

需要および供給面の不確実性を考慮した交通配分モデルに関する研究*

A study on a traffic assignment model considering uncertainties in both demand and supply*

内田賢悦**・加賀屋誠一****

By Ken'etsu UCHIDA**・Seichi KAGAYA***

1. はじめに

交通ネットワークは、供給および需要の両面において、さまざまな不確実性に曝されている。供給側の変動要因としては、天候や道路維持管理作業等の予測可能なものから、交通事故、車両故障といった予測が困難なものまで挙げられる。需要側の要因としては、日々の交通需要の変動などが挙げられる。こうした需要・供給側との不確実性が合わさることによって、移動時間や交通条件の不確実性が発生すると考えられる。この他に、道路利用者の移動時間に関する認知誤差も道路ネットワーク上の交通行動を考える上で重要な変動要因である。

本研究では、OD 交通量および交通容量を確率変数として表現する交通配分モデルの定式化を行なう。ここでは、道路利用者の経路選択行動に関して、経路所要時間に関する認知誤差を扱う場合、扱わない場合についての定式化も行なう。また、交通容量のみを確率変数として扱う場合、既に実用段階に達している確定的利用者均衡配分の枠組み内で計算が可能となることを示す。すなわち、上記の条件によって、大規模な道路ネットワークに適用可能な確率的交通容量下における交通配分モデルが導出できることを示す。

2. モデルの定式化

(1) 仮定

本研究では、OD 交通量および交通容量は、確率変数として表現されると仮定する。その結果、リンク交通量あるいはリンク交通容量は、それぞれ相関のある確率変数と表されることになる。一方、リンク交通量とリンク交通容量の間には、相関関係が存在しないものと仮定する。リンク交通量およびリンク交通容量が確率変数と表されるため、経路所要時間は確率変数として表現されることになるが、道路利用者はその平均を基準に経路選択を行なうものと仮定する。その場合、平均に関する認知誤差を含む場合、および含まない場合の2通りの定式化が可能となる。

(2) 交通需要

OD 交通量は、日々変動していることが交通観測より、明らかになっている。OD 交通量に関しては、これまでさまざまなモデルが提案されているが、本研究では Clark and Watling¹⁾による確率的交通需要モデルを適用する。以下では、イタリック体の大文字で示された変数は、確率変数と表すものとし、それに対応する小文字で示された変数は、その平均を表すものとする。

モデル化において重要な2つの仮定を以下に示す。

- ある日に実現される OD ペア $od \in \Pi$ (Π : OD ペアの集合) 間の交通需要は、平均が q^{od} の互いに独立なポアソン分布に従う。
- ある日に実現される OD ペア $od \in \Pi$ の交通需要に対して、旅行者は経路 $k \in K_{od}$ (K_{od} : OD ペア od 間の経路集合) を他の経路とは独立に p_k^{od} の割合で選択する。

上記の2つの仮定は、それぞれの $od \in \Pi$ に対して、 k 番目の経路フロー F_k^{od} は、平均 q^{od} 、抽出率 p_k^{od} のポアソン過程によるランダムサンプリングとなることを示している。

さらに、それぞれの $od \in \Pi$ に対して、経路フロー F_k^{od} ($k \in K_{od}$) は平均 $f_k^{od} = p_k^{od} q^{od}$ の互いに独立なポアソン確率変数となることを示している。このとき、ネットワーク上のリンク $a \in A$ (A : リンクの集合) 上の交通量は、式(1)で表される。

$$V_a = \sum_{od \in \Pi} \sum_{k \in K_{od}} \delta_{ak}^{od} F_k^{od} \quad \forall a \in A. \quad (1)$$

ここで δ_{ak}^{od} は、OD ペア od 間の k 番目の経路にリンク a が含まれる場合に 1、それ以外の場合に 0 をとる変数である。また、上述の2つの仮定より、リンクフローの平均、分散・共分散はそれぞれ式(2)、式(3)で表される。

$$v_a = E[V_a] = \sum_{od \in \Pi} \sum_{k \in K_{od}} \delta_{ak}^{od} f_k^{od} \quad \forall a \in A, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{a_1 a_2}^V &= \text{cov}[V_{a_1}, V_{a_2}] \\ &= \sum_{od \in \Pi} \sum_{k \in K_{od}} \delta_{a_1 k}^{od} \delta_{a_2 k}^{od} f_k^{od} \quad \forall a_1, a_2 \in A. \end{aligned} \quad (3)$$

特に、 $V_a \quad \forall a \in A$ はポアソン分布に従うため、その分散 σ_{aa}^V は v_a となる。また、 q^{od} ($od \in \Pi$) がある程度大きな値をとる場合、リンク交通量は、上記の平均、分散・共分散を有する多変量正規分布 $MVN(\mathbf{v}, \Sigma^V)$ によって近似すること

*キーワード 交通配分, 確率変動

**正会員 博(工) 北海道大学大学院工学研究科

(札幌市北区北13条西8丁目, Tel 011-706-6211, Fax 011-706-6211)

***フェロー 学博 北海道大学大学院工学研究科

(札幌市北区北13条西8丁目, Tel 011-706-6210, Fax 011-706-6211)

が可能となる。ここで、 $\mathbf{v}$ 、 Σ^V は、それぞれ a 番目の要素を v_a とするベクトル、 a_1 行 a_2 列の要素を $\sigma_{a_1 a_2}^V$ とする行列である。

(3) 交通容量

道路の交通容量は、天候、視界等、さまざまな要因によって変動していると考えられる。本研究では、リンク交通容量の平均および分散・共分散は計測可能であると仮定し、それが多変量正規分布 $\text{MVN}(\mathbf{c}, \Sigma^C)$ によって表されるものとする。ここで、 $\mathbf{c}, \Sigma^C$ は、それぞれ a 番目の要素を c_a とするベクトル、 a_1 行 a_2 列の要素を $\sigma_{a_1 a_2}^C = \text{cov}[C_{a_1}, C_{a_2}]$ とする行列である。また、 C_a はリンク a の確率的交通容量であり、その平均は c_a となる。

(4) 経路所要時間の平均および分散

本研究では、リンクの走行時間を式(4)に示す BPR 型リンクパフォーマンス関数を適用して表現する。

$$T_a(V_a, C_a) = t_a^0 \left(1 + \gamma \left(\frac{V_a}{C_a} \right)^\lambda \right) \quad \forall a \in \mathbf{A}. \quad (4)$$

ここでは、交通量および交通容量ともに確率変数として表現している。 $D_a = V_a \tilde{C}_a$ where $\tilde{C}_a = (C_a)^{-1} \forall a \in \mathbf{A}$ とする確率変数を用いると、式(4)は、式(5)で表現される。

$$T_a(V_a, C_a) = t_a^0 + \gamma t_a^0 (D_a)^{\lambda} \quad \forall a \in \mathbf{A}. \quad (5)$$

$T_a(V_a, C_a) \forall a \in \mathbf{A}$ の平均と分散・共分散は、それぞれ式(6), (7)で与えられる（導出の詳細は付録1を参照されたい）。

$$t_a = E[T_a] \quad \forall a \in \mathbf{A}, \quad (6)$$

$$\sigma_{a_1 a_2}^T = \text{cov}[T_{a_1}, T_{a_2}] \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbf{A}. \quad (7)$$

一方、OD ペア od 間の k 番目の経路に関する移動時間は、式(8)で与えられる。

$$\Gamma_k^{od} = \sum_{a \in A} T_a \delta_{ak}^{od} \quad \forall k \in \mathbf{K}_{od}, \forall od \in \mathbf{\Pi}. \quad (8)$$

式(8)に示した経路移動時間の平均と分散・共分散は、それぞれ式(9), (10)で表される。

$$\begin{aligned} \eta_k^{od} &= E[\Gamma_k^{od}] \\ &= \sum_{a \in A} t_a \delta_{ak}^{od} \quad \forall k \in \mathbf{K}_{od}, \forall od \in \mathbf{\Pi}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \text{cov}[\Gamma_{k_1}^{od_1}, \Gamma_{k_2}^{od_2}] &= \text{cov} \left[\sum_{a_1 \in A} T_{a_1} \delta_{a_1 k_1}^{od_1}, \sum_{a_2 \in A} T_{a_2} \delta_{a_2 k_2}^{od_2} \right] \\ &= \sum_{a_1 \in A} \sum_{a_2 \in A} \delta_{a_1 k_1}^{od_1} \delta_{a_2 k_2}^{od_2} \sigma_{a_1 a_2}^T \\ &\quad \forall k_1, k_2 \in \mathbf{K}_{od}, \forall od_1, od_2 \in \mathbf{\Pi}. \end{aligned} \quad (10)$$

(5) 交通均衡

経路所要時間の平均が経路選択の基準になることを仮定すると、その認知誤差を考慮する場合、道路利用者の経路

選択行動は、式(11)に示す確率的利用者均衡として定式化できる。

$$\begin{aligned} p_k^{od} &= \Pr(E[\Gamma_k^{od}] + \varepsilon_k^{od} \leq E[\Gamma_{k'}^{od}] + \varepsilon_{k'}^{od} \quad \forall k' \in \mathbf{K}_{od}, k' \neq k) \\ &= \Pr(\eta_k^{od} + \varepsilon_k^{od} \leq \eta_{k'}^{od} + \varepsilon_{k'}^{od} \quad \forall k' \in \mathbf{K}_{od}, k' \neq k) \end{aligned} \quad (11)$$

ここで ε_k^{od} は、平均移動時間に関する認知誤差を表している。一方、付録1の式(a.6)において、たとえば、 $m=2$ とし、両辺の平均をとると式(12)が得られる。

$$\begin{aligned} t_a &= \hat{b}_{0a} E[(D_a - d_a)^0] + \hat{b}_{2a} E[(D_a - d_a)^2] \\ &= \hat{b}_{0a} + \hat{b}_{2a} \sigma_{aa}^D \quad \forall a \in \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (12)$$

t_a は、 v_a に関して単調増加である。この性質は、 m の値によらない。この関係を用いると、認知誤差を想定しない場合、経路選択行動は、以下に示す確定的利用者均衡として定式化可能である。

$$\min \sum_{a \in \mathbf{A}} \int_0^{v_a} t_a(x) dx, \quad (13)$$

$$\text{s.t. (2) and } \sum_k f_k^{od} = q^{od} \quad \forall od. \quad (14)$$

3. 総移動時間の平均および分散

道路ネットワーク上の総移動時間は、式(15)で与えられる。

$$G = \sum_{a \in \mathbf{A}} W_a(V_a, C_a), \quad (15)$$

where

$$\begin{aligned} W_a(V_a, C_a) &= V_a \cdot T_a(V_a, C_a) \\ &= (V_a - v_a + v_a) \sum_{i=0}^m \hat{b}_{ia} (D_a - d_a)^i \\ &= v_a \sum_{i=0}^m \hat{b}_{ia} (D_a - d_a)^i + \sum_{i=0}^m \hat{b}_{ia} (D_a - d_a)^i (V_a - v_a) \end{aligned} \quad \forall a \in \mathbf{A}. \quad (16)$$

総移動時間の平均と分散は、それぞれ式(17), (18)で与えられる（付録1に示した方法で計算可能）。

$$g = E[G], \quad (17)$$

$$\text{var}[G] = E[G^2] - g^2. \quad (18)$$

一方、総移動時間の分散には、式(19)に示す関係が成立することが確かめられる。

$$\begin{aligned} \text{var}[G] &= \text{var} \left[\sum_{a \in \mathbf{A}} W_a(V_a, C_a) \right] + \text{var} \left[\sum_{a \in \mathbf{A}} W_a(v_a, C_a) \right] \\ &\quad + \sum_{a_1 \in \mathbf{A}} \sum_{a_2 \in \mathbf{A}} \omega_{a_1} \omega_{a_2} \text{cov}[\hat{V}_{a_1}, \hat{V}_{a_2}] \text{cov}[\hat{C}_{a_1}, \hat{C}_{a_2}] \end{aligned} \quad (19)$$

where

$$\omega_a = \gamma t_a^0, \quad (20)$$

$$\hat{V}_a = (V_a)^{\lambda+1}, \quad (21)$$

$$\hat{C}_a = (C_a)^{-\lambda}. \quad (22)$$

ここで、 $\text{cov}[\hat{V}_{a_1}, \hat{V}_{a_2}]$ および $\text{cov}[\hat{C}_{a_1}, \hat{C}_{a_2}]$ は、付録2に示した Bras の方法を適用すれば、計算可能である。式(19)は、OD 交通量および交通容量が確率変動する場合の総移動時間の分散は、交通容量、OD 交通量それぞれを平均値に固定した場合の総移動時間の分散の和に、式(19)右辺第3項で表現される項を加えたものと等しくなることを示している。

なんらかの交通施策によって、総移動時間の平均と分散は変化すると考えられる。たとえば、積雪寒冷地における冬期の道路・路面管理は、リンク交通容量の平均を高めると同時に、分散を小さくする効果があり、その結果、総移動時間の平均と分散は変化する。こうした施策の評価は、従来、主に総移動時間の平均がどれくらい短縮されるかで計られてきた。これは、時間価値 (VOT: value of time) を基礎として議論であり、図1に示した例をとると、その効果は、式(23)で与えられる。しかしながら、移動時間信頼性の価値 (VOR: value of reliability)²⁾ の重要性が認識されており、図1に示した例をとると、その効果は、式(24)で与えられる。こうした効果を適切に評価するためには、総移動時間の平均、分散を表現することが重要となる。

$$b = \text{VOT} \cdot (g^b - g^a) \quad (23)$$

$$b^* = \text{VOT} \cdot (g^b - g^a) + \text{VOR} \cdot (\sqrt{\sigma_b^G} - \sqrt{\sigma_a^G}). \quad (24)$$

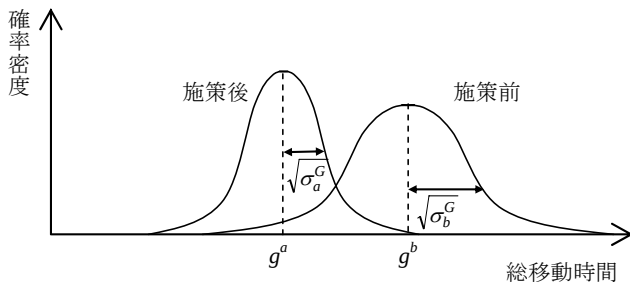


図1. 総移動時間の分布

4. 確率的交通容量下の交通配分モデル

以上で定式化したモデルは、道路交通に関する需要、供給および移動時間に関する認知の3要因すべてに確率変数を導入している。確率的OD交通量を表現する場合、経路選択を確定的利用者均衡で表現したとしても、式(10)に示される経路所要時間の分散・共分散を計算するためには、経路情報を記憶しておく必要がある。このことは、経路選択行動を確率的利用者均衡によって表現する場合も同様である。近年のコンピュータの計算性能向上を考えた場合、このことがそれほど問題になるとは考えにくい、通常の確

定的利用者均衡配分と比較した場合、計算負荷は高い。一方、確定的利用者均衡配分は、既に実用化段階に入りつつあり、大規模な道路ネットワークを対象とした場合であっても、高速な計算処理が可能となっている。ここでは、確率的交通容量のみを考慮した場合、確定的利用者均衡の枠組み内でモデル化可能となることを示す。

交通容量のみを確率変数として扱う場合、式(5)において、 $D_a = v_a \tilde{C}_a \quad \forall a \in \mathbf{A}$ とした定式化を考える必要がある。その結果、リンク交通量の分散・共分散が0となるため、付録1に示した式(a.4)を式(25)で置き換えた計算をすればよい。

$$\sigma_{a_1 a_2}^D = v_{a_1} v_{a_2} \sigma_{a_1 a_2}^{\tilde{C}}. \quad (25)$$

具体的には、式(12), (16)は、それぞれ式(26), (27)のように変換されることになる。

$$t_a = \hat{b}_{0a} v_a + \hat{b}_{2a} \sigma_{aa}^D \quad \forall a \in \mathbf{A}, \quad (26)$$

$$W_a(v_a, C_a) = (v_a)^2 \sum_{i=0}^m \hat{b}_{ia} (\tilde{C}_a - \tilde{c}_a^i) \quad \forall a \in \mathbf{A}. \quad (27)$$

確率的交通容量のみを扱う場合、交通配分モデルは、通常用いられるBPR関数の替わりに、式(26)をリンク所要時間とする確定的利用者均衡配分と等価な問題となり、基本的には、リンク交通量の分散・共分散が0となること以外は、問題の定式化は変化しない。

5. まとめ

本研究では、道路交通ネットワークにおける供給、需要面および移動時間に関する認知に確率変動を取り入れた交通配分モデルの定式化を行なった。また、供給側の確率変動のみを取り扱う場合、確定的利用者均衡と同じ問題構造となることを示した。計算例については、発表時に示す。

参考文献

- 1) Clark, S.D. and Watling, D.P. Modelling network travel time reliability under stochastic demand. Transportation Research B, Vol.39, pp.119-140, 2005.
- 2) Brownstone, David & Kenneth A. Small. Valuing Time and Reliability: Assessing the Evidence from Road Pricing Demonstrations. University of California at Irvine. June 18, 2003.
- 3) Bras, R. L. and Georgakakos, K. P. Real Time Nonlinear Filtering Techniques in Streamflow Forecasting –A Statistical Linearization Approach-, Third International Symposium on Stochastic Hydraulics, pp.95-105, 1980.
- 4) Isserlis, L. On a formulation for the product-moment co-efficient of any order of a normal frequency distribution in any number of variables. Biometrika 12 (1/2), pp.134-139,

- 5) Walter, W. P. and George, C. The Existence of the First Negative Moment. The American Statistician, Vol.39, No.1, pp.60-62, 1985.

付録 1

$\tilde{C}_a$ の平均と分散・共分散は、付録 2 に示す Bras³⁾の方法より、それぞれ式(a.1), (a.2)で表すことができる。

$$\tilde{C}_a = E[\tilde{C}_a] = \alpha_a^{(C,-1)} \mu_a^C \quad \forall a \in \mathbf{A}, \quad (\text{a.1})$$

$$\sigma_{a_1 a_2}^{\tilde{C}} = \text{cov}[\tilde{C}_{a_1}, \tilde{C}_{a_2}] = \beta_{a_1}^{(C,-1)} \beta_{a_2}^{(C,-1)} \sigma_{a_1 a_2}^C \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbf{A}. \quad (\text{a.2})$$

以上の結果を用いると、 $D_a = V_a \tilde{C}_a \quad \forall a \in \mathbf{A}$ の平均と分散・共分散は、それぞれ式(a.3), (a.4)で与えられる。

$$d_a = E[D_a] = v_a \tilde{C}_a \quad \forall a \in \mathbf{A}, \quad (\text{a.3})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{a_1 a_2}^D &= \text{cov}[D_{a_1}, D_{a_2}] \\ &= \sigma_{a_1 a_2}^V \sigma_{a_1 a_2}^{\tilde{C}} + \tilde{C}_{a_1} \tilde{C}_{a_2} \sigma_{a_1 a_2}^V + v_{a_1} v_{a_2} \sigma_{a_1 a_2}^{\tilde{C}} \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (\text{a.4})$$

一方、式(5)を D_a に関して m 次のテーラー展開を施すと式(a.5)で表すことができる。

$$T_a(V_a, C_a) = \sum_{j=0}^m b_{ia}(D_a)^j \quad \forall a \in \mathbf{A}. \quad (\text{a.5})$$

ここで、 $b_{ia}(i=1, \dots, m)$ は、テーラー展開に関する係数である。さらに、 $D_a = (D_a - d_a) + d_a$ として、式(a.5)に二項展開を施すと、式(a.6)が得られる。

$$T_a(V_a, C_a) = \sum_{i=0}^m \hat{b}_{ia}(D_a - d_a)^i \quad \forall a \in \mathbf{A}, \quad (\text{a.6})$$

where

$$\hat{b}_{0a} = \sum_{j=0}^m b_{ja}(d_a)^j, \quad (\text{a.7})$$

$$\hat{b}_{ia} = \sum_{j=i}^m b_{ja} \frac{j!}{i!(j-i)!} (d_a)^{j-i} \quad (i=1, \dots, m). \quad (\text{a.8})$$

以上から、 T_a の平均と分散・共分散は、それぞれ式(a.9), (a.10)で与えられる。

$$t_a = E[T_a] \quad \forall a \in \mathbf{A}, \quad (\text{a.9})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{a_1 a_2}^T &= \text{cov}[T_{a_1}, T_{a_2}] \\ &= E[T_{a_1} T_{a_2}] - t_{a_1} t_{a_2} \quad \forall a_1, a_2 \in \mathbf{A}, \end{aligned} \quad (\text{a.10})$$

where

$$\begin{aligned} E[T_{a_1} T_{a_2}] &= \sum_{i_1=0}^m \sum_{i_2=0}^m \hat{b}_{i_1 a_1} \hat{b}_{i_2 a_2} E[(D_{a_1} - d_{a_1})^{i_1} (D_{a_2} - d_{a_2})^{i_2}] \\ &\quad \forall a_1, a_2 \in \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (\text{a.11})$$

Clark and Watling¹⁾は、Isserlis⁴⁾による多変量正規分布の任意のモーメントを計算可能な方法を適用し、道路ネットワーク上の総移動時間の分布を求めている。本研究では、

$D_a \quad \forall a \in \mathbf{A}$ が多変量正規分布で近似できるものと仮定する。その結果、上記の方法を適用することが可能となり、式(a.3), (a.4)に示した結果を用いると、式(6), (7), (17), (18)を計算することができる。厳密には、 $D_a \quad \forall a \in \mathbf{A}$ は、多変量正規分布に従うわけではないが、この仮定は、上記の平均、分散・共分散を近似計算するために置いた。

付録 2

Bras & Georgakakos³⁾は、確率変数 X の m 乗 (m は任意の実数) となる確率変数 X^m を $x = E[X]$ と $(X - x)$ の線形結合で表す近似式を提案している。 X が正規分布に従う場合、 X^m の近似式は、式(a.12)で与えられる。

$$X^m \approx \alpha^{(X,m)} x + \beta^{(X,m)} (X - x), \quad (\text{a.12})$$

where

$$\alpha^{(X,m)} = x^{m-1} \left(1 + \sum_{l=1}^n \frac{\prod_{i=0}^{2l-1} (m-i) \prod_{j=1}^l (2j-1)}{(2l)!} cv^{2l} \right), \quad (\text{a.13})$$

$$\beta^{(X,m)} = x^{m-1} \left(\sum_{l=1}^n \frac{\prod_{i=0}^{2l-2} (m-i) \prod_{j=1}^l (2j-1)}{(2l-1)!} cv^{2l-2} \right), \quad (\text{a.14})$$

$$cv = \sqrt{E[(X - x)^2]} / x. \quad (\text{a.15})$$

本研究では、 $\tilde{C}_a$ を表現するために、 $X = C_a$, $m = -1$ として、Bras & Georgakakos の近似式を適用している。この場合、 $\tilde{C}_a$ の平均と分散・共分散は、 C_a の平均および分散・共分散を用いて、それぞれ式(a.16), 式(a.17)で与えられる。

$$\begin{aligned} \tilde{C}_a &= E[\tilde{C}_a] \\ &= \alpha_a^{(C,-1)} c_a, \end{aligned} \quad (\text{a.16})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{a_1 a_2}^{\tilde{C}} &= \text{cov}[\tilde{C}_{a_1}, \tilde{C}_{a_2}] \\ &= \beta_{a_1}^{(C,-1)} \beta_{a_2}^{(C,-1)} \sigma_{a_1 a_2}^C, \end{aligned} \quad (\text{a.17})$$

where

$$\sigma_{a_1 a_2}^C = \text{cov}[C_{a_1}, C_{a_2}]. \quad (\text{a.18})$$

本研究では、交通容量を正規分布によって表現しているため、確率変数 C の確率密度関数を $f(c)$ で表した場合、 $f(0) > 0$ となるため、 C^{-1} の平均および分散・共分散は、定義されない。この詳細な議論については、たとえば、Walter & George⁵⁾を参照されたい。しかしながら、式(a.15)に示す変動係数の値がある程度小さい場合、すなわち、 $f(0) \approx 0$ と想定できる場合、 $m = -1$ として多変量正規分布に Bras & Georgakakos の方法を適用して、 C^{-1} の平均および分散・共分散を精度よく推計できることが検証されている。