

## 2次元多都市モデルにおける集積・分散の分岐解析\*

Research on bifurcation analysis of Core-Periphery model of cities\*

八巻俊二\*\*, 柴崎晃\*\*, 池田清宏\*\*, 赤松隆\*\*\*, 河野達仁\*\*\*

By Shunji YAMAKI\*\*, Akira SHIBASAKI\*\*, Kiyohiro IKEDA\*\*, Takashi AKAMATSU\*\*\*, Tatsuhito KONO\*\*\*

### 1. はじめに

「財や人間の多様性・生産における規模の経済・財や情報の輸送費」の3者の相互作用により内生的に生じる集積力に注目し、都市・地域および国際間における空間経済システムの変遷を分析する分野が注目を浴びている。Krugman<sup>1)</sup>はDixit and Stiglitzの独占的競争モデル<sup>3)</sup>を空間経済に拡張し、大胆な仮定を加えることにより、輸送費の変化による工業の集積現象を分析した。このモデルは、Core-Periphery model(以下、CPモデルと略)と呼ばれ、集積について極めて示唆に富む結果をもたらしている。その代表的なものが分岐現象であり、例えば、2つの都市において集積力が強い場合には、対称均衡が不安定となり、分岐によっていずれかの都市に経済活動が集中して行くことが明らかにされている。

しかし、その集積・分散の仕組みは、地域(都市)数が2と3の場合しか明らかにされていない。そのため、都市数が更に増加した場合における人口の空間的(地域・都市間)集積・分散パターンに関して十分な研究が行われているとは言えない状況である。また、線形に並ぶ都市についての分析に限られており、2次元空間の想定はされていない。

そこで、本論文では、人口またその置かれた状況が相互に全く等価な $n$ 都市モデル( $n$ は自然数)に拡張し、短期均衡モデルと長期均衡モデル(確定的都市選択モデル・確率的都市選択モデル)を組み合わせた2次元多都市モデルを考える。「この都市の数が多くなる場合に、どのような集積が発生するのか?」という命題に答えることとする。この命題は都市の集積過程の理解をより現実的なものとする上で重要である。

そして、計算分岐理論による非線形方程式の局所的分岐解析法<sup>4)</sup>を本モデルに適合する形<sup>5)</sup>で導入し、都市数の増加に伴う都市数の集積・分散特性を分岐解

析結果に基づき、数値的に分析することを目的とする。

本論文では、Krugmanよりも扱いが容易で、都市集積現象のメカニズムを表現したForslid<sup>2)</sup>modelを用いる。このモデルも複数の均衡解を持ち、その集積状態の創発はパラメータ空間(総人口、交通費用等)での分岐を伴うことが知られている。

### 2. 都市の集積・分散モデル

本論文では、Forslidの短期均衡モデルと長期均衡モデル(確定的都市選択モデル・確率的都市選択モデル)を組み合わせたモデルを用いて、消費者の効用最大化問題を考え、互いに対等な $n$ 個の都市を設定し、都市の人口集積の分岐による進行のメカニズムを明らかにする。

#### (1) 一般均衡の枠組み

Forslidモデルは、下記の仮定に基づいている。

- 経済は、独占的競争の行われる工業部門 $M$ と完全競争的な農業部門 $A$ の2部からなる。
- 経済全体ではHigh skilled workerは $L^M = \mu(\in (0, 1))$ 、Low skilled workerは $L^A = (1 - \mu)$ 存在する。
- High skilled workerは、自身の効用最大化を図り自由に地域間を移動でき、地域 $r$ でのHigh skilled workerの割合を $\lambda_r$ で表す。
- Low skilled workerは、経済全体で $L^A$ 存在し、各地域には均等に分布している。労働部門間(工業・農業)については自由に移動出来るが、地域間の移動は不可能。
- 農業部門は、完全競争市場で同質な財を生産し、Low skilled workerしか雇用しない。
- 工業部門は、規模の経済が存在する不完全競争市場であり、Low skilled workerとHigh skilled workerの両方を雇用する。
- 工業品の輸送は、氷塊輸送という考えを用いる。農業品には輸送費がかからない。
- Low skilled workerの賃金 $w_r^A = 1$ 、High skilled workerの賃金は、地域 $r$ の名目賃金および実質賃金をそれぞれ $w_r^M$ 、 $\omega_r^M$ で表す。

\*キーワード：Forslidモデル、計算分岐理論、都市集積分散現象

\*\* 東北大学大学院工学研究科土木工学専攻

\*\*\* 東北大学大学院情報科学研究科

(〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06,

TEL: 022-795-7420; FAX: 022-795-7418)

本研究では、 $n$  都市における工業労働者数がある 1 都市から順に  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$  と正三角形を規則的に組み合わせた格子点上に設置するものと、等間隔で線形状に分布するものを考え、High skilled worker は都市間を結ぶパス間を移動する。また、都市  $r$  から都市  $s$  までの工業品輸送費  $T_{rs}$  は、ある一定値  $\tau$  と都市間の最短距離で決定される指数関数で表現すると定義し、 $T_{rs} \in (0, 1]$  とする。

$$T_{rs} = \exp(\tau d_{rs}) \quad (1)$$

とする。 $(d_{rs})$  は都市  $r$  から都市  $s$  に至る最短距離) さらに以下では、Forslid model と確定的 (Deterministic) 都市選択モデルの組み合わせを FD model, Forslid model と確率的 (Stochastic) 都市選択モデルの組み合わせを FS model と呼ぶことにする。更に、各々のモデルの非線形連立方程式は以下のように定式化される。

## (2) 支配方程式の定式化

消費者の効用最大化行動、生産者の利潤最大化行動、氷塊輸送を考慮したこの FD・FS モデルにおいて、都市  $r$  の工業労働者の賃金  $w_r$  は以下に示す連立方程式によって決定される。

### a) FD model

$$\mathbf{F}^{\text{FD}}(\mathbf{u}^{\text{FD}}, f^{\text{FD}}) = \begin{cases} \mathbf{P}^{\text{FD}}(\mathbf{u}^{\text{FD}}, f^{\text{FD}}) = (\bar{\omega} - \omega_r)\lambda_r = 0 & (2) \\ X^{\text{FD}}(\lambda) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n - 1 = 0 & (3) \\ \bar{\omega} - \omega_r \geq 0 \quad \lambda_r \geq 0 & (4) \end{cases}$$

### b) FS model

$$\mathbf{F}^{\text{FS}}(\mathbf{u}^{\text{FS}}, f^{\text{FS}}) = \frac{\exp(\omega_r \theta)}{\sum_{s=1}^n \exp(\omega_s \theta)} - \lambda_r = 0 \quad (5)$$

$(r = 1, 2, \dots, n)$

ここで、

$$G_r = \left[ \sum_{s=1}^n \lambda_s (T_{rs}^M)^{1-\sigma} \right]^{1/(1-\sigma)}, \quad \omega_r = \mu^\mu (1-\mu)^{1-\mu} w_r^M G_r^{-\mu},$$

$$Y_r = \frac{\mu \lambda_r w_r^M}{\sigma} + \frac{\sigma - \mu}{\sigma n}, \quad w_r^M = \sum_{s=1}^n \frac{(T_{rs}^M)^{1-\sigma} Y_s}{\sum_{k=1}^n \lambda_k (T_{sk}^M)^{1-\sigma}} \quad (6)$$

各変数の意味は下記のとおりである。

- $\omega_r$ : 都市  $r$  の High skilled worker の実質賃金
- $\bar{\omega}$ : 均衡実質賃金
- $\lambda_r \in [0, 1]$ : 経済全体で都市  $r$  の High skilled worker のシェア
- $Y_r$ : 都市  $r$  の所得
- $w_r^M$ : 都市  $r$  における High skilled worker の賃金
- $\mu \in (0, 1]$ : 工業品への支出割合
- $G_r$ : 都市  $r$  の工業品価格指数
- $\sigma \in [1, +\infty)$ : 任意の差別化された 2 財間の代替弾力性
- $\theta$ : 実質賃金に対する知覚誤差の分散を表すパラメータ

式 (2)~(6) の経済学的意味等については Fujita et al<sup>1)</sup> 等の参考文献に譲る。

## 3. 計算分岐理論の適用

本モデルにおける非線形方程式 (2)~(5) に対して、分岐挙動を求める計算分岐理論<sup>4)</sup>を適用する。計算分岐理論の CP モデルへの有用性と適用についての詳細は参考文献<sup>5)</sup>に譲る。

## 4. 都市の集積解析結果

例として、6 都市、19 都市、37 都市、61 都市と 127 都市を取り上げる。都市間を結ぶ道は破線で示し、ある都市 1 人口  $\lambda_1$  と輸送費  $T$  との関係を図 1~6 に示す。それぞれ FD model と FS model についての解析結果を掲載する。両モデルとも安定解を黒の実線で示した。また、FD model の不安定解において不等式条件 (4) を満たす解と、FS model の不安定解を黒の破線で示した。さらに、人口比率の大きさを●の面積で示し、経路上の白丸は分岐点である。『新しい空間経済学』<sup>1)</sup>に基づき、パラメータ  $\mu = 0.4$  に固定し、 $\sigma = 5.0, 10.0$ ,  $\theta = 350, 1000$  の値において解析を行った。以下その特徴とモデルの比較を記す。

### (1) 対称性破壊分岐

19 都市を例に説明する。FD model と FS model は、図 1~6 において全て輸送費が高い方から低い方に向けて、同一の人口を持つ状態から対称性を順次喪失し、中心都市 (図の重心) への集積を起している。その中で、対称性という観点から、パラメータ  $(\sigma, \theta)$  の値の変化により異なる集積分散現象が生じることが判明した。図 2-A.(FD model,  $\sigma = 5.0$ ) と図 2-B.(FS model,  $\sigma = 10.0, \theta = 350$ ) のときは、六角形の対称性から三角形の対称性へと分岐現象が発生している。

一方、図 2-C.(FD model,  $\sigma = 10.0$ ) と図 2-D.(FS model,  $\sigma = 10.0, \theta = 1000$ ) のときは分岐現象は発生せず、伴に六角形の対称性を保ちながら都市間を人口が輸送費の変化とともに移動する。パラメータ  $(\sigma, \theta)$  値の差異による分岐パターンは、群論的分岐理論<sup>4)</sup>の適用により、対称性と規則性の両方の観点で導出することが可能であることが示唆される。

### (2) FD model と FS model の比較

FD model と FS model の違いは、都市選択の定義の違いである。

6 都市においては、両者のモデルとも分岐現象は起こらず、ほぼ同等な結果が得られている。19 都市において、図 2-C.FD model と図 2-D.FS model の結果を比

較すると、ほとんど同じ結果が得られている。したがって、代替弾力性を表すパラメータ  $\sigma$  を固定し、知覚誤差を表す任意パラメータ  $\theta$  が大きくなると、FS model が採用する確率的都市選択モデルは、FD model が採用した確定的都市選択モデルに近づくこと分かる。また、FS model において  $\theta$  を  $\infty$  としたときは、FD model に限りなく近づくことが予想される。しかし、図-2のFD model とFS model の図の決定的な違いに、FS model では輸送費が0になると分散が起こるが、FD model ではこのような現象は見られないということがある。ここで、例に37都市を取り上げて説明する。 $\theta$  が大きくなると、消費者が効用の違いに敏感なときを示し、輸送費の変化に対してほぼ直線的に人口が移動する。一方、 $\theta$  が小さくなると、消費者が効用の違いに鈍感になるときを示し、人口の移動が起こらなくなることを図-4.A.B から確認できる。

### (3) 都市間の輸送費変化と分岐現象

例としてFS model の6都市を採用する。図2は中心都市から放射線状に伸びる都市への輸送費だけを他の都市間を移動する輸送費より高く設定した場合である。図1と比較して、分岐現象が多数発生していることがわかる。全ての都市間の輸送費を同等にするよりも、差異を与えた方が分岐を順次、分岐を起こしながら集積分散していくと判断される。

中心都市への移動が大きな負担して設定した場合は、円周上経済を考慮したモデル<sup>6)</sup> とほぼ同等な結果が得られる。

### (4) FS model におけるパラメータ ( $\sigma, \theta$ ) と分岐現象の関係性

FS model において、都市数を127都市まで解析した結果を示す。図が複雑になるため、分岐経路と経路上の都市形状の図示は省略する。図5,6ではパラメータ ( $\sigma, \theta$ ) によって安定解から不安定解に切り替わる個所が生じている。

詳しく経路上の都市形状を見てみると、六角形の対称性を保ったままの群とするパターンが喪失することなく、都市が集積・分散現象を起こしていることがわかった。そして、安定経路から不安定経路に切り替わる点の固有ベクトルを下に分岐の方向を調べた。すると、六角形対称性都市から三角対称性都市へと分岐を起こしていることがわかった。つまり、パラメータ ( $\sigma, \theta$ ) の与え方により、六角形対称性を持つ都市形状から三角対称性を持つ都市形状へと順次対称性を喪失

する分岐を起こしながら、都市が集積・分散していくことが推測される。

また、具体的にどのようにパラメータ ( $\sigma, \theta$ ) を振り分けて解析を行うと、上記のような分岐を起こし、集積・分散現象が生じるのか、例として127都市を取り上げる。すると解析の結果、図7のように「分岐を起こす領域」と「分岐を起こさない領域」とに分けることが出来た。都市形状から見てみると、境界線を境に六角形の対称性を喪失することなく安定解だけで分岐を起こさない領域と、六角形の対称性を喪失し、他の群へと分岐を起こす領域に分けることが出来た。

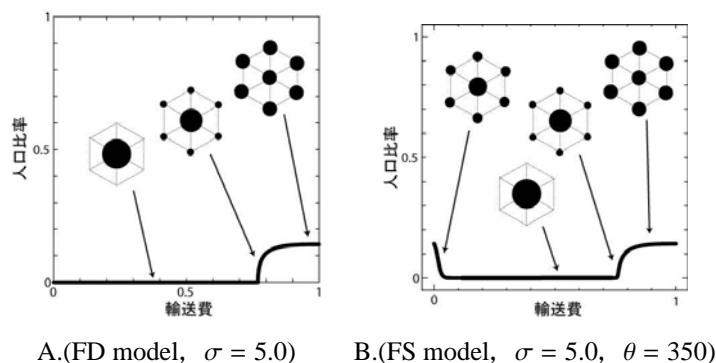


図-1 6都市の解析結果

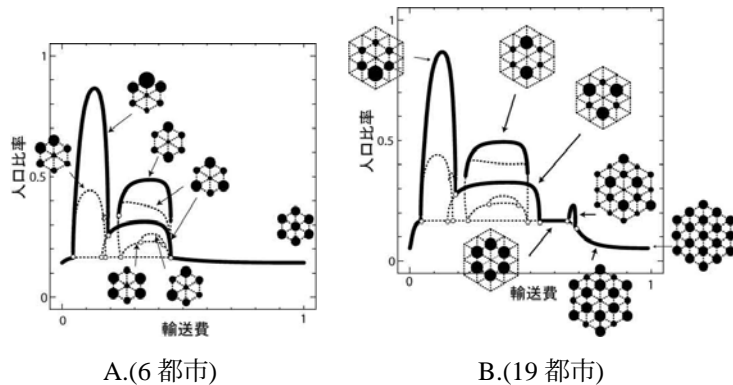
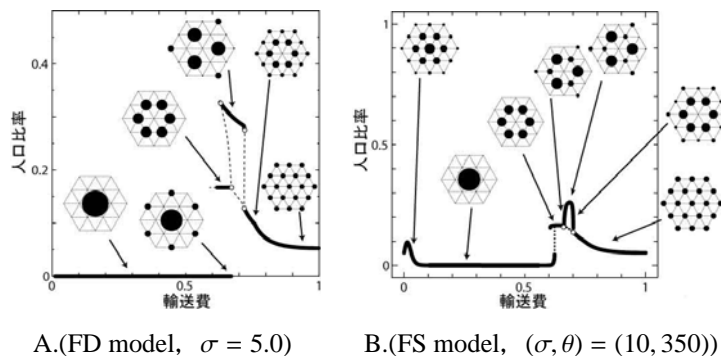


図-2 放射状の輸送費用の負担が大 (FS model)



A.(FD model,  $\sigma = 5.0$ ) B.(FS model, ( $\sigma, \theta$ ) = (10, 350))

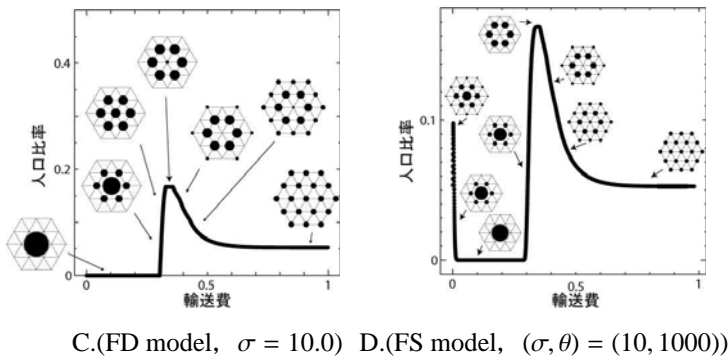


図-3 19都市の解析結果

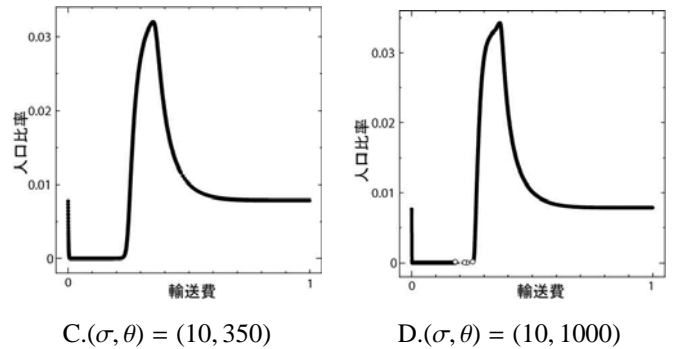
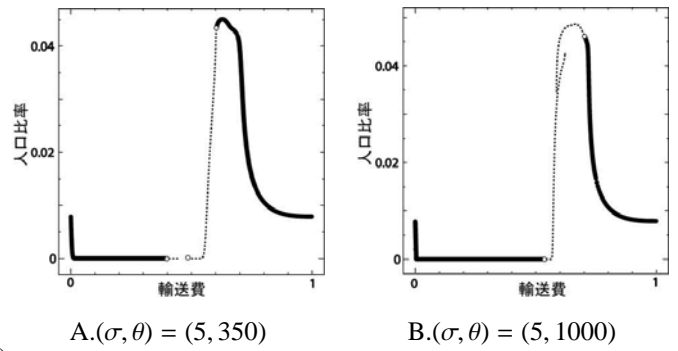


図-6 127都市の解析結果 (FS model)

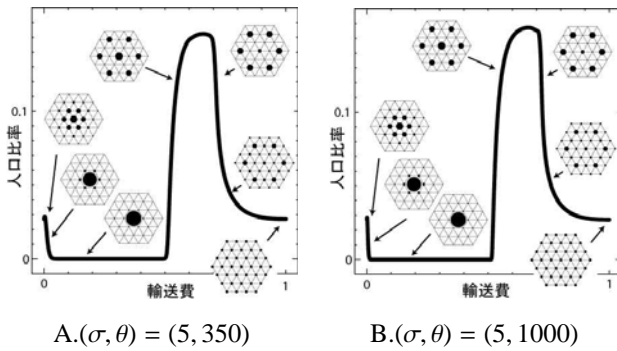


図-4 37都市の解析結果

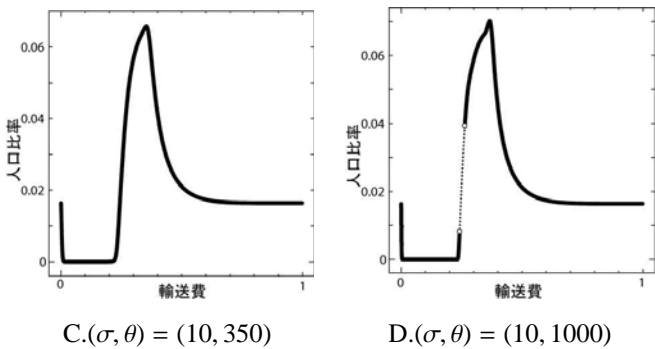
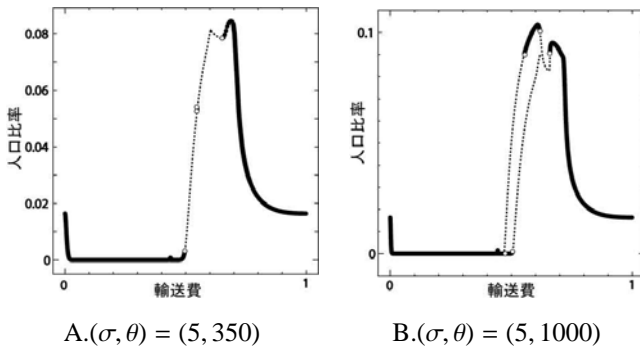


図-5 61都市の解析結果

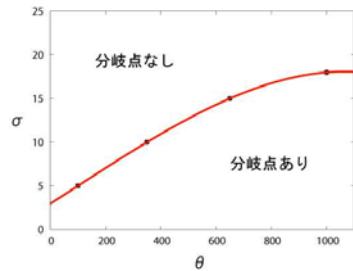


図-7 分岐の境界条件 (127都市)

参考文献

- 1) M. Fujita, P. Krugman, and A.J. Venables, *The Spatial Economy: Cities, Regions, and International Trade*, MIT Press, 1999.
- 2) Rikard Forslid, Gianmarco I. P. Ottaviano: An analytically solvable core-periphery model. *Journal of Economic Geography*, Vol. 3, pp. 229-240, 2003.
- 3) A.K. Dixit, and J.E. Stiglitz, Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity, *American Economic Review*, 67(3), pp.297-308, 1997.
- 4) 藤井文夫, 大崎純, 池田清宏, 構造と材料の分岐力学, 計算工学シリーズ 3, コロナ社, 2005.
- 5) 柳本彰仁, 池田清宏, 赤松隆, 河野達仁, 八巻俊二: 計算分岐理論による都市の集積分散モデルの分岐経路追跡法の提案
- 6) 柳本彰仁 (修士論文), 八巻俊二 (卒業論文): 都市の集積分散モデルとその分岐解析に関する研究, 2007.
- 7) M. Golubitsky, I. Stewart, and D.G. Schaeffer, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Vol. 2. Springer-Verlag, New York, 1988.
- 8) K. Ikeda, and K. Murota, *Imperfect Bifurcation in Structures and Materials*, Springer-Verlag, New York, 2002.