動的均衡配分問題の安定性について*

On the Stability of Dynamic User Equilibrium Assignments*

井料隆雅**
By Takamasa IRYO**

1．はじめに

本稿では，動的均衡配分問題における均衡状態の安定性を議論する．均衡配分問題において均衡状態が安定して存在できるかどうかを検証することは，均衡状態が現実の交通状況において実現するかどうかを知るために重要になる．均衡状態（確定的な均衡状態）は「どの利用者も現状の自身の選択（経路選択や出発時刻選択）を変更する意思を持たない状態」となるように定式化されるため，いったん交通状況が完全に均衡状態に到達すれば，その均衡状態は永遠に継続する．しかし，何らかの理由により交通状況が均衡状態でなくなった場合，日々のドライバーの行動変化を通じて交通状況が自然に均衡状態へむかう方向に変化することは必ずしも自明ではなく，いったん交通状況が均衡状態からはずれたら，二度と均衡状態は実現しないかもしれない．交通状況には多くの摂動要因があると考えるべきなので，このような場合には均衡状態は安定して存在しえず，結果として，現実の交通状況を直接反映してくれるものとはいえなくなる．

均衡状態が安定して存在するかどうかを解析する際には，交通状況が日々のドライバーの行動変化を通じてどのように変化していくかを記述する動学モデル(Day-to-day Dynamics)を設定する必要があるので，解析の結果は当然ながらそのモデルに依存する．どのようなモデルを使用するかを決めることは一般には簡単なこととはいえないが，もし，「考えている均衡配分問題の均衡解が，何らかのDay-to-dayモデルで安定して存在するチャンスがあるか」を知りたいのであれば，できるだけ安定しそうなDay-to-dayモデルを採用するのがよいだろう．本稿でも，そのような興味のもとに，すくなくともより簡単な問題である静的均衡配分で安定性を確保してくれるようなDay-to-dayモデルを用いる．

一般的な静的均衡配分の均衡状態が安定して存在することを保証するDay-to-dayモデルの１つに，Smithにより提案されたものがある[1]．このモデルでは経過日数を離散的な値（当然ながら日数は本来離散的な値である）でなく連続値として考え，利用者の行動変化が確定的（＝確率的ではない）に定まるようにモデル化している．このモデルにより，リンク間相互作用が対称な静的均衡配分では均衡状態が安定して存在できることが，Lyapunov関数を用いることにより示されている．

動的均衡配分においては，限定された型の問題で安定性が示されている一方，一部の型の問題では均衡状態が安定して存在できない可能性が指摘されている．まず，Smith and Wisten[2]により，１経路が１個しかボトルネックを含まず利用者が出発時刻を変更しない場合に，このDay-to-dayモデルによって交通状況が必ず均衡状態に収束する可能性が指摘されている（数学的な厳密性をもった証明はMounceが示している[3]）．いっぽう，利用者が目的地到着時刻に選好を持ち，それを考慮して出発時刻を選択する場合には，同じDay-to-dayモデルを用いても均衡状態が安定するとは限らないことがIryo[4]により指摘されている．このように，静的均衡配分ではかなり一般的な条件で成立した均衡状態の安定性が，動的均衡配分では必ずしも普遍的には成立しないことがわかる．

本稿では，上述の既存研究のレビューを通じ，動的均衡配分の均衡解の安定性に影響する要因を示し，どのような場合に安定性が損なわれるかを考察する．

2．Lyapunov関数による１経路１ボトルネックネットワークでの均衡状態の安定性

本節では，動的均衡配分において安定性を担保する要因を考察するために，出発時刻選択がない１経路１ボトルネックネットワークにおける動的均衡配分問題の安定性を証明したMounceによる研究[3]をレビューする．

Mounceの研究ではSmithが静的均衡配分を対象に提案したDay-to-dayモデルを採用している．このモデルは，

$$\frac{\mathrm{d}X_r^\tau(t)}{\mathrm{d}\tau}=\sum_{\forall s\sim r}\left\{\begin{array}{l}X_s^\tau(t)\left[C_s\left(t,\mathbf{X}^\tau\right)-C_r\left(t,\mathbf{X}^\tau\right)\right]_+\\-X_r^\tau(t)\left[C_r\left(t,\mathbf{X}^\tau\right)-C_s\left(t,\mathbf{X}^\tau\right)\right]_+\end{array}\right\} \qquad (1)$$

と書ける（数式表記は原著から改変している；以下同

---

*キーワーズ：動的均衡配分，均衡状態の安定性

**正員，博士（工学），神戸大学大学院工学研究科
市民工学専攻（神戸市灘区六甲台町1-1,
TEL/FAX 078-803-6360）

じ）．ここで，t は出発地出発時刻，τ は経過日数（連続値），r,s は経路，$\forall s\sim r$ は，経路 r と同一のODペアを結ぶ経路を経路 s として数え上げることを意味する．$X_r^\tau(t)$ は τ 日目に時刻 t （0 以上 1 以下の値）に経路 r へ流入する車両の交通流率，$C_r(t,\mathbf{X}^\tau)$ は，各経路へ流入する交通流率の関数がベクトル $\mathbf{X}^\tau$ で与えられるときに，時刻 t に経路 r へ流入する車両の経路旅行時間を示す．大括弧[ ]の右下に＋がついているのは，括弧内の値が非負のときはそのままの値を，負のときには0 を用いることを示す．式(1)は「利用者はより費用が高い経路から低い経路に順次移動する．その移動速度は『経路費用の差』×『高い経路の利用者数』に比例する」というメカニズムを記述している．また，Wardrop 均衡が成立すれば，式(1)の右辺はつねに 0 になる（＝どの利用者も現状の経路選択を維持する）ことは容易に確認できる．

Mounce が採用した Lyapunov 関数は

$$V\left(\mathbf{X}^\tau\right)=\sum_{\forall r}\sum_{\forall s\sim r}\left\{\int_0^1 X_s^\tau(t)\left[C_s\left(t,\mathbf{X}^\tau\right)-C_r\left(t,\mathbf{X}^\tau\right)\right]_+^2\mathrm{d}t\right\} \tag{2}$$

である．Lyapunov 関数は，均衡状態で 0 であり，均衡状態以外では正の値をとり，さらに，τ による微分がつねに正である必要がある．このような Lyapunov 関数をある Day-to-day モデルに対して発見できれば，均衡状態は安定（漸近安定）であることが言えたことになる．ここで，式(2)の関数が前者２点を満たすことは容易に確認できる．問題は最後の１点である．これを確認するためには式(2)を τ で微分してみる必要がある．

式(2)を τ で微分すると，$X_s^\tau(t)$ を τ で微分した項と，その後の大括弧部分を τ で微分した項との２つの項が現れる．前者の項は，$X_s^\tau(t)$ の τ 微分を式(1)の右辺で置き換えることにより整理でき，Mounce の論文では，この項がつねに負になることが示されている．なお，$X_s^\tau(t)$ の τ 微分が均衡状態では0 になることから，この項は均衡状態では0 になり，均衡状態の近傍では絶対値が十分小さい値になることに注意したい．いっぽう，後者の項は，最終的に

$$-2\int_0^1\frac{\mathrm{d}\mathbf{X}^\tau(t)}{\mathrm{d}\tau}\bullet\delta\mathbf{C}\left(t;\mathbf{X}^\tau,\frac{\mathrm{d}\mathbf{X}^\tau(t)}{\mathrm{d}\tau}\right)\mathrm{d}t \tag{3}$$

と計算できる．ここで，$\delta\mathbf{C}(t;\mathbf{X}^\tau,\mathbf{x})$ は，$\mathbf{C}(t,\mathbf{X}^\tau)$ （全経路の $C_r(t,\mathbf{X}^\tau)$ を含むベクトル）を，$\mathbf{X}^\tau$ について $\mathbf{x}$ 方向に微分した関数を意味する．

式(3)は，経路旅行時間 $\mathbf{C}(t,\mathbf{X}^\tau)$ が交通流率 $\mathbf{X}^\tau$ に対して単調増加であれば必ず0 または負になる．このことは，式(3)を微分に関する数学的厳密性を考慮せず，便宜的に変形したもの

$$-2\sum_{\forall r}\int_0^1\Delta X_r^\tau(t)\left\{C_r\left(t;X_r^\tau+\Delta X_r^\tau(t)\right)-C_r\left(t;X_r^\tau(t)\right)\right\}\mathrm{d}t \tag{4}$$

（$\Delta X_r^\tau(t)$ は X_r^τ の微分に τ の微小量 $\Delta\tau$ をかけたもの）を見ればよりわかりやすいだろう．一般に，関数 f が単調増加であるとは，２つの関数の引数 x, y の差と，$f(x)$，$f(y)$ の差の積（内積）がつねに非負である，と定義される．式(4)は，$\mathbf{X}^\tau$ と $\mathbf{X}^\tau+\Delta\mathbf{X}^\tau$ の差と，$\mathbf{C}(t,\mathbf{X}^\tau)$ と $\mathbf{C}(t,\mathbf{X}^\tau+\Delta\mathbf{X}^\tau)$ の差の内積を記しているため，経路旅行時間 $\mathbf{C}(t,\mathbf{X}^\tau)$ が交通流率 $\mathbf{X}^\tau$ に対して単調増加ならば，先頭のマイナス符号を含めれば，正になることは決してない．以上のことより，経路旅行時間の経路交通流率に対する単調増加性が，動的均衡配分の安定性を議論する際のひとつのポイントであることがわかる．少なくとも，この単調増加性は安定性の十分条件であることは確かである．

経路旅行時間の経路交通量に対する単調増加性は，一見，当然のことのように思える．実際，静的な交通流を前提とするのであれば，各リンクでのリンク旅行時間関数が単調増加であれば，経路に対する単調増加性は容易に証明できる．動的配分問題ではこれは自明なことではない．ただし「各経路が１本しかボトルネックを含まないネットワーク」ではこれが証明されている[5]ので，そのようなネットワークにおける均衡状態の安定性は以上の解析で証明できたことになる．

ただし，ここで注意したいのは，上述の単調増加性は安定性のための「十分条件」であって，必要条件ではない，ということである．式(2)を τ で微分した項のうち，第１項はつねに負であり，式(1)で示される $X_s^\tau(t)$ の τ 微分の値を考えれば，この第１項の絶対値は均衡状態から離れているときは相当大きくなることが想像できよう．このような交通状況において単調増加性がくずれ，その結果第２項が正になったとしても，２つの項を合計した値は負になり，均衡状態の安定性には特段の影響を与えない．以上の考察は，「経路旅行時間の交通流率に対する単調増加性が『均衡状態の近傍で』崩れるときに，均衡状態の安定性が損なわれる可能性が高い」ということを示唆しているといえよう．

３．出発時刻選択問題の均衡状態の不安定性

本節では，出発時刻選択問題（いわゆるVickreyモデル[6]）の均衡状態が，前節と同様のDay-to-dayモデルでは安定しない可能性があることを示した既存研究[4]をレビューする．この研究では，出発時刻選択問題として「ODペアは１個」「ボトルネックは１個」「経路選択肢は１本」「すべての利用者は（希望到着時刻を含めて）同一の一般化旅行費用の関数を持つ」という，もっ

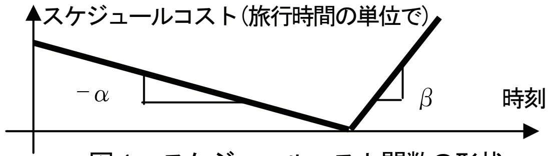

図１　スケジュールコスト関数の形状

とも簡単なものを想定している．スケジュールコスト関数としては図１のようなものを採用している．Day-to-dayモデルとしては，式(1)の経路選択を出発時刻選択に置き換えたもの，すなわち

$$\frac{\mathrm{d}X^{\tau}(t)}{\mathrm{d}\tau}=\int_0^1\left\{\begin{array}{l}X^{\tau}(u)\left[C\left(u;X^{\tau}\right)-C\left(t;X^{\tau}\right)\right]_+\\-X^{\tau}(t)\left[C\left(t;X^{\tau}\right)-C\left(u;X^{\tau}\right)\right]_+\end{array}\right\}\mathrm{d}u \qquad (5)$$

を用いている．ここで，$X^{\tau}(t)$ は時刻t にボトルネックに到着することを選んだ車両の交通流率，$C(t,X^{\tau})$ は時刻t にボトルネックに到着する車両の一般化交通費用（ボトルネックでの遅れ時間＋目的地でのスケジュールコスト）である．また，Lyapunov 関数となりうるとした（後述のように実際にはならない）関数として，

$$D\left(X^{\tau}\right)=\int_0^1\int_0^1 X^{\tau}(u)\left[C\left(u,X^{\tau}\right)-C_r\left(v,X^{\tau}\right)\right]_+^2\mathrm{d}u\mathrm{d}v \qquad (6)$$

を用いている．関数 D をτ で微分すれば，第２節と同様に，その第１項として均衡状態以外では負になり，その近傍では絶対値が十分小さい値になる式が得られる．

問題は関数Dをτ で微分して得られる項のうち，第２項のほうである．この項は，

$$-2\int_0^1\frac{\mathrm{d}C\left(t;X^{\tau}\right)}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}X^{\tau}}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}t \qquad (7)$$

と計算できる．式(7)は，第２節の式(3)に対応するものであり，もし，費用関数$C(t,X^{\tau})$ が交通流率 $X^{\tau}(t)$ に対して単調増加関数であれば，式(7)は負の値をとり，結果として均衡状態は安定して存在できる．しかし，式(7)を実際に計算すると，

$$\mu(\alpha+\beta)\left(\frac{\mathrm{d}w_O\left(X^{\tau}\right)}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 \qquad (8)$$

となることがこの研究では示されている．ここでμ，α，β はそれぞれボトルネックの容量，単位時間あたりの早着費用，単位時間あたりの遅刻費用であり，いずれも正の値を持つ．$w_O(X^{\tau})$ は，車両のボトルネックへの流入交通流率がX^{τ} で示されるときに，目的地へ希望時刻に到着した車両がボトルネックでこうむった遅れ時間を示す．なお，ここではどの車両も同じ希望到着時刻を持っているため，$w_O(X^{\tau})$ は車両によらず一意に決まることに注意したい．明らかに式(8)は負の値はとることはない．さらに，$w_O(X^{\tau})$ が日々変動している時には

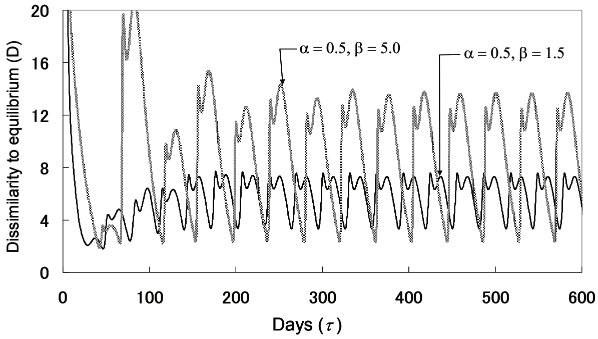

図２　関数Dと経過日数τ の関係[4)]

必ず正の値をとる．このことは，均衡状態の近傍で関数Dのτ 微分が正の値をとる可能性があることを示す．

関数Dのτ 微分が均衡状態の近傍で正の値をとりうるということは，関数Dはτ が増加しても0に収束することなく，ずっと正の値をとりつづけることがある可能性を意味する．このような場合には均衡状態が安定的に存在することはできない．そのかわりに，交通状況は均衡状態に近い状態にとどまるものの，完全には均衡状態にならずに，τ の増加にしたがって周期的に変動することが予想される．なお，以上の議論は，本当に均衡状態が安定に成立しないことを数学的に証明しているわけではない．この既存研究では，近似的な計算と，数値計算の両方によってそのようなことがおきうることを示している．図２に，数値的に計算された関数Dとτ の関係を示すグラフの一例を示す．

以上で紹介したような，出発時刻選択問題における均衡状態が安定して存在しないことは，出発時刻選択問題におけるスケジュールコスト関数が持つ非単調増加性に原因がある可能性を指摘することができる．この問題において均衡状態への収束を阻害する要因は，式(7)と式(8)を比較すればわかるように，費用関数が交通流率に対して必ずしも単調増加にはならないことである．出発時刻選択問題の費用関数を構成するスケジュールコストは図１のような関数である．この関数は希望到着時刻近辺で傾きが負から正に変わる．このように，出発時刻選択問題では，費用関数そのものに単調増加性を失わせるような要因が入っていることが，均衡状態の安定性を損ねている原因になっていると考察することができよう．

４．一般ネットワークにおける均衡状態の安定性の考察

本節では，前節までのレビューの結果を踏まえ，出発時刻選択がない一般ネットワークにおける均衡状態の安定性に関する考察を行う．それにより，どのようなネットワークで安定性のない均衡状態が存在しうるかを考察することを行う．

第２節，第３節までに示したように，均衡状態の安定

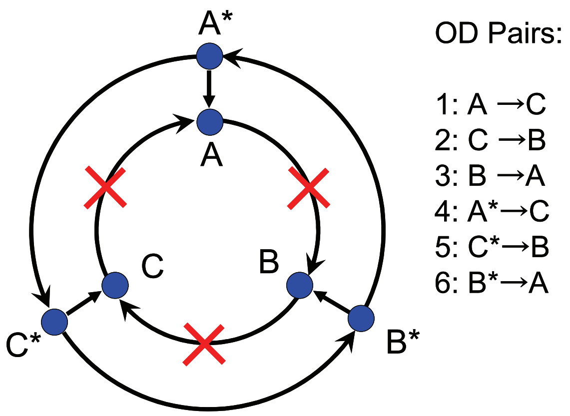

図３　ループ状ネットワークの例[9]

性を決めるひとつの鍵は「費用関数が交通流率に対して単調増加関数になるか」ということである． そして，１経路１ボトルネックであれば，それは一般に成立することはすでにわかっている．ということは，少なくとも，１経路に２つ以上のボトルネックがあるケースにおいて，費用関数の単調増加性に対する反例を探す必要がある．実際，このような反例はすでに示されており[7),8)]，これが，第２節で示したMounceの証明が一般ネットワークにすぐには適用できない根拠になっている．

ただ，第２節で指摘したように，費用関数が単調増加でないことは，均衡状態の安定性を損ねることには直結しないことに注意したい．もし，単調増加性が損なわれる場面が均衡状態から遠い場所に限定されるのであれば，Lyapunov関数の単調減少性を崩すにはいたらず，均衡状態の安定性がそのまま保存されることは十分にありうる．安定性が損なわれるには，第３節で示した出発時刻選択問題の例のように，均衡状態の近傍で単調増加性が損なわれることが必要になるといえよう．

安定しない均衡状態が存在しうるネットワークの候補として，図３のようなループ状のネットワークを挙げることができよう．このようなネットワークでは，ある経路の交通流率の変動の影響がネットワークを１周して自身に返ってくることがありうる．これが単調増加性や安定性にどう影響するかは本稿では詳説しない．ただ，動的均衡配分をNash均衡として定式化した別の研究では，このようなネットワークでNash均衡の純粋戦略解が存在しないことがあることが指摘されている[9)]．純粋戦略解が存在しなければ，確定的なDay-to-dayモデルの下では均衡状態へ収束しないので，本稿で考察したWardrop均衡による問題においても同様の不安定性が出る可能性を指摘できよう．このことは本稿で要因とした単調増加性とは直接関係ないが，少なくともこのような形状のネットワークが安定性のない均衡状態が存在するネットワークのひとつの候補となることを示すものといえる．

５．おわりに

本稿では，動的均衡配分における均衡状態の安定性について，既存研究のレビューからその要因を考察した．既存研究により，均衡状態の安定性には費用関数の単調増加性が重要なことを指摘した．また，ループ状のネットワークにおいて，安定でない均衡状態が存在する可能性を示した．ポスター発表では，ループ状を含めたいくつかのネットワークにおける計算例を示す予定である．

謝辞：本稿は科学研究費補助金(若手(B) 20760347)による研究成果を含む．この場を借りて感謝の意を表する．

参考文献

1) Smith, M.J., The Stability of a Dynamic Model of Traffic Assignment - an Application of a Method of Lyapunov, *Transportation Science*, **18**(3), 245-252, 1984.
2) Smith, M.J. and Wisten, M.B., A Continuous day-to-day Traffic Assignment Model and the Existence of a Continuous Dynamic User Equilibrium, *Annals of Operations Research*, **60**, 59-79, 1995.
3) Mounce, R., Convergence in a Continuous Dynamic Queueing Model for Traffic Networks, *Transportation Research Part B: Methodological*, **40**(9), 779-791, 2006.
4) Iryo, T., An Analysis of Instability in a Departure Time Choice Problem, *Journal of Advanced Transportation*, **42**(3), 333-356, 2008.
5) Smith, M.J. and Ghali, M., Dynamic Traffic Assignment and Dynamic Traffic Control, in *Transportation and Traffic Theory: Proceedings of the Eleventh International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, M. Koshi, Editor, Elsevier Science Publishing: New York. 273-290, 1990.
6) Vickrey,W.S., Congestion Theory and Transport Investment, *The American Economic Review*, **59**(2), 251-260, 1969.
7) 桑原雅夫，渋滞したネットワークにおける動的均衡配分に関する考察，土木学会論文集，No. 419/IV-13,123-126, 1990.
8) Mounce, R., Non-monotonicity in Dynamic Traffic Assignment Networks, *Proceedings of the 33rd Universities Transport Study Group annual conference*, University of Oxford, UK, 2001.
9) Iryo, T., On the Existence of Pure Nash Equilibrium in Dynamic Traffic Assignments, *Second International Symposium on Dynamic Traffic Assignment*, Leuven, Belgium, CD-ROM, 2008.