

# 限界時間の均衡化による動的システム最適配分に関する研究\*

## Study on dynamic system optimum assignment to establish marginal time equilibrium\*

坪田隆宏\*\*・桑原雅夫\*\*\*

By Takahiro TSUBOTA\*\*・Masao KUWAHARA\*\*\*

### 1. はじめに

システム最適(SO: System Optimum)配分とは、交通ネットワーク全体の総旅行時間を最小化する配分原則であり、ここから得られる知見は、交通施策の評価・設計の際のベンチマークとして有用であると考えられる。従来のSO配分は、静的な枠組みでの分析に留まっていたが、交通現象は旅行時間や待ち行列長等の変化を含む動的な現象であるため、その分析も動的な枠組みで為される必要がある。このように、SO配分を動的な枠組みに拡張したものを動的システム最適(DSO: Dynamic System Optimum)配分と呼び、動的限界時間(DMT: Dynamic Marginal Time)の均衡問題と等価であることが知られている。

既往の研究には、DSO配分問題とDMT均衡問題との等価性に着目し、多起点多終点ネットワークを対象に分析を行った例<sup>1,2)</sup>があるが、これらの研究ではDMTをリンクベースで計算し、それらの単純和を用いて経路DMTを計算している。しかし一般に、リンクDMTを経路に沿って単純に足し合わせた場合、経路DMTを過大評価してしまうという問題点がある。加えて、後述するように、DMTは待ち行列がまさに発生しようとする瞬間、不連続に2つの値を持つが、上に挙げた研究では、このようなDMTの性質を無視したものとなっている。一方、1起点1終点ネットワークを対象に詳細な分析を試みた例<sup>3,4)</sup>もある。これらの研究ではDSOを達成するための一般性のある原則を明らかにしているが、一般ネットワークへの拡張は困難であると考えられる。また、経路交通量の変化による総旅行時間の変化を経路に沿って追跡し、経路DMTをリンクDMTに分解して分析を行った研究<sup>5)</sup>もあるが、分流部を含むネットワークでの分析に難があり、分流部を持たないネットワーク(多起点1終点)を対象とした分析に留まっている。その他、Cell transmission modelを用いて交通流を離散的に表現し、1起点多終点ネットワークを対象に、DSO配分問題を線形計画問題として解いた例<sup>6)</sup>もあるが、車両を道路上の任意の場所で停止させることが出来るようなモデルとなっており、現実性の観点から問題がある。

以上、概観したように、DSO配分問題は、一般ネットワークを対象とした分析へは至っていない。そこで本研究では、DSO配分問題を一般ネットワークへ拡張することを目標とする。具体的には、DSO配分問題をDMT均衡問題として捉え、繰り返し計算を用いて均衡へ導く手法を構築する。特に、既往の研究では考慮されていなかった

\*キーワード：交通ネットワーク分析、経路選択

\*\*非会員，工修，パシフィックコンサルタンツ株式会社  
(東京都新宿区西新宿2-7-1 新宿第一生命ビル  
TEL03-3344-1286, FAX03-3344-1887)

\*\*\*正員，Ph.D，東京大学 国際・産学協同研究センター  
(東京都目黒区駒場4-6-1 TEL03-5452-6419, FAX03-5452-6420)

た、「DMTの二値性を用いた均衡状態の表現」及び「経路DMTの評価方法の検討」を行う。

### 2. 動的システム最適配分

#### (1) 制約条件

はじめに、動的な交通流の満たすべき制約条件として、「ノードにおけるフロー保存則」と「リンクでのFirst-In-First-Out (FIFO)原則」を説明する。

##### a) ノードでのフロー保存則

ネットワークはリンクとノードから構成され、ノード*i*から*j*に向かう有効リンクをリンク(*i, j*)と書く。第一の制約条件は、任意のノード*i*でのフロー保存則で、同じ目的地*d*を持つ交通に着目して次の様に書ける。

$$-\sum_k D_{ki}^d(t) + \sum_j A_{ij}^d(t) - Q_{id}(t) = 0, \quad i=1,2,\dots,N, \quad i \neq d. \quad \dots (1)$$

ただし、

$A_{ij}^d(t)$  = 時刻*t*までにリンク(*i, j*)に流入した目的地*d*を持つ車両の累積台数

$D_{ki}^d(t)$  = 時刻*t*までにリンク(*i, j*)に流出した目的地*d*を持つ車両の累積台数

$Q_{id}(t)$  = 時刻*t*までに起点ノード*o*を出発して終点ノード*d*に向かう車両の累積台数 (所与)。

##### b) リンクでのFIFO原則

第二の制約条件はリンクでのFIFO原則に関する条件である。リンクのFIFOとは、リンクから流出する順番は流入する順番に等しいとすることであり、時刻*t*にリンク(*i, j*)へ流入する車両のリンク旅行時間を用い、次のように表される。

$$A_{ij}^d(t) = D_{ij}^d(t + T_{ij}(t)) \quad \dots (2)$$

式(2)の両辺を時刻*t*で微分することにより、次のように表すこともできる。

$$\mu_{ij}^d(t + T_{ij}(t)) = \mu_{ij}^d(t + T_{ij}(t)) \cdot \frac{\lambda_{ij}^d(t)}{\lambda_{ij}(t)} \quad \dots (3)$$

ただし、 $\lambda_{ij}^d(t) = d A_{ij}^d(t) / dt$ ,  $\mu_{ij}^d(t) = d D_{ij}^d(t) / dt$   
 $\lambda_{ij}(t) = d A_{ij}(t) / dt$ ,  $\mu_{ij}(t) = d D_{ij}(t) / dt$ .

式(3)より、FIFO原則を仮定する場合、目的地別リンク流出率が他の目的地を持つ交通にも影響を受けることが分かる。

#### (2) 動的システム最適配分の定式化

DSO配分とは、ある計画時間帯において、ネットワーク全体の総旅行時間を最小化するような、各リンクへの時間別流入率(フローパターン)を求める配分原則であ

り、次式によって表される。

$$\min F = \sum_{i,j,t} T_{ij}(t) \lambda_{ij}(t) \Delta t \quad \dots (4)$$

subject to 式(1), (2), (3)

式(4)及び制約式(1), (2), (3)により示される最適化問題は、DMTの均衡問題と等価である(熊谷ら<sup>7)</sup>。

### 3. リンクの動的限界時間

次に、桑原を参考に、リンクDMTの導出を行う。

式(4)について、ある特定のリンク( $i, j$ )のみを考える。リンク( $i, j$ )のDMTは、リンクの総旅行時間を時刻の単位交通量で微分することにより、次のように表される。

$$DMT_{ij}(t) = \frac{\partial}{\partial \lambda_{ij}(t) \Delta t} \sum_t \{T_{ij} + w_{ij}(t)\} \lambda_{ij}(t) \Delta t \quad \dots (5)$$

$$= T_{ij} + w_{ij}(t) + \sum_{u=t}^{t_e} \frac{\partial w_{ij}(u)}{\partial \{\lambda_{ij}(t) \Delta t\}} \lambda_{ij}(u) \Delta t \quad \dots (6)$$

ただし、 $t_e$  = リンク( $i, j$ )での待ち行列終了時刻

$$T_{ij}(t) = T_{ij} + w_{ij}(t) \quad \dots (7)$$

$T_{ij}$  = リンク( $i, j$ )の自由旅行時間

$w_{ij}(t)$  = 時刻 $t$ にリンクへ流入した車両が被る、待ち行列中での遅れ時間

式(6)の右辺第3項は、待ち行列の状態に応じて、以下に示すような3種類の値をとる。

[1]  $w_{ij}(t) > 0$  の場合

待ち行列が存在する場合、式は次のように変形できる。

$$DMT_{ij}(t) = T_{ij} + w_{ij}(t) + \sum_{u=t}^{t_e} \frac{\partial \{\lambda_{ij}(t) \Delta t / \mu\}}{\partial \{\lambda_{ij}(t) \Delta t\}} \lambda_{ij}(u) \Delta t \quad (8)$$

$$= T_{ij} + w_{ij}(t) + \sum_{u=t}^{t_e} \frac{\lambda_{ij}(u)}{\mu_{ij}} \Delta t \quad \dots (9)$$

$$= T_{ij} + w_{ij}(t) + \{A_{ij}(t_e) - A_{ij}(t)\} / \mu_{ij} \quad \dots (10)$$

$$= T_{ij} + t_e - t \quad \dots (11)$$

$\mu_{ij}$  = リンク( $i, j$ )のボトルネック容量

式(11)は、ある時刻 $t$ の流入レート $\lambda_{ij}(t)$ は、それ以降、遅れを被る最後の車両のリンク流入時刻 $t_e$ までに、その経路に流入した車両の旅行時間にも影響を与えることを示している。式から分かるように、DMTは、車両の流入時刻から、渋滞終了時刻 $t_e$ までの時間として表される。

[2]  $w_{ij}(t) = 0$  かつ  $\lambda_{ij}(t) < \mu_{ij}$  の場合

待ち行列が存在せず、流入率が容量未満の場合は、DMTは自由旅行時間 $T_{ij}$ に等しい。

$$DMT_{ij}(t) = T_{ij} \quad \dots (12)$$

[3]  $w_{ij}(t) = 0$  かつ  $\lambda_{ij}(t) = \mu_{ij}$  の場合

待ち行列は存在しないが、流入率が容量に等しい場合、すなわち、待ち行列がまさに発生しようとする状態では、DMTは不連続に2つの値をとる。この状態で流入率が1単位増加すると、待ち行列が発生するため、DMTは(a)の場合と等しくなる( $DMT_{ij}^+(t)$ )。一方、流入率が1単位減少すると、待ち行列は発生しないため、DMTは(b)の場合と等しくなる( $DMT_{ij}^-(t)$ )。

$$DMT_{ij}(t) = \begin{cases} DMT_{ij}^+(t) = T_{ij} + t_e - t \\ DMT_{ij}^-(t) = T_{ij} \end{cases} \quad \dots (13)$$

以上で説明したように、リンクDMTは、リンクの累積交通量図から、待ち行列の開始時刻と終了時刻を得ることで、評価することができる。

### 4. 動的限界時間の均衡

総旅行時間を最小化するDSO配分は、経路毎のDMTを均衡させることで得られるが、第2章で述べたように、待ち行列が発生しようとする瞬間([3]の場合)、DMTは不連続に2つの値を持つため、均衡状態の表現も、このような二値性を考慮したものである必要がある。本章では、図1のようなネットワークを用い、経路毎のDMTを均衡へ導く手法を検討する。

高速道路と一般道が並行し、それぞれ $\mu_f$ 、 $\mu_a$ の交通容量を持つ。自由旅行時間は、それぞれ $T_f$ 、 $T_a$ ( $T_f < T_a$ )であり、待ち行列は物理的な長さを持たないものと仮定する(Point Queue)。

はじめに、このネットワークを用いて、DMTの均衡状態を考察し、DMT均衡アルゴリズムを構築する。その後、実際に分析を行い、解析解と比較することで、アルゴリズムの有効性を検証する。

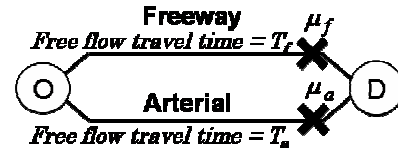


図1 分析に用いたネットワーク

#### (1) DMTの均衡条件

DMTの均衡状態とは、「使用されている経路のDMTが、使用されていない経路のDMTよりも小さいか、せいぜい等しい」状態である。よって、各経路のDMTが1つしか存在しない場合は、最小DMTの経路へ全需要を配分すればよい。一方、経路DMTが不連続に2つの値を持つ場合にはこの上記の条件は必ずしも満たされず、両方の経路へ需要が配分される状況が発生し得る(桑原ら<sup>3)</sup>)。特に、「ある経路のDMTが $DMT^+$ と $DMT^-$ の2つの値を持ち、代替経路のDMTを挟み込んでいる」場合には、一方の経路から他の経路へフローをシフトしても、総旅行時間は変化しない。

以上より、本論文では以下の2点をDMTの均衡条件として採用し、DMTの均衡アルゴリズムを構築する。

[i] ある経路のDMTが $DMT^+$ と $DMT^-$ の2つの値を持ち、代替経路のDMTを挟み込んでいる。

[ii] 最小DMTの経路へ全需要が配分されている。

#### (2) DMTの均衡アルゴリズム

第3章で述べたように、DMTの計算には、計画時間帯の需要を全て配分し、待ち行列の開始・終了時刻を調べる必要がある。その為、DMTを均衡へ導く為には、以下に示すようなステップから成る繰り返し計算が必要となる。

- Step 0 : 初期化 ( $n = 0$ )
- Step 1 : ネットワークへ任意のフロー $F(n)$ を配分する.
- Step 2 : リンクごとに累積図を描き, 経路上の待ち行列開始時刻, 終了時刻を得る.
- Step 3 : 経路ごとのDMTを計算する.
- Step 4 : 均衡条件に従い, Auxiliary Flow( $G(n)$ )を求め, 降下方向 $d(n)$  ( $= G(n) - F(n)$ )を決定する.
- Step 5 : 次式に従って, 新しいフローを決定する.  

$$F(n+1) = F(n) + d(n)/n$$
- Step 6 :  $d(n)/n$ が十分小さければ終了, そうでない場合,  $n = n+1$ として, Step 1 へ戻る.

(3) 分析例

前節で示した手法を図1のネットワークに対して適用し, 解析解との比較を通じて, 手法の妥当性を検討する. ここでは,  $\mu_f = 25$ [veh/unit time],  $\mu_a = 35$ [veh/unit time],  $T_f = 0$ [unit time],  $T_a = 10$ [unit time]と設定し, 図2のような需要を与えた場合の結果を示す.

分析結果を図3に示す. 解析解と数値解, それぞれの累積交通量図及び DMT を重ね合わせたものである. 累積交通量図においては, 数値解と解析解とはほぼ一致しており, DMT においても, 類似した結果が得られた. また, 総旅行時間による比較でも, 解析解 = 10,546.6 に対し, 数値解 = 10,551 と, 非常に近い結果が得られた.

5. 一般的な経路の動的限界時間

DSO 配分を一般ネットワークへ拡張する際には, 経路ごとの DMT を均衡させる必要がある. ここまでの分析では, 単一ボトルネックの経路を仮定してきた. この場合, 経路全体を単一ボトルネックリンクとみなすことにより, リンク DMT と同様の手順で, 経路 DMT を評価することができた. しかし, 一般に経路上には複数のボトルネックが存在する. また, 多起点多終点や分合流を含むようなネットワークの場合, 異なる経路交通でボトルネックを共有するような場合も考えられる. そこで本章では, (1) 経路上に複数のボトルネックが存在する場合と, (2) 異なる経路交通でボトルネックを共有する場合, それぞれに関して考察を行う.

(1) 経路上に複数のボトルネックが存在する場合

図4のような2リンクから成る経路を考える. Link 1, Link 2 は共にボトルネックを持ち, 容量はそれぞれ  $\mu_1, \mu_2$  ( $\mu_1 > \mu_2$ ), リンクの自由旅行時間はそれぞれ  $T_1, T_2$  とする. この経路に, Link1 の容量を超過するようなシングルピークをもつ需要を与えた場合, リンクごとの累積交通量図は図5のように描ける. ここでは, Link 1 の出発曲線  $D_1(t)$  が, そのまま, Link 2 の到着曲線  $A_2(t)$  として扱われる.

いま, Link 1 に待ち行列の発生している時間帯に, 経路の交通量を 1 単位増加させたと考える. この場合, Link 1 の交通量は 1 単位増加するが, Link 2 の交通量は増加しない. なぜなら, Link 1 で待ち行列が発生している時間帯では, Link 2 への流入交通量は, Link 1 のボトルネック容量によって制限されている為である. すなわ

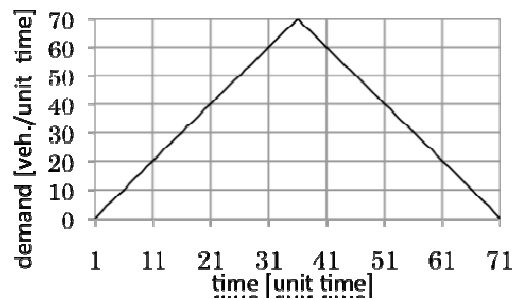


図2 分析に用いた需要パターン

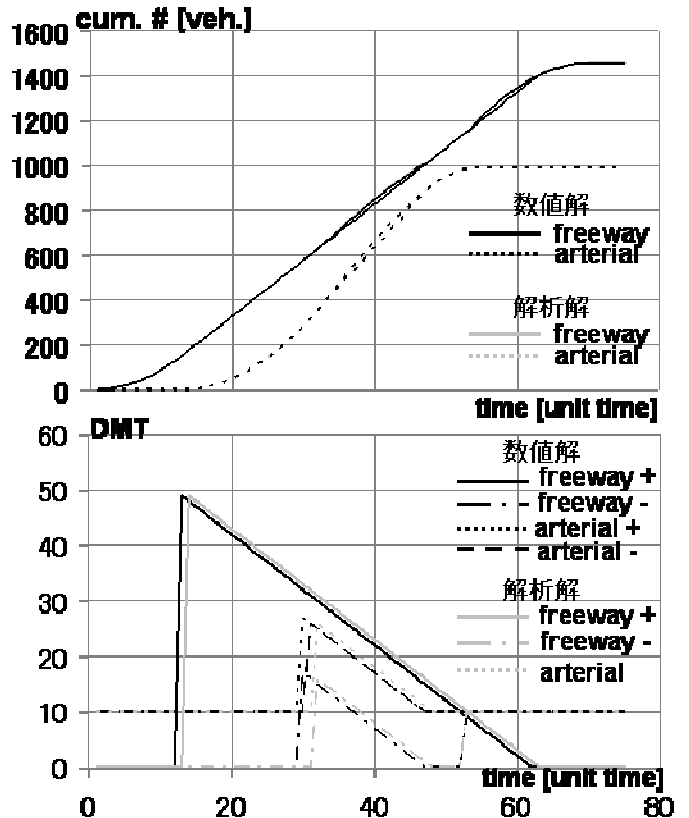


図3 分析結果 (上: 累積交通量図, 下: DMT)



図4 経路上に2つのボトルネックが存在する場合

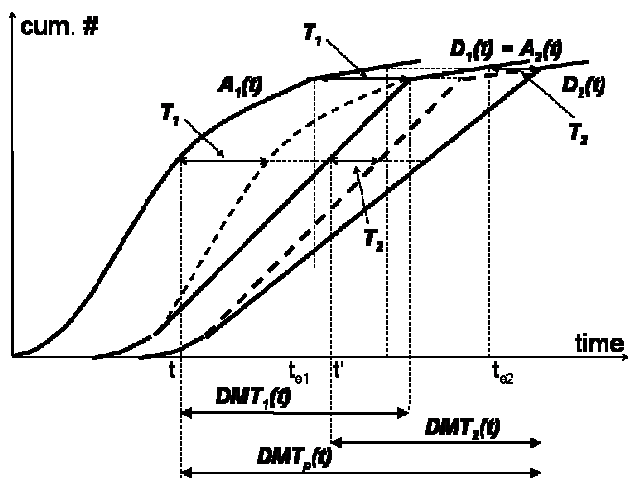


図5 2つのボトルネックを持つ経路の累積交通量図

ち、このような経路の場合、経路 DMT をリンク DMT の単純和として求めることはできない。

この場合、経路上の待ち行列をまとめて捉えて議論することができる。すなわち、時刻  $t$  での追加交通による総旅行時間の変化は、リンク DMT の場合と同様に、時刻  $t$  以降の総遅れ時間と、自由旅行時間とに分けて考えることができる。よって、図5の場合、時刻  $t$  に起点を出発した車両の経路 DMT は次のように計算される。

$$DMT_p(t) = t_{e2} - t + (T_1 + T_2) \quad \dots (14)$$

このように、経路上に複数のボトルネックが存在する場合であっても、リンクごとの累積交通量図を描き、経路上の待ち行列の開始・終了時刻を得ることができれば、リンク DMT の場合と同様に経路 DMT を評価することができる。

## (2) 異なる経路交通でボトルネックを共有する場合

次に、図6のように、異なる経路交通 Path A, Path B が、Link1 ボトルネックを共有しているケースを考える。

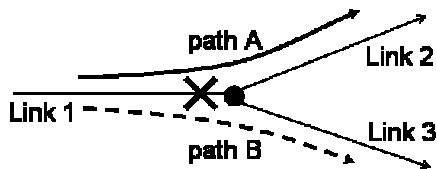


図6 異なる経路交通でボトルネックを共有する場合

時刻  $t$  に Path A の経路交通を 1 単位追加する場合を考える。まず、ここまでの考察と同様、Path A において、時刻  $t$  以降の総遅れ時間+自由旅行時間分の総旅行時間の増加が生じるが、同時に、FIFO 原則の式(3)の為、Path A の交通量が 1 単位増加することにより、Path A の交通へ割り振られるボトルネック容量が増加する。その影響で Path A の待ち行列終了時刻が僅かに早まり、Path A の総旅行時間に減少が生じる（便宜上、この減少分を  $A^-$  と表す）。一方、Path B へ割り振られる容量は減少し、その為、Path B の総旅行時間は増加する（増加分= $B^+$ ）。

異なる経路交通でボトルネックを共有する場合、FIFO 原則のため、上記のような現象が発生する。ただし、図6に示したネットワークの場合は、 $A^-$  と  $B^+$  は完全に打ち消し合う為、経路 DMT の評価には影響しない。

しかし、例えば Link 2 にもボトルネックが存在し、Link 3 にはボトルネックがない場合、Path A で Link 1 において発生した  $A^-$  は Link 2 のボトルネックで打ち消されてしまうのに対し、 $B^+$  は残ってしまう為、経路 DMT の評価へも影響を及ぼす。よって、経路 DMT を計算する際には、 $B^+$  も含めた評価が必要となる。

ただし、このような影響は分合流の度に消し合う為、十分に大規模なネットワークにおいては、最終的な影響は極めて小さいと考えられるが、今後、より詳細な検討を行う必要がある。

## 6. おわりに

本論文では、DSO 配分の一般ネットワークへの拡張を目指し、以下のことを行った。

はじめに、待ち行列の発生しようとする瞬間に、DMT

が不連続に 2 つの値を持つことを示し、その性質を考慮して、DMT を均衡へ導く手法を構築した。実際に、単一ボトルネックを持つ経路が並行するネットワークを対象に分析を行い、解析解との比較を行った結果、構築した手法から解析解に近い結果を得ることができ、手法の妥当性が確認できた。次に、分析対象をより一般的なネットワークへ拡張するために、経路 DMT の評価方法を考察した。経路上に複数のボトルネックが存在する場合と、異なる経路交通でボトルネックを共有する場合に関して考察を行った結果、大規模ネットワークであれば、リンクごとの累積交通量図を用いて、経路 DMT を評価できる可能性を示した。

今後の課題としては、より一般的なネットワークを対象として、経路 DMT の評価方法を考察することが挙げられる。具体的には、異なる経路交通でボトルネックを共有する場合に生じた、流出率の変化による経路 DMT への影響の考察が必要である。特に、影響が完全に打ち消される場合と、影響を考慮した DMT の評価が必要な場合とを区別することは、経路 DMT の評価に際して、有用であると考えられる。

## 7. 参考文献

- 1) M. O. Ghali and M. J. Smith: A model for the dynamic system optimum traffic assignment problem, Transportation Research part B, Vol. 29B, No. 3, pp. 155-170, 1995
- 2) S. Peeta and H. S. Mahmassani: System optimal and user equilibrium time-dependent traffic assignment in congested networks, Annals of Operation Research 60, 1995
- 3) 桑原雅夫, 吉井稔雄, 熊谷香太郎: 動的システム最適配分とランプ流入制御に関する研究—簡略ネットワークにおける基礎的分析—, 土木学会論文集, No. 667/IV, pp. 59-71, 2001
- 4) 長江剛志, 赤松隆: リアルタイム観測情報を活用した動的なシステム最適交通配分: 確率制御アプローチ, 土木学会論文集, Vol. 63 No. 3, pp. 311-327, 2007
- 5) W. Shen, Y. Nie and H. M. Zhang: On path marginal cost analysis and its relation to dynamic system-optimal traffic assignment, Transportation and Traffic Theory 17, pp. 327-360, 2007
- 6) Ziliaskopoulos, A.: A linear programming model for the single destination system optimum dynamic traffic assignment problem, Transportation Science, Vol. 34, pp. 1-12, 2000
- 7) 熊谷香太郎, 桑原雅夫, 吉井稔雄: 動的なシステム最適状態を達成する制御手法に関する研究, 土木計画学研究・講演集, No21(1), pp427-430, 土木学会, 1998
- 8) 桑原雅夫: 動的な限界費用に関する理論的分析, 土木学会論文集, No.709/IV-56, pp.127-138, 土木学会, 2002