

# シミュレーティッド・アニーリング及びペナルティ関数を用いた 均衡制約付最適化問題の一解法：金沢市道路ネットワークへの適用を例に\*

An Algorithm for Optimization Problems with Equilibrium Constraints

Using the Simulated Annealing and Penalty Function : An Analysis of Kanazawa Road Network\*

穴口智也\*\*・中山晶一郎\*\*\*・高山純一\*\*\*\*

By Tomonari ANAGUCHI\*\*・Shoichiro NAKAYAMA\*\*\*・Jun-ichi TAKAYAMA\*\*\*\*

## 1. はじめに

交通ネットワークの計画・分析の際、研究・実用上、交通ネットワーク均衡モデルは重要な役割を果たしている。実際に交通ネットワーク均衡モデルを適用する際には、各種パラメータの設定が必要となる。旅行時間関数のパラメータ、経路選択モデルパラメータ、交通容量の設定パラメータなど多くあり、広い意味で捉えると OD 交通量もパラメータと位置付けることもでき、重要なパラメータ推定と言える。現在、多くの場合、パラメータは調査や過去の実例や研究から設定されることが多い。しかし、リンク交通量データ等を用いて、交通ネットワーク均衡モデルと整合性を保ち、内生的にパラメータを推定し、それを用いることも極めて重要と考えられる。

交通ネットワーク均衡の制約の下でパラメータを推定しようとする場合、均衡制約下での最適化問題となる。ロジット型利用者均衡モデルを用いた均衡制約付最適化問題を取り扱った研究として、中山・高山<sup>1)</sup>、Chen・Alfa<sup>2)</sup>、Davis<sup>3)</sup>、Yang・Meng ら<sup>4)</sup>、Lo・Chan<sup>5)</sup>、Ying・Yang<sup>6)</sup>などの研究がある。これらの研究では、Dial アルゴリズムやその他の方法で配分を行い、その結果得られた交通量を用いて感度分析により計算できる最適化目的関数の勾配などを用い、最適化計算を行っている。

最適化問題の目的関数としてのパラメータを推定するための二乗誤差の関数や尤度関数が凸であり、均衡制約も凸集合である場合、解の一意性が保証されるが、均衡制約は凸集合とならないことがほとんどであると思われる。また、二乗誤差関数や尤度関数が凸であるかはそれぞれのネットワーク形状等に依存する部分がある。通常、感度分析を用いて、均衡制約を考慮した上で、上位の最適化問題の目的関数の勾配方向等を計算し、これを用いて通常の最適化アルゴリズムにより計算を行う。均衡制

\*キーワードズ：交通ネットワーク分析

\*\*学生員，金沢大学大学院自然科学研究科

(石川県金沢市角間町，E-mail : t-ana@stu.kanazawa-u.ac.jp)

\*\*\*正会員，博(工)，金沢大学環境デザイン学系

(TEL : 076-423-4614, E-mail : snakayama@t.kanazawa-u.ac.jp)

\*\*\*\*フェロー会員，工博，同上

(TEL : 076-423-4613, E-mail : takayama@t.kanazawa-u.ac.jp)

約付最適化問題では、このような通常の最適化手法を用いると、局所解に陥る可能性がある。均衡制約付最適化問題を解く場合のもう一つの問題点は、通常の手法の場合、上位の最適化問題の計算ステップごとに、均衡配分を行う必要があることである。各ステップの上位の最適化問題の目的関数の勾配計算には、それぞれのステップでの均衡配分交通量等が必要となる。均衡配分の計算には時間がかかるため、それは問題となる。

そこで、本研究では、均衡制約付最適化問題の解法として、均衡制約をペナルティ関数として、目的関数に入れ、通常の無制約最適化問題として再定式化し、その最適化問題をシミュレーティッド・アニーリング(Simulated Annealing, SA)により解く手法を提案する。これにより、最適化問題の計算で毎ステップごとに毎回均衡配分する必要はなくなり、また、シミュレーティッド・アニーリングにより、局所解に陥ってもそこから脱出し、大域解を得られることが期待できる。本稿では、仮想単純ネットワーク、金沢市道路ネットワークを対象に、ロジット型利用者均衡モデルの交通量配分のパラメータを最尤推定法で推定する問題を上述の手法を用いて計算し、その妥当性などについて検討する。

## 2. ロジット型確率ネットワーク均衡のパラメータ推定問題

### (1) ロジット型確率ネットワーク均衡

本稿では、OD 交通量はポアソン分布に従って確率変動しており、各利用者はロジットモデルに従った経路選択を行っているとして仮定する。この場合、経路交通量も独立なポアソン分布に従う。

OD ペア  $i$  の経路  $j$  の経路交通量の平均を  $m_{ij}$  とする。経路交通量が十分に大きい場合、ポアソン分布の平均と分散はともに  $m_{ij}$  であるため、中心極限定理により平均と分散がともに  $m_{ij}$  である正規分布  $N[m_{ij}, m_{ij}]$  に従うと近似することができる。ポアソン分布は取り扱いが難しいため、経路交通量は独立な正規分布とみなす。このとき、経路交通量から得られるリンク交通量ベクトル  $\mathbf{x}$  は以下の多変量正規分布として与えることができる。

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right\} \quad (1)$$

ただし、 $\boldsymbol{\mu}$  は平均リンク交通量ベクトルでその要素は  $\mu_a$ 、 $\boldsymbol{\Sigma}$  はリンク交通量の分散共分散行列、 $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$  は  $\boldsymbol{\Sigma}$  の逆行列、 $|\boldsymbol{\Sigma}|$  は  $\boldsymbol{\Sigma}$  の行列式、 $n(=|A|)$  はリンク総数である。

また、本稿では実用的に利用可能なロジットモデルによる経路選択確率を仮定する。各道路利用者は次式のロジットモデルに従い、経路選択確率  $p_{ij}$  を決定していると仮定する。

$$p_{ij} = \frac{\exp(-\theta \bar{c}_{ij})}{\sum_{j' \in J_n} \exp(-\theta \bar{c}_{ij'})} \quad (2)$$

ここで、 $\bar{c}_{ij}$  は OD ペア  $i$  の経路  $j$  の平均旅行時間、 $\theta$  はパラメータである。確率的ネットワーク均衡モデルを定式化するにあたり、式(2)を含んだ関数

$$\mathbf{g} = (g_{11}, \dots, g_{21}, \dots)^T \quad (3)$$

を考える。関数  $\mathbf{g}$  の要素  $g_{ij}$  を以下のように定義する。

$$g_{ij}(\mathbf{m}) = \lambda_i \frac{\exp(-\theta \bar{c}_{ij}(\mathbf{m}))}{\sum_{j' \in J_n} \exp(-\theta \bar{c}_{ij'}(\mathbf{m}))} \quad (4)$$

確率ネットワーク均衡は関数 (写像)  $\mathbf{g}$  に関する以下の不動点問題として定式化できる。

$$\mathbf{m} = \mathbf{g}(\mathbf{m}) \quad (5)$$

以上のような、経路選択がロジットモデルにより行われ、交通量及び旅行時間が確率変動する交通均衡をロジット型確率ネットワーク均衡と呼ぶことにする。

## (2) 最尤推定法

リンク交通量の観測が行われた場合の観測リンク交通量を  $\tilde{\mathbf{x}}$  とする。観測リンク交通量は式(1)の分布の周辺確率として以下の確率密度関数に従う。

$$f_{\tilde{\mathbf{x}}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\boldsymbol{\mu}})^T \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}(\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\boldsymbol{\mu}})\right\} \quad (6)$$

観測リンク交通量の生起確率が最も高くなるようなパラメータ推定、すなわち、最尤推定を行う。上記の確率密度関数の対数を対数尤度関数  $L(\boldsymbol{\theta}|\tilde{\mathbf{x}})$  とする。

以下に示すように、前節で述べた確率ネットワーク均衡が下位問題となった均衡制約付最適化問題として、最尤推定法を用いた  $\boldsymbol{\theta}(= \theta_k (k \in K))$  を求めるパラメータ推定を定式化することができる。

$$\max_{\boldsymbol{\theta}} L(\boldsymbol{\theta}|\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{m}) \quad (7a)$$

$$s.t. \quad \mathbf{m} = \mathbf{g}(\mathbf{m}) \quad (7b)$$

なお、ロジットモデルのパラメータを推定する場合、対数尤度関数に  $\theta$  は陽には入っておらず、 $L(\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta})|\tilde{\mathbf{x}})$  という表記の方が適しているとも言える。

## 3. 均衡制約付最適化問題の解法

### (1) ペナルティ関数の導入

通常、均衡制約付最適化問題の計算では、感度分析を用いて、均衡制約を考慮した上で、上位の最適化問題の目的関数の勾配方向等を計算し、これを用いて最適化アルゴリズムにより計算を行う。しかし、目的関数の値の計算(今回の場合、対数尤度関数の値の計算)には、平均経路交通量が必要となる。感度分析による勾配方向の計算に均衡配分が必要である。したがって、対数尤度関数の最大化の計算には、毎ステップごとに(確率ロジット)均衡配分が必要となり、計算に非常に時間がかかってしまう。なお、本稿では、このような通常の均衡制約付き最適化問題の解法を二段階計算法と呼ぶことにする。

このような計算コストがかかる問題を回避するために、均衡制約をペナルティ関数として目的関数に付加する方法がある。例えば、Connors, Smiths<sup>7)</sup>らは、先に均衡制約条件を満たす交通量ベクトルを直接算出するのではなく、均衡制約条件に新たなパラメータを掛け合わせて、目的関数に組み込んで同時にパラメータを推定する手法を提案している。

### (2) シミュレーティッド・アニーリングによる局所解からの脱出

もう一つの均衡制約付最適化問題の計算での問題点は、局所解の問題である。(上位の)最適化問題の目的関数が凸であり、均衡制約も凸集合である場合、解の一意性が保証されるが、均衡制約は凸集合でない場合がほとんどであると考えられる。また、尤度関数が凸であるのかどうかはそれぞれのネットワーク形状等に依存する部分があるため、計算において局所解に収束する可能性がある。本研究では、このような問題に対処するためにシミュレーティッド・アニーリングを最適化計算に導入する。

焼きなまし(Annealing)とは金属を急激に加熱して分子の動きを活発にしてエネルギーの高い溶融状態にし、その後ゆっくりとエネルギーの低い結晶状態へ冷却することによって内部の欠陥を取り除いて安定した金属を作る手法である。最適化問題における目的関数の最小化の過程と焼きなましの密接な類似性を模倣し、確率的なゆらぎを導入した最適化手法がシミュレーティッド・アニーリング(Simulated Annealing, SA)である。

最急降下法やニュートン・ラフソン法等の通常最適化アルゴリズムでは、一旦局所解に陥ってしまうとそこから脱出は困難となる。そこで、確率的なゆらぎを導入して局所解からの脱出を可能とし、最適解への収束を可能とすることができる。これは、以下のような式に書くことができる。

$$\theta_h = \theta_{h-1} + \Delta\theta_{h-1} + \varepsilon_h \quad (8)$$

ここで、 $h$  は更新回数、 $\Delta\theta_{h-1}$  は  $h-1$  番目のパラメータから  $h$  番目のパラメータへの変化量、 $\varepsilon_h$  はゆらぎ項である。仮に一旦局所解に陥って右辺第2項の変化量がほぼ0になったとしても、右辺第3項のゆらぎ項  $\varepsilon_h$  により局

所解の近傍をランダムウォークするため、最急降下法やニュートン・ラフソン法のような従来用いられている最適手法に比べて局所解から脱出できる可能性、すなわち大域的最適解への収束性が大幅に向上することが知られている。

また、式(8)におけるゆらぎ項  $\varepsilon_h$  は以下のように表現することとする。

$$\varepsilon_h = \gamma \times \sqrt{T(h)} \quad (9)$$

ここで  $\gamma$  は標準正規分布 (平均値 0, 標準偏差 1) に従う正規乱数,  $T(h)$  は温度減少関数,  $h$  は反復計算回数である。温度減少関数  $T(h)$  とは、ゆらぎ、すなわち生成した正規乱数を計算回数に応じて徐々に減少させていくための関数であり、焼きなまし法を効果的に実行するためには最も重要な関数である。本研究ではより高速に温度減少関数が小さくなる、Szu・Hartley<sup>8)</sup>が提案した

$$T(h) = \frac{T(0)}{1+h} \quad (10)$$

を用いる。ここで、 $T(0)$  は温度減少関数初期値である。

今回構築した計算式は目的関数を  $L(\theta)$ 、パラメータを  $\theta$  として以下のように定式化できる。

$$\theta_h = \theta_{h-1} + \alpha \frac{\partial L(\theta_{h-1})}{\partial \theta} + \varepsilon_h \quad (11)$$

ここで  $\alpha$  はステップサイズであり、また、ゆらぎ項  $\varepsilon_h$  は式(12)によって決定される値である。

### (3) 本研究における同時計算式の構築

以上のような同時計算法では繰り返し計算初期の段階では必ずしも均衡制約条件を満たすような平均経路交通量を算出するとは限らないが、計算ステップごとに単調に増加するパラメータ  $\eta$  のために繰り返し計算を行っていくうちにいずれは本研究において定式化された均衡制約付最適化問題を解いた場合の結果に近い推定結果を算出することができると思われる。同時計算法の問題点は、計算上ペナルティの部分の影響で、計算が不安定になることであり、適切な  $\eta$  の設定が必要となる。

これまでの議論を踏まえ、本研究で取り上げている均衡制約付最適化問題を、パラメータ同時推定法を用いて再定式化すると、

$$\max_{\theta} L(\theta|\bar{x}, \mathbf{m}) - \eta \|\mathbf{m} - \mathbf{g}(\mathbf{m}|\theta)\| \quad (12)$$

と表すことができる。新たにパラメータ  $\eta$  を導入したため、(12)式には  $\theta$  と  $\eta$  と  $\mathbf{m}$  の複数のパラメータが存在することになる。このような多数のパラメータに依る関数

の最適化問題を解く場合、局所解に陥る可能性が増大するため、シミュレーティッド・アニーリングを応用した最適手法のような、局所解に陥った場合でも最適解を導出することができるような手法が非常に重要になると考えられる。

### 4. 仮想単純ネットワークにおけるパラメータ推定例

複数の OD ペア・経路ネットワークのうち、最も単純なものの一つである図-1 に示す仮想ネットワークに対して、式(2)で示したロジットモデルのパラメータ  $\theta$  を推定する計算例を示す。パラメータの真値が正確に分かるように、観測交通量は真値に基づいて確率的に発生させたものを用いるという仮想データとし、ロジットモデル内のパラメータ  $\theta$  の真値を 0.5 として乱数により発生させた観測交通量を用いるものとする。その観測交通量データを表-1 に示す。なお、表中の  $m_{ij}$  は OD ペア  $i$  における経路  $j$  の経路交通量を表す。

ネットワークは 2OD ペア、3 ノード、4 リンクの仮想単純ネットワークであり、OD 交通量は 2 組とも平均が 2000 のポアソン分布に従うとする。そして、ノード 1 からノード 3 へ向かう OD ペア 1 とノード 2 からノード 3 へ向かう OD ペア 2 の 2 つの OD ペアを設定する。また、OD ペアそれぞれに 2 経路ずつあるものとし、OD ペア 1 についてリンク 1 とリンク 2 から成る経路を経路 1、リンク 4 のみから成る経路を経路 2、OD ペア 2 についてリンク 2 のみから成る経路を経路 3、リンク 3 のみから成る経路を経路 4 とする。

以上に示した各種データを用いてパラメータの推定、経路交通量の配分を、同時計算法と二段階計算法の両手法で行った結果とその比較を表-2 に示している。なお、最適化計算には式(8)を用いており、表中の  $m_{ij}$  は OD ペア  $i$  における経路  $j$  の経路交通量、 $L$  は目的関数値を表している。表-2 より、配分された経路交通量や推定されたパラメータ  $\theta$ 、目的関数値  $L$  は両手法ともにほぼ変わら

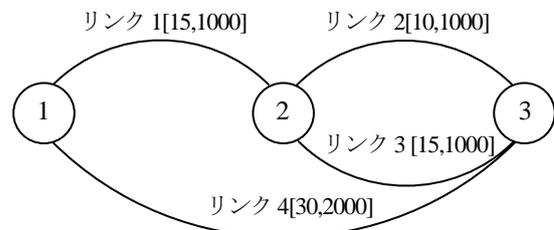


図-1 仮想単純ネットワーク図

表-1 与えた観測経路交通量

	1	2	3	4	5	6	7	8	真値 ( $\theta=0.5$ )
$m_{11}$	1015	1105	1050	1057	1074	1014	1028	1053	1073.5
$m_{12}$	941	932	981	917	910	925	955	939	926.5
$m_{23}$	1247	1207	1196	1226	1237	1246	1257	1252	1222.2
$m_{24}$	802	814	783	773	786	787	777	723	777.8

表-2 観測データ8セットを用いての両手法における計算結果の比較

		1	2	3	4	5	6	7	8	平均
同時計算法	$m_{11}$	1073.4	1072.7	1073.2	1073.6	1073.5	1073.6	1073.6	1073.4	1073.4
	$m_{12}$	926.6	927.3	926.8	926.4	926.5	926.4	926.4	926.6	926.6
	$m_{23}$	1216.7	1195.2	1207.5	1226.7	1223.1	1225.7	1236.2	1216.5	1218.5
	$m_{24}$	783.3	804.8	792.5	773.3	776.9	774.3	763.8	783.5	781.5
	最適目的関数値 $L$	-19.767	-18.079	-19.413	-17.638	-17.742	-19.387	-19.157	-18.013	-18.650
	推定パラメータ $\theta$	0.401	0.212	0.296	0.618	0.520	0.587	1.153	0.398	0.523
	収束計算回数 $h$	305	546	283	748	412	544	352	551	467.6
総計算時間(s)	2.00	3.59	1.88	4.92	2.72	3.64	2.41	3.64	3.10	
二段階計算法	$m_{11}$	1073.4	1072.7	1073.2	1073.6	1073.5	1073.6	1073.6	1073.4	1073.4
	$m_{12}$	926.6	927.3	926.8	926.4	926.5	926.4	926.4	926.6	926.6
	$m_{23}$	1216.7	1195.2	1207.5	1226.7	1223.1	1225.7	1236.3	1216.5	1218.5
	$m_{24}$	783.3	804.8	792.5	773.3	776.9	774.3	763.7	783.5	781.5
	最適目的関数値 $L$	-19.768	-18.081	-19.413	-17.638	-17.742	-19.387	-19.157	-18.015	-18.650
	最適パラメータ $\theta$	0.401	0.212	0.296	0.617	0.521	0.587	1.159	0.398	0.524
	収束計算回数 $h$	743	257	238	952	888	541	381	435	554.4
総計算時間(s)	25.27	8.38	7.88	31.77	29.75	18.20	12.78	14.61	18.58	

ない結果となった。しかしながら、同時計算法を用いた場合における収束計算回数、総計算時間ともに減少しており、同時計算法の有意性を確認することができた。

### 5. 金沢市道路ネットワークへの適用

本研究において構築したモデルを、金沢市道路ネットワークへ適用することを考える。用いるネットワークデータについて、リンクの距離や制限速度、交通容量は平成11年度道路交通センサス一般交通量調査のデータを、OD交通量については平成7年度・第3回金沢都市圏パーソントリップ調査の付帯調査データを用いている。また、リンク間の所要旅行時間はBPR関数によって表され、自由走行時間はリンクの距離を制限速度で除した値を用いる。ノード数は140、リンク数は472、経路数は9934である。対象となる道路ネットワーク図を図-2に示す。



図-2 金沢市道路ネットワーク図

### 5. まとめ

本研究では、最適化問題においてより正確に大域的最適解を算出するためのシミュレーテッド・アニーリン

グ(焼きなまし法)を応用した最適化手法の構築を行った。そして、ロジット型利用者均衡モデルの交通量配分におけるパラメータ推定の同時計算法の提案を行い、また単純なネットワークにおけるパラメータ推定を行い、その有意性を示した。交通量均衡配分では計算にかかる時間が問題となることが少なくないため、本研究のような最適化計算上の工夫は非常に有効であると考えられる。

今後の課題として、大規模ネットワークへの適用が挙げられる。本論文の単純ネットワークにおけるパラメータ推定では、同時計算法と二段階推定法では違いがあまりみられなかったが、大規模ネットワークでもそうであるのか等の検討が必要である(結果は講演時に示す)。

### 参考文献

- 1) 中山晶一郎, 高山純一: リンク交通量を用いた交通ネットワーク均衡モデルのパラメータ推定: リンク間相関を考慮した最尤法, 土木学会論文集D, Vol.62, No.4, pp.548-557, 2006.
- 2) Chen, M. and Alfa, A.: A Network Design Algorithm Using a Stochastic Incremental Traffic Assignment Approach, Transportation Science, Vol.25, pp.215-224, 1991.
- 3) Davis, G.A.: Exact Local Solution of the Continuous Network Design Problem via Stochastic User Equilibrium Assignment, Transportation Research, Vol.28B, pp.61-75, 1994.
- 4) Yang, H., Meng, Q. and Bell, M.G.H.: Simultaneous Estimation of the Origin-Destination Matrices and Travel-Cost Coefficient for Congested Network in a Stochastic User Equilibrium, Transportation Science, Vol.35, pp.107-123, 2001.
- 5) Lo, H.P. and Chan, C.P.: Simultaneous Estimation of an Origin-Destination Matrix and Link Choice Proportions Using Traffic Counts, Transportation Research, Vol.37A, pp.771-788, 2003.
- 6) Ying, J.Q. and Yang, H.: Sensitivity Analysis of Stochastic User Equilibrium Flows in a Bi-Modal Network with Application to Optimal Pricing, Transportation Research, Vol.39B, pp.769-795, 2005.
- 7) Connors, R., Smith, M.J. and Watling, D.: Bilevel Optimisation of Prices in Network Equilibrium Models, Mathematics in Transport, ELSEVIER LIMITED, pp.27-43, 2007.
- 8) Szu, H. and Hartley, R.: Fast simulated annealing, Physics Letters A, Vol. 122, pp. 167-162, 1987.