベクトル:

$$\boldsymbol{z}_k\equiv[1,\omega^k,\omega^{2k},\cdots,\omega^{(K-1)k}] \tag{20}$$

によって与えられる．ここで，$\omega\equiv\exp(i(2\pi/K))$．

2) 第 k 固有値 $(k=0,1,\cdots,K-1)$ は，

$$f_k=\begin{cases}c_M(r)c_k(r) & k\text{: even}\\ c_M(r)c_k(r)\psi_M(r) & k\text{: odd}\end{cases} \tag{21}$$

で与えられ，さらに，$f_m=f_{K-m}$ が成立する．ここで，$M\equiv K/2$，

$$c_m(r)\equiv\frac{1-r^2}{1-2r\cos(2\pi m/K)+r^2}, \tag{22}$$

$$\psi_M(r)\equiv\frac{1+r^M}{1-r^M}. \tag{23}$$

3) いずれの固有値も $0\leq r<1$ の r に関する単調減少関数で，その値域は $(0,1]$ である．

4) 任意の K, $0\leq r<1$ に対して，最大固有値は第 0 固有値，最小固有値は第 M 固有値である．

(3)　調整ダイナミクス Jacobi 行列の固有値

第 3 章で示したように，CP モデル均衡解の安定性や分岐現象の有無は，調整ダイナミクスの Jacobi 行列 $\nabla\boldsymbol{F}(\boldsymbol{h})$ の K 個の固有値 $\boldsymbol{g}=[g_0,g_1,...,g_{K-1}]^{\mathrm{T}}$ によって判定できる．以下では，この $\boldsymbol{g}$ が，空間割引行列 $\boldsymbol{D}/d$ の固有値 $\boldsymbol{f}$ の簡単な関数として得られることを示そう．そのためには，まず，間接効用関数 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{h})$ の Jacobi 行列が必要である．これは，第 2 章の命題 1 で示した間接効用関数を skilled 人口 $\boldsymbol{h}$ で微分すれば，

$$\nabla\boldsymbol{V}(\boldsymbol{h})=-\nabla\boldsymbol{S}(\boldsymbol{h})+\sigma^{-1}\left[\nabla\boldsymbol{w}^{(L)}(\boldsymbol{h})+\nabla\boldsymbol{w}^{(H)}(\boldsymbol{h})\right], \tag{24}$$

と得られる (ただし，この式は Pf モデルの間接効用 Jacobi 行列である．FO モデルの Jacobi 行列については，赤松ら[7]を参照)．ここで，式 (24) 右辺の 3 つの Jacobi 行列は，3 章で定義した行列 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{H}$ を用いれば，各々，

$$\nabla\boldsymbol{S}(\boldsymbol{h})\equiv-(\sigma-1)^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{D} \tag{25}$$

$$\nabla\boldsymbol{w}^{(L)}(\boldsymbol{h})\equiv-\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{D} \tag{26}$$

$$\nabla\boldsymbol{w}^{(H)}(\boldsymbol{h})\equiv\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{M}-\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{H}\boldsymbol{M}\boldsymbol{D} \tag{27}$$

と表現される．

次に，集積パターンが創発する分岐メカニズムを以降で調べる準備として，skilled が円周上の各都市に $h=H/K$ 人ずつ均等に分散した人口分布 $\bar{\boldsymbol{h}}$ を考えよう．このとき，円周都市システム上の CP モデルでは，Jacobi 行列 $\nabla\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{h}})$ は，以下の命題に示されるように，行列 $\boldsymbol{D}/d$ の固有値・固有ベクトルによって特徴づけられることが判る．

命題 3: 円周都市システムの K 個の都市に skilled が均等に分散した均衡人口分布 $\bar{\boldsymbol{h}}$ を考える．このとき，CP モデル調整ダイナミクスの Jacobi 行列 $\nabla\boldsymbol{F}(\bar{\boldsymbol{h}})$ は以下の特性を持つ:

1) 第 k 固有ベクトル $(k=0,1,K-1)$ は，行列 $\boldsymbol{D}/d$ の固有ベクトルと同様，離散 Fourier 変換行列 $\boldsymbol{Z}$ の第 k 行ベクトル $\boldsymbol{z}_k$ で与えられる．

2) 第 0 固有値は常に -1 である．第 k 固有値 $g_k(k=1,2,\cdots,K-1)$ は，行列 $\boldsymbol{D}/d$ の第 k 固有値 f_k の 2 次関数:

$$g_k=G(f_k)\equiv\theta[bf_k-af_k^2]-1 \tag{28}$$

で与えられ，さらに，$g_m=g_{K-m}$ が成立する．ここで，a,b は CP モデルの効用関数パラメータと h,θ から決まる定数で，Pf モデルの場合，$a\equiv\sigma^{-1}(1+h^{-1})$, $b\equiv(\sigma-1)^{-1}+\sigma^{-1}$ (なお，FO モデルでも，同様の結論が得られる．詳細は赤松ら[7]参照)．

命題 3 の 1) で示された調整ダイナミクスの固有ベク

トル $\boldsymbol{z}_k$ は，その要素の配列パターンによって，各都市への skilled 人口集積パターンを表現している．例えば，$\boldsymbol{z}_0$ は，全要素が 1 であり，skilled が均等に分散した状態に対応する; 2 要素毎に 1 と −1 が交互に現れる $\boldsymbol{z}_M$ は，一つ飛びの $M(=K/2)$ 個の都市に skilled が集積したパターンを表している; 同様に，4 要素毎に 1 と −1 が現れる $\boldsymbol{z}_{M/2}$ は，$M/2(=K/4)$ 極集積パターンである．

2) で示された調整ダイナミクスの固有値 g_m は，分散均衡状態から第 m 集積パターン (第 m 固有ベクトル) 方向へ導く "純集積力" を意味している．ここで，純集積力とは，集積状態で発生する "集積効果" から "分散効果" を差し引いた効果である．より具体的には，式 (28) が f_k に関する 2 つの項から成ることに注目しよう．第 1 項は，$\nabla\boldsymbol{V}(\bar{\boldsymbol{h}})$ の導出からも明らかなように，集積によって財多様性が増加することによる "集積効果" を意味している．一方，第 2 項は，集積によって市場競争条件が厳しくなることによる "分散効果" を意味している．各集積パターンの純集積力と分散状態の安定性は，τ のレベルに応じて，複雑に変化する．そこで，以降では，τ が変化した場合に起こる均衡解の分岐挙動を，命題 2 と命題 3 を用いて，明らかにしてゆく．

(4) CP モデルにおける集積創発メカニズム

CP モデルにおいて分散均衡状態から解の分岐が発生するためには，命題 3 の式 (28) で与えられる K 個の純集積力 (固有値 $\boldsymbol{g}$) のいずれかがゼロとなる必要がある．ここで，輸送費用パラメータ τ の変化によって純集積力に影響を与える変数は，$\boldsymbol{D}/d$ の固有値 $\boldsymbol{f}$ のみである．従って，τ の変化にともなう分岐が発生するためには，f_k に関する 2 次方程式 $G(f_k)=0$ に実数根が存在する必要がある．そこで，以下では，CP モデルのパラメータが，$G(f_k)=0$ に実数根が存在する条件を満たしているとしよう．

このとき，f_k に関する 2 次方程式 (28) の解は，

$$x^*_{\pm} \equiv \frac{b \pm \sqrt{\Theta}}{2a} \tag{29}$$

と与えられる．この $x^*_{\pm}$ は，$\boldsymbol{f}$ を分岐パラメータとみたときに分岐が発生する臨界値を意味している．ただし，τ を一方向に変化 (e.g. 減少) させてゆくときの分岐を考えると，x^*_+ と x^*_- では，発生する現象が異なることに注意しよう: x^*_+ は分散状態から集積状態が創発する臨界値であり，一方，x^*_- は集積状態から分散状態へ戻る臨界値である．

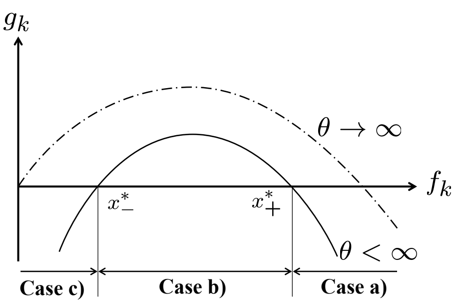
この点を具体的にみるために，$\boldsymbol{f}$ の 2 次関数である純集積力 $\boldsymbol{g}$ が正値をとるか否かに応じて，以下の 3 つの状態を考えてみよう (**図–1** 参照):

$$\text{Case a)}\ f_k > x^*_+ \quad \forall k \neq 0 \ \Leftrightarrow\ g_k < 0 \quad \forall k \neq 0 \tag{30}$$

$$\text{Case b)}\ x^*_- < f_k \leq x^*_+ \quad \exists k \ \Leftrightarrow\ g_k > 0 \quad \exists k \tag{31}$$

$$\text{Case c)}\ f_k \leq x^*_- \quad \forall k \neq 0 \ \Leftrightarrow\ g_k < 0 \quad \forall k \neq 0 \tag{32}$$

初期状態では，Case a) の条件が成立し，分散状態が安定化しているとしよう．$\boldsymbol{f}$ を分岐パラメータとして，その値を下げてゆくと，純集積力 $\boldsymbol{g}$ の値は増加し，ある集積パターン k^*_+ において Case b) の条件が満たされる．



図–1 固有値 $\boldsymbol{g}$ と $\boldsymbol{f}$ の関係と均等分散パターンの安定性

この状態では，分散パターンは不安定であるから，

$$x^*_+ = \min_k\{f_k\} = f_{k^*_+} \tag{33}$$

となったときに，集積パターン k^*_+ への分岐が発生する．そして，$\boldsymbol{f}$ の値がより低下すると，他の集積パターンでも純集積力が増加し，Case b) の条件を満たした状態が続くだろう．しかし，さらに $\boldsymbol{f}$ の値を下げると，純集積力 $\boldsymbol{g}$ は増加過程から反転して減少過程に入り，Case c) の状態 (i.e. $\boldsymbol{g} < \boldsymbol{0}$) となる．この状態では，分散パターンが安定であるから，

$$x^*_- = \max_k\{f_k\} = f_{k^*_-} \tag{34}$$

となったときに，集積パターン k^*_- から均等分散パターンへの分岐が発生する．

輸送費用パラメータ τ の値を低下させた場合に生じる分岐現象は，$\boldsymbol{f}$ を分岐パラメータとみなした上記の議論と，ほぼ同様である．分散状態から集積状態への分岐臨界値 τ^*_+ は，x^*_+ と，命題 2 から得られる $\boldsymbol{D}/d$ の固有値 $\boldsymbol{f}$ と τ との関係さえ与えられれば求められる．ここで，x^*_+ は，式 (29) によって容易に与えることができるから，CP モデルのパラメータと分岐臨界値 τ^*_+ の関係も簡単に把握できる．この点も含め，CP モデルにおいて最初に発生する分散状態から集積状態への分岐の特性を命題としてまとめておこう．

命題 4: CP モデルにおいて，輸送費用が十分に大きく，skilled が各都市に分散した均衡状態を考える．この状態から，輸送費用パラメータ τ を徐々に下げると，

1) 任意の集積パターン (固有ベクトル $\boldsymbol{z}$) に対する純集積力 (固有値 $\boldsymbol{g}$) は増加し，臨界値 τ^*_+ で集積状態への分岐が必ず発生する．
2) この臨界値 τ^*_+ は，a) skilled の立地選択の異質性が小さく (θ 大)，b) skilled 人口比率が大きく (h 大)，c) skilled の財消費代替の弾力性が小さい (σ 小)，ほど高い．

(5) CP モデルで発生する集積パターン

ここまででは，均等分散状態からの局所的解析によってわかる分岐現象のみを議論した．また，どのような集積パターンが発生するかについても具体的には言及していない．多数の都市を持つ CP モデルでは，輸送費用パラメータ τ を下げてゆくと，上記の分岐臨界値 τ^*_+ と τ^*_- の間においても，最初に創発した集積パターンから繰り返し分岐が生じ，さらに複雑な集積・分散の進展が生じうる．以下では，これらの点について，消費者が均質な

場合についてのみ，簡潔に議論しておこう (消費者が異質な場合においても類似した結論が得られる．詳細は赤松ら[7]参照).

まず，τ を低下させる過程で生じる最初の分岐では，式 (33) で見たように，均衡解は，固有値 $\{f_k\}$ が最小値をとる固有ベクトル方向へ向かう．この方向は，命題 2 により，必ず，第 M 固有ベクトル $\boldsymbol{z}_M$，すなわち，1 と-1 が交互に現れるベクトルである．従って，最初に創発する集積状態は，一つ飛びの $M = K/2$ 個の都市にのみ skilled が均等に存在する “M 極集中” パターンである．そして，さらに τ を低下させても，しばらくは，この M 極集中パターンが維持される．

この集積状態から，さらに τ を低下させると，さらなる分岐が発生する．このとき，どのようなパターンへ分岐するかを具体的に知るためには，一般には，この集積状態における調整ダイナミクスの Jacobi 行列の固有値・固有ベクトルを求める必要がある．しかし，消費者が均質なら，その具体的な計算をすることなく，どのような分岐が起こるかを容易に予想できる．ここで，“M 極集中” 状態は，M 個の都市から成る都市システムに skilled 人口が均等に分布した状態とほぼ同じとみなせることに注意しよう．これは，K 都市システムにおけるこれまでの議論と全く同様の方法で，M 極集中状態で最初に生じる分岐を把握できることを意味している．より具体的には，M 都市システムにおける空間割引行列の最小固有値を持つ第 $M/2$ 固有ベクトル方向への分岐が最初に発生する．そして，skilled が $M/2$ 個の都市にのみ均等に存在する $M/2$ 極集中パターンとなる．従って，同様の論法を再帰的に繰返すことによって，τ の低下にともない “空間的周期倍分岐” が発生すると結論できる．すなわち，τ を低下させるにつれ，

$$M = K/2 \text{ 極} \to K/4 \text{ 極} \to K/8 \text{ 極} \to \cdots \to 2 \text{ 極} \to 1 \text{ 極}$$

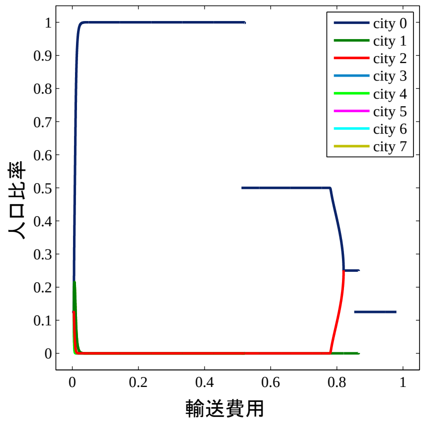
と skilled が住む都市数が半減しながら集積が進行することがわかる．斯くして，以下の命題が得られる．

命題 5: 消費者が均質な CP モデルでは，輸送費用係数 τ を徐々に減少させると，

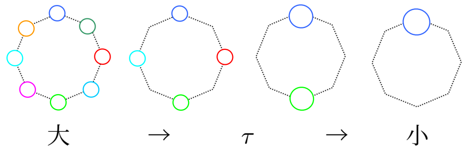
1) 最初の分岐で現れる集積状態は，必ず，skilled が一つ飛びの $K/2$ 個の都市にのみ集積したパターンである．
2) さらに τ を減少させてゆくと，必ず，skilled が集積した都市数が減少するパターンへ進化し，最後に 1 極集中化する．
3) 上記 2) の過程では，その典型例として，“空間的な周期倍分岐” 型の集積進展経路が存在する．

以上では，分岐の大域的特性の概略傾向を述べたが，より詳細な点については，計算分岐理論に基づく数値計算によって調べるのが賢明である．そこで，数値計算により，FO モデルにおける分岐の大域的特性の詳細を確認しよう (ただし，ここで得られる結果は，FO モデルに限定されるものではなく，Pf モデルでも共通であることを確認している).

消費者が均質な場合の均衡解は，パラメータを $H = 2, L = K = 8, \mu = 0.4, \sigma = 2.0, \alpha = 1, \beta = 1, \theta = 400$ と



図–2 消費者が均質な場合の均衡状態



図–3 消費者が均質な場合の人口集積パターンの推移

した場合，**図–2** の通りとなった．ここで，図の縦軸は，skilled labor の人口割合 h_i/H，横軸は，輸送費用 $1 - r$ である．また，輸送費用パラメータ τ が徐々に減少していく過程での人口集積パターンの変化は，**図–3** に示した．この結果から，均衡解が輸送費用の低下に伴い，「分散 → 四極集中 → 二極集中 → 一極集中」と推移していることがわかる．これは，前章の命題 5 と整合的な周期倍分岐型の集積進展経路となる結果であり，消費者が均質な場合について，CP モデルの集積進展経路が周期倍分岐型であることが明らかとなった．

5. おわりに

本研究は，新経済地理学 (NEG) 分野で開発された 2 都市 Core-Periphery(CP) モデルを多都市システムの枠組に拡張し，その均衡解の分岐 (少数都市への産業・人口集積) 特性を明らかにした．CP モデルに関する従来研究は，その大半が 2 都市モデルの解析に留まっている．その最大の理由は，多都市モデルで生じる分岐解析の困難さにある．この問題に対し，本稿では，空間割引行列，離散フーリエ変換，円周都市システムの 3 つの鍵概念を組合わせたアプローチを提示した．そして，その分析法を用いれば，この分岐の基本的な仕組みは容易に理解できることが示された．

参考文献

1) Forslid, R. and Ottaviano, G.: An Analytically Solvable Core -Periphery Model, *Journal of Economic Geography,* Vol.3, 229-240, 2003.
2) Fujita, M. Krugman, P., and Venables, A.J.: *The Spatial Economy,* MIT Press, 1999.
3) Krugman, P.: Increasing Returns and Economic Geography, *Journal of Political Economy 99,* 483-499, 1991.
4) Pfluger, M.: A Simple Analytically Solvable, Chamberlinian Agglomeration Model, *Regional Science and Urban Economics,* Vol.34, 565-573, 2004
5) Sandholm, W.H.: *Population Games and Evolutionary Dynamics,* MIT press, 2009.
6) Salop, S.: Monopolistic Competition with Outside Goods, *Bell Journal of Economics,* Vol.10, pp.141-156, 1979.
7) 赤松隆・高山雄貴・池田清宏・菅澤晶子: 1 次元都市システムにおける人口集積パターンの創発メカニズム, 投稿中.