

# 一般ネットワークにおける出発時刻選択問題の解法\*

## An algorithm for solving departure time choice problems in general networks\*

松山航\*\*・井料隆雅\*\*\*

By Wataru MATSUYAMA\*\*・Takamasa IRYO\*\*\*

### 1. はじめに

動的な交通量配分問題の1つとして出発時刻選択問題と呼ばれるものが知られている。出発時刻選択問題では、一般化交通費用を目的地希望到着時刻と実際の到着時刻とのずれによるコスト（スケジュールコスト）と旅行時間による費用の和として定式化し、通常はWardrop均衡が成立するように各利用者の出発時刻と利用経路を計算する。利用者の目的地におけるスケジュール制約を明示的に考慮しているため、出発時刻選択問題は朝の通勤交通を対象とした動的配分に適している。

出発時刻選択問題の既存研究にはVickrey<sup>1)</sup>以来多数のものがあるが、どちらかというとき時刻選択に着眼した分析が多く、ネットワーク配分という視点からの研究はあまり多くない。特に、1経路に2つ以上のボトルネックが存在する場合の分析はかなり限られる（Kuwahara<sup>2)</sup>, Arnott et al.<sup>3)</sup>, Lago and Daganzo<sup>4)</sup>, Akamatsu and Kuwahara<sup>5)</sup>, Szeto and Lo<sup>6)</sup>）。前者3つの研究では特定のネットワーク構造を前提としており、一般ネットワークへはそのまま適用できない。後者2つは一般ネットワークへ適用可能であるが、出発時刻選択問題では一般に費用関数の単調増加性は保証されない（実際、出発時刻選択問題では費用関数の単調増加性が成立しないケースがあることが指摘されている<sup>7)</sup>）ため、収束性を持つ解法を得ることはそれほど簡単ではない。なお、Akamatsu and Kuwahara<sup>5)</sup>はFisherのメリット関数によるNewton法により、収束性が高いとされる解法を提案している。

本稿では、一般ネットワークにおける出発時刻選択問題の均衡状態を解くための、既存研究とは異なる解法を提案する。この解法では、1経路1ボトルネックネットワークにおける均衡状態の解法をベースにし、フローから計算できる遅れ時間と、均衡のための費用として計算される遅れ時間との整合がとれるような解を繰り返し計算によって求める。解法の収束性は簡単なネットワークで数値的に確認する。

\*キーワード：動的交通量配分，出発時刻選択問題

\*\*学生員，神戸大学大学院工学研究科市民工学専攻

(神戸市灘区六甲台町1-1, TEL/FAX078-803-6360)

\*\*\*正員，博士(工学)，神戸大学大学院工学研究科市民工学専攻

### 2. 均衡状態を解くための最適化問題

本節では、一般ネットワークにおける出発時刻選択問題の均衡状態に「ほぼ」等価な最適化問題を示す。ただし、「ほぼ」とあるように、この最適化問題は完全に均衡状態に等価ではない。そのため最終的な解法では繰り返し計算が必要となるが、これについては3節で述べる。

まず、ここで分析するネットワーク等の定式化を行う。なお、以下の定式化において、すべての時刻は一定の間隔 $\Delta t$ を持つ時間帯によって離散化する。時間帯は1から $T$ までの整数で指定される。時間帯の幅はどのようなものでもよいが、離散化誤差を減らすためには、計算時間が許す限り小さくするのが良い。

ネットワークは起点、終点、ボトルネック $h \in H$ 、起終点とボトルネックの結合関係を示すリンクで構成される。各ボトルネックは単位時間あたりの容量 $\mu(h)$ を持ち、それ以上の車両を単位時間に通すことはできない。また、容量いっぱいの交通流が流れているときには待ち行列（ポイントキュー）を持つことが可能である。時間帯 $i$ にボトルネック $h$ を流出する車両の遅れ時間を $w(i, h)$ と記す。各リンクの旅行時間はつねに一定の自由流旅行時間として与えられる。

各車両はある1つの車両属性 $j \in D$ に属する。車両属性 $j$ に属する車両数は $D(j)$ で示される。同一の車両属性に属する車両は、同じ起点、終点、経路選択肢 $r \in R_j$ 、スケジュールコストを持つ。時間帯 $i$ に到着する際のスケジュールコストを $p_s(i, j)$ 、経路 $r$ の自由流旅行時間を $p_r(j)$ と記す。また、これら2つの和を $p(i, r, j)$ で記し、これを「非ボトルネック費用」と呼ぶ。利用者の出発時刻選択行動は「目的地到着時刻選択」として記述される。すなわち、車両属性 $j$ の車両のうち、経路 $r$ を使用し時間帯 $i$ に目的地に到着するように行動することを選択した利用者数を $X(i, r, j)$ で示す。

ボトルネック $h$ を時間帯 $k$ に出発する利用者の数 $N(k, h)$ は、 $X(i, r, j)$ を関係する経路および車両属性について足し合わせることによって得られる。ただし、ここで注意したいことは、 $X(i, r, j)$ に含まれる $i$ は、ボトルネックを流出する時間帯ではなく、目的地に到着する時間帯を示していることである。よって、足し合わせ

の際には、旅行時間（自由流旅行時間+より下流でのボトルネックでの遅れ時間）を考慮したうえで目的地到着時刻をボトルネック流出時刻に変換する必要がある。この変換のための係数として $b(i,r,k,h;\mathbf{w}_r)$ を用意する。この係数は、経路 $r$ の目的地に時間帯 $i$ に到着する車両が、ボトルネック $h$ を時間帯 $k$ に出発する割合を示す。たとえば、経路 $r$ の目的地に時間帯 $i$ に到着する車両のうち半分が時間帯 $k$ に、のこり半分が時間帯 $k+1$ に出発するならば、 $b(i,r,k,h;\mathbf{w}_r)$ は、時間帯 $k$ と $k+1$ についてそれぞれ0.5となり、ほかの時間帯では0となる。なお、ボトルネックでの遅れ時間は整数になるとは限らないので、上記の例のように、目的地には同一時間帯に到着する利用者も、途中のボトルネックでは2つ以上の時間帯にまたがって存在していることがおきうることに注意したい。係数 $b(i,r,k,h;\mathbf{w}_r)$ を用いれば、 $N(k,h)$ は

$$N(k,h) = \sum_{j \in D} \sum_{r \in R_j} \sum_{i=1}^T b(i,r,k,h;\mathbf{w}_r) X(i,r,j) \quad (1)$$

と書ける。なお、 $b(i,r,k,h;\mathbf{w}_r)$ は、経路 $r$ の最上流に位置するボトルネック以外のすべてのボトルネックでの遅れ時間に依存して決定する。引数に含まれる $\mathbf{w}_r$ はそのようなボトルネックの遅れ時間 $w(i,h)$ の値の集まりを意味している。

$b(i,r,k,h;\mathbf{w}_r)$ を用いれば、経路 $r$ を旅行して目的地に時間帯 $i$ に到着した場合の遅れ時間を

$$w_R(i,r) = \sum_{h \in H} \sum_{k=1}^T b(i,r,k,h;\mathbf{w}_r) w(k,h) \quad (2)$$

と示せる。これを用いて、経路 $r$ によって目的地に時間帯 $i$ に到着する利用者の一般化交通費用 $p_{ALL}(i,r,j)$ は

$$p_{ALL}(i,r,j) = w_R(i,r) + p(i,r,j) \quad (3)$$

と書ける。均衡状態はWardrop均衡を用い

$$X(i,r,j) > 0 \Rightarrow p_{ALL}(i,r,j) \leq p_{ALL}(i',r',j) \quad \forall i',r' \quad (4)$$

がどの $i,r,j$ についても成立する状態と定義される。

上記で定式化される出発時刻選択問題の等価な最適化問題の導出は井料らの方法<sup>8)</sup>とほぼ同じである。具体的には、最適化問題をまず定式化し、その相補性条件を導出し、それが均衡状態の条件と等価であることを確認することになる。等価になるべき最適化問題は

$$\begin{aligned} \min: & \sum_{i=1}^T \sum_{r \in R_j} \sum_{j \in J} X(i,r,j) p(i,r,j) + \sum_{k=0}^{T-1} \sum_{h \in H^*} n(k,h) \Delta(k,h) \\ \text{sub.to.} & \sum_{i=1}^T \sum_{r \in R} X(i,r,j) = D(j), \\ & n(k,h), X(i,r,j) \geq 0 \\ & N(k,h) \leq \mu^*(k,h) \quad \text{for } \forall i,r,j,k,h \end{aligned} \quad (5)$$

となる。ここで $H^*$ は「ある経路の最上流以外の場所に位置することがあるボトルネックの集合」である。また、 $\mu^*(k,h)$ は「補正容量」と呼ばれ、具体的には

$$\mu^*(k,h) = \begin{cases} \mu(h) - n(1,h) & \text{if } k=1 \\ \mu(h) + n(T-1,h) & \text{if } k=T \\ \mu(h) + n(k-1,h) - n(k,h) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6)$$

と定義される。 $n(k,h)$  ( $1 \leq k \leq T-1$ で定義される)は最適化問題の変数である。 $\Delta(k,h)$ は外生的に与えられる定数である。

問題(5)のKKT条件を計算し、さらに変形すると、KKT条件と(問題(5)の制約式とあわせて)等価な式

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} v(k,h) (\mu^*(k,h) - N(k,h)) &= 0 \\ \mu^*(k,h) - N(k,h) &\geq 0 \end{aligned} \right\} \text{for } \forall k,h \\ & \left. \begin{aligned} X(i,r,j) (p(i,r,j) + v_{ALL}(i,r) - \theta(j)) &= 0 \\ p(i,r,j) + v_{ALL}(i,r) - \theta(j) &\geq 0 \end{aligned} \right\} \text{for } \forall i,r \\ & \Delta(k,h) = v(k+1,h) - v(k,h) \quad \text{for } 1 \leq k \leq T-1, \forall h \in H^* \end{aligned} \quad (7)$$

を得る。ただし、 $v(k,h)$ 、 $\theta(j)$ はラグランジュ乗数であり、 $v_{ALL}(k,h)$ は式(2)の $w(k,h)$ を $v(k,h)$ に置き換えたものとして定義される。双対問題は

$$\begin{aligned} \text{maximize} & \sum_{j \in J} D(j) \theta(j) - \sum_{k=1}^T \sum_{h \in H^*} \mu(h) v(k,h) \\ \text{sub.to.} & p(i,r,j) + v_{ALL}(i,r) \geq \theta(j) \quad \text{for } \forall i,r,j \\ & v(k,h) \geq 0 \quad \text{for } \forall k,h \\ & v(k+1,h) - v(k,h) = \Delta(k,h) \quad \text{for } 1 \leq \forall k \leq T-1, \forall h \in H^* \end{aligned} \quad (8)$$

となる。ここで、式(7)におけるラグランジュ乗数 $v(k,h)$ をボトルネックでの遅れ時間 $w(k,h)$ と置き換えると、式(7)の第1式、第2式は「ボトルネックから流出する車両台数は補正容量以下であり、なおかつ、補正容量と等しいときに限って遅れ時間が発生できる」ことを意味する。第3式、第4式は「車両特性 $j$ に属する車両の一般化交通費用は $\theta(j)$ 以上であり、それに等しい到着時刻・経路のみが選択される」ことを示している。これは均衡条件の式(4)と同じである。すなわち、式(7)は、「ボトルネック容量が真の容量でなく、補正容量である場合の」均衡条件そのものを(ボトルネックの遅れ時間が満たす条件とともに)記述していることになる。最適化問題(5)は線形であるため、KKT条件が成立することと最適解が得られることは等価である。よって、問題(5)を解くことは「補正容量を前提とした」均衡状態における $X(i,r,j)$ を解くことと等価であり、双対問題(8)を解くことは、 $v(k,h)$ を $w(k,h)$ と置き換えることにより、同じく「補正容量を前提とした」均衡状態における $w(k,h)$ を解くことと等価である。

問題(5)および(8)、およびKKT条件(7)が含む定数 $\Delta(k,h)$ の意味について説明する。この定数は、KKT条

件において、 $v(k, h)$  を  $w(k, h)$  と置き換えることにより、 $H^*$  に属するボトルネックにおける遅れ時間の増減を制約する式となることがわかる。ボトルネックが補正容量いっぱいを使用されない限り遅れ時間が0になることを考えれば、実質、 $\Delta(k, h)$  は、 $H^*$  に属するボトルネックの遅れ時間を外生的に決定する役割をもっている。ということは、

1.  $H^*$  に属するボトルネックの遅れ時間を適宜決める
2. それに対応する  $\Delta(k, h)$ ,  $b(i, r, k, h; \mathbf{w}_r)$  を決める
3. 問題(5), (8)を解く

というステップにより、「補正容量」が内生的に決定され、その補正容量に対応する均衡状態の解が求まる、ということの意味する。そして、ステップ1で適切な遅れ時間を与えることができれば、「補正容量」=「本来の容量」となる解が得られることになる。このような解を得ることにもし成功すれば、それは真の均衡解を得たことになる。

しかし、「補正容量」は内生的に決まる値であり、「補正容量」=「本来の容量」となる解を探すことはそれほど簡単ではない。次節では、そのための繰り返し計算アルゴリズムを提案する。

### 3. 繰り返し計算による解の探索

本節では、2節で示した問題における補正容量が0になる状態を求める繰り返し計算のアルゴリズムを示す。繰り返し計算の方法にはいくつかのものが考えられるが、ここでは、 $H^*$  に属するボトルネックの遅れ時間の初期条件を0と設定して  $X(i, r, j)$  を求め、その  $X(i, r, j)$  を用いて  $H^*$  に属するボトルネックの遅れ時間を更新する方法をとる。具体的なステップは以下のようになる。

0.  $W(k, h) = 0$  for  $\forall k, h \in H^*$  とする。
1.  $W(k, h)$  を  $H^*$  に属するボトルネックの遅れ時間とみなし、それから  $\Delta(k, h)$  と  $b(i, r, k, h; \mathbf{W}_r)$  を計算する。
2. 問題(5), (8)を解き、 $X(i, r, j)$ ,  $w(k, h)$  を求める。
3.  $X(i, r, j)$  を用いて、 $H^*$  に属するボトルネックへの流入交通量を求める。
4. 3.で求めた流入交通量に対し、真のボトルネック容量  $\mu(h)$  を適用したボトルネックモデルを適用し、 $H^*$  に属するボトルネックでの遅れ時間を計算する。
5. 4.で計算した遅れ時間を用いて  $W(k, h)$  を更新する。
6. 収束判定を行い、収束しているとされた場合には計算を終了する。収束していない場合には1.に戻る。

ステップ5.の更新の際には、MSA(Method of Successive Average)によって、更新がゆるやかに行われるようにした。ステップ6.の収束判定では、 $W(k, h)$  と  $w(k, h)$  が

十分近接することを条件とした。もちろん、2節での説明どおりに補正容量が本来の容量と近くなることを条件とするのが本来だが、ここでは、収束の程度を直感的に判断できるように、遅れ時間をベースにした条件を採用している。

本節で示した計算方法は、あくまでも便宜的であり、その収束性については現段階では特に証明をしていないことに注意したい。本稿では、限定的なケースについての数値計算例を次節で示すにとどめる。

### 4. 数値計算例

3節までで提案した計算方法を、特定のケースについて適用し、数値計算を試みる。ネットワーク形状としてはY字型の2起点1終点ネットワークを用いる(図1)。このネットワークにはODペアが2個、ボトルネックが3個存在し、いずれのODペアも経路は1本だけ持つ。 $H^*$  に属するボトルネックは合流点の下流に位置するボトルネック(ボトルネック3)のみである。車両特性として2種類のものを用意する。これらは、ODペアのみで区別されるものであり、ODペアが同じであれば、同じスケジュールコスト関数(希望到着時刻も同じ)を持つとする。スケジュールコスト関数には線形のものを採用する(図2)。 $\Delta t$  は5分、 $T$  は74とした。ボトルネック1~3の容量は、それぞれ900台/時間、900台/時間、1500台/時間、起点1、起点2から出発する車両台数はいずれも1200台とした。希望到着時刻  $t_{w1}, t_{w2}$  は両車両特性で同じとした。なお、この条件では、上流の2つのボトルネックが渋滞すれば、ボトルネック3は必ず渋滞することに注意したい。

上述した条件において、表1で示す2つのパラメータセッティングで具体的な計算を行った。収束の様子を確認するために、明示的な収束条件を設定せずに、 $W(k, h)$  と  $w(k, h)$  の差の全時間帯にわたる合計を残差とし、この残差と繰り返し回数との関係をグラフで示した(図3)。図3が示すように、今回試したケースについてはおおむね収束性があるものの、ケースによっては単調収束とはならないことがあることがわかった。

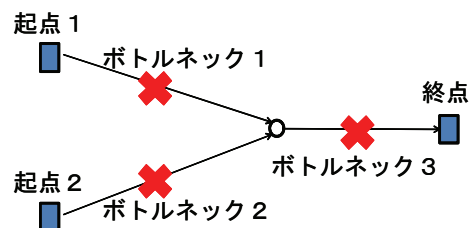


図1 数値計算用のネットワーク



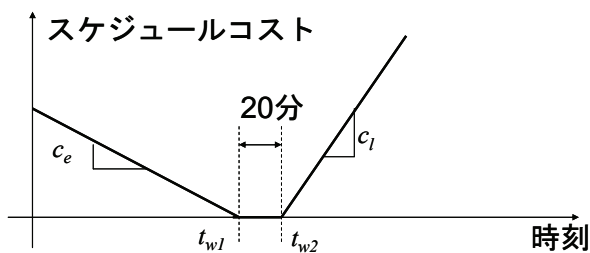


図2 スケジュールコスト関数の形状

表1 各ケースでの設定パラメータ

	ケース1	ケース2
$c_e$ (起点1からの車両)	-0.50	-0.30
$c_l$ (起点1からの車両)	1.50	1.20
$c_e$ (起点2からの車両)	-0.25	-0.15
$c_l$ (起点2からの車両)	0.75	0.50
Btnk1- Btnk 3のFFTT	10分	5分
Btnk2- Btnk 3のFFTT	10分	10分

註：Btnk：ボトルネック，FFTT：自由流旅行時間

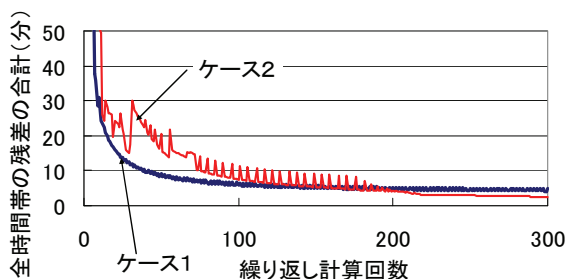


図3 収束計算の状況

## 5. おわりに

本稿では、一般ネットワークにおける出発時刻選択問題を解くための方法を提案した。均衡状態と補正容量を前提とした上で等価となる最適化問題を定式化し、それを用いた繰り返し計算によって、真の均衡状態を探索する方法を提案した。提案した方法は限定的なケースにおける数値計算で確かめられ、ケースによってその収束性に差があることがわかった。

今後の課題をいくつか述べる。まず第1に、本稿で提案した方法の収束性については、理論的な検証がまだなされていないだけでなく、数値計算としても限定的なケースの検証しか示されていないことである。この点については、理論的あるいは数値的に検証を進めるべきである。第2に、第3節で示した繰り返し計算方法以外にも収束性のよい計算方法が存在する可能性があることである。第3に、本稿で提案した方法と、既存の方法との優

劣については、とくに何の知見も示されていないことである。本稿で示した方法は、補正容量を前提とした上で等価となる最適化問題を定式化した上で繰り返し計算をする、という点で既存の方法論とは大きくことなるアプローチだが、これが収束性について常に優位である保証はない。この点についても今後検証を進めるべきであろう。

## 謝辞

本研究を進めるにあたって、神戸大学の朝倉康夫教授からは有用なコメントを提供していただいた。また、本研究の一部は科学研究費補助金（若手(B) 20760347）の補助により進められたものである。この場を借りて感謝の意を表す。

## 参考文献

- 1) Vickrey, W.S., Congestion Theory and Transport Investment, *The American Economic Review*, **59**(2), p. 251-260, 1969.
- 2) Kuwahara, M., Equilibrium Queueing Pattern at a Two-Tandem Bottleneck During the Morning Peak, *Transportation Science*, **24**(3), p. 217-229, 1990.
- 3) Arnott, R., De Palma, A., and Lindsey, R., Properties of Dynamic Traffic Equilibrium Involving Bottlenecks, Including a Paradox and Metering, *Transportation Science*, **27**, p. 148-160, 1993.
- 4) Lago, A. and Daganzo, C.F., Spillovers, Merging Traffic and the Morning Commute, *Transportation Research Part B: Methodological*, **41**(6), p. 670-683, 2007.
- 5) Akamatsu, T. and Kuwahara, M., Dynamic Network Equilibrium Model of Simultaneous Route / Departure Time Choice for a Many-to-One OD Pattern, *Working Paper*, 1996.
- 6) Szeto, W.Y. and Lo, H.K., A Cell-Based Simultaneous Route and Departure Time Choice Model with Elastic Demand, *Transportation Research Part B: Methodological*, **38**, p. 593-612, 2004.
- 7) Iryo, T., An Analysis of Instability in a Departure Time Choice Problem, *Journal of Advanced Transportation*, **42**(3), p. 333-356, 2008.
- 8) 井料隆雅, 吉井稔雄, 朝倉康夫, 出発時刻選択問題の均衡状態に関する数理的分析, 土木学会論文集, 779/IV-66, p. 105-118, 2005.