利用者均衡配分問題へのゲーム理論的アプローチと動的均衡配分問題への応用*

An approach to user equilibrium assignment problems by the game theory and its application to dynamic user equilibrium assignment problems*

井料隆雅**
By Takamasa Iryo**

1．はじめに

交通ネットワーク上の利用者均衡配分問題では，Wardropによるその概念の提唱以来[1]，リンク交通量や経路交通量を整数ではなく連続的な値（実数）として定式化することが一般的であった．交通流を流体のような連続的なフローとみなして数式を記述すると，一般には問題の数学的取り扱いが容易になる．交通流を連続値で記述する考え方は，Beckmannらにより提案された等価な最適化問題の導出[2]をはじめとし，歴史的に見て多くの有用な性質の発見に貢献してきたといえよう．

いっぽう，交通流は本来1台1台の車両が集合して構成されるものであり，連続値をもちいた定式化はあくまでも近似的扱いであることに注意しなくてはならない．交通流を構成する各車両は独立した意思をもって自身の利得を最大化する選択肢（経路，時刻など）を選ぶ．また，車両どうしの相互作用も本来は追従モデルのように個別の車両間のあいだに定義されるものである．これまでは利用者均衡配分問題の理論をこのような離散的なモデルで構築することは必ずしも主流ではなかった．しかし，動的な交通流を前提として交通量配分問題を行う場合にはこのような離散的なモデルによる定式化も必要になると考えられる．特に，交通流シミュレーション，とくに各車両をエージェントとして表現し，その挙動を計算機により分析するミクロシミュレーションの挙動や性質を理論的に解析するためには，離散的なモデルを考えることが必須であるといえよう．

車両の行動とそれらの相互作用を個別に記述するということは，各車両が他の車両の選択肢に起因する相互作用（混雑など）を考慮しながらできるだけ自身の利得を最大化する，ということを考えることになる．このような現象を分析するためには非協力ゲームを用いて均衡配分を定式化すると都合がよい．

本研究では，混雑する交通ネットワーク上における非協力ゲームを「均衡配分ゲーム」と総称することとする．とくに本研究では均衡配分ゲームとして，

*キーワーズ：ゲーム理論，均衡配分理論
**正員，博士（工学），神戸大学大学院工学研究科市民工学専攻（神戸市灘区六甲台町1-1，iryo@kobe-u.ac.jp）

○ 各車両がそれぞれプレイヤーとなる．車両の集合を N で示す．台数は n で示す．
○ 各車両の一般化交通費用は旅行時間と同じとし，その符号を逆転したものを利得とする．
○ 各車両は固有の起終点および起点からの出発時刻（動的配分であれば）を持つ．
○ 各車両は経路のみ自由に選択可能である．すなわち各プレイヤーの戦略集合＝経路選択肢である．
○ 全車両の経路を決定し，何らかの交通流モデルを適用することにより，各車両の旅行時間と利得が決定する．以降では車両 $i \in N$ の経路選択を $x_i \in R_i$，車両 i 以外の経路選択を $x_{-i} \in R_{-i}$，車両 i の利得を $u_i\left(x_i, x_{-i}\right)$ で示す．あるいは，車両 i および j 以外の経路選択を $x_{-ij} \in R_{-ij}$ とし，車両 i の利得を $u_i\left(x_i, x_j, x_{-ij}\right)$ とも示す．ただし R_i，R_{-i}，R_{-ij} はそれぞれ i，i 以外，i および j 以外の車両の経路選択肢集合である．

というものを考える．本研究では静的な交通流モデルと動的な交通流モデルの両方についてとりあつかうこととし，それぞれを特に「静的均衡配分ゲーム」「動的均衡配分ゲーム」と名づけ，それらの特徴について既存研究の成果を交えて分析する．

2．静的均衡配分ゲーム

静的均衡配分問題をゲーム理論的に解析する試みは，Rosenthalによって1973年に発表されている[3]．この研究では，各車両をプレイヤーとしてNash均衡を解いた場合，純粋戦略による均衡解が存在し，そのうち１つはBeckmannらの示した最適解と同等の式の解として示されるが，それ以外の均衡解も存在するということが示されている．このことは，連続値を用いる静的均衡配分における「解の唯一性」が静的均衡配分ゲームでは成立しないことを示している．

一方，ゲーム理論の立場からは，静的均衡配分ゲームはPotential Gameに分類されることが知られている[4]．Potential Gameとは「どのプレイヤーの利得もひとつのポテンシャル関数で説明できる」という性質をもつゲー

ムである．数学的には，

$$u_i\left(x_i, x_{-i}\right) - u_i\left(y_i, x_{-i}\right) = P\left(x_i, x_{-i}\right) - P\left(y_i, x_{-i}\right) \quad (1)$$

が任意の $x_i, y_i \in R_i, x_{-i} \in R_{-i}$ で成立する関数 P が存在する，と記述される．

Potential Game は「外部性が対称」なゲーム，ということもできる．外部性が対称ということは，「ある2台の車両 i, j が配分されているとき，i をネットワークから除去したときの j の利得の変化は，j をネットワークから除去したときの i の利得の変化と等しい」ということである．これを数式で書けば，

$$u_i\left(x_i, x_j, x_{-ij}\right) - u_i\left(x_i, o_j, x_{-ij}\right) = u_j\left(x_i, x_j, x_{-ij}\right) - u_j\left(o_i, x_j, x_{-ij}\right) \quad (2)$$

が任意の $i, j \in N$， $x_i \in R_i$， $x_j \in R_j$， $x_{-ij} \in R_{-ij}$ で成立する，となる．ただし，o_i，o_j を「どの経路も使用しない（＝旅行しない）」という選択肢とし，どの経路も使用しない選択肢をとると一定の機会費用 Z がかかるとした．式(1)と式(2)の等価性の証明は付録１に示す．なお，外部性が対称な性質は，通常の静的配分理論においてリンクコスト関数のJacobianが対称なことに対応する．

Potential Gameの均衡解の収束性は複数のDay-to-day dynamics モデルに対して保証されていることが知られている[4]．たとえば，毎日毎日ランダムに選択された1台だけがその時点でより短い経路へ移動することを繰り返すとするDay-to-day dynamics (Better response dynamics)に対してPotential Gameは大域的に収束する．このような，Day-to-dayモデルに対する均衡解の収束性は非常に有用な性質である．この性質の存在は，実世界を表現するのに均衡解を用いることに対して肯定的な材料を提供するだけでなく，ナイーブな繰り返し計算でも均衡解を数値的に求めることが可能なことも意味する．

３．動的均衡配分ゲーム

本研究では，動的均衡配分ゲームを

a) リンクの旅行時間は時間に応じて変動する．
b) 先にリンクに流入した車両が先に流出する．
c) ある時刻にリンクに流入する車両の旅行時間は，その時刻よりあとにリンクに流入した車両には依存せずに決定する（因果律の仮定）．

という条件を満たす交通流モデルを適用した均衡配分ゲームと定義する．これらの条件を満たす交通流モデルはボトルネックモデルをはじめ多く考えられるが，ここではこれらの条件以外については特定せず議論を進める．

静的均衡配分ゲームと異なり，動的均衡配分ゲームは一般的にはPotential Gameにはならない．これはc)の条件に起因する．c)の条件は，ある車両が経路変更等によりあるリンクから消滅した場合，その車両より遅く同一のリンクに流入している車両の旅行時間は変動するが，より早く流入している車両の旅行時間は変動しないことを意味する．これは結果として外部性の対称性を損ねる．以上のことはボトルネックモデルにおける「時間軸方向の外部性」に対応する．

いっぽう，条件c)を利用すれば，動的均衡配分ゲームはPotential Gameとは異なった便利な性質を持つケースもあることがわかる．ここでは，簡単のためにネットワーク形状を「1起点多終点(One-to-many)ネットワーク」に限定する（**図-1**）．また，車両を示す集合 N を1以上 n 以下の整数の集合とし，各車両は起点からの出発順番で参照されるとしよう．いま，1以上 $n-1$ 以下の任意の出発順番 k と，それより大きい順番 $i > k$ を指定し，

$$u_k\left(x_k, x_i, x_{-ik}\right) \geq u_k\left(y_k, x_i, x_{-ik}\right) \quad \text{for } \forall y_k \in R_k \quad (3)$$

がある x_k, x_i, x_{-ik} で成立しているとする（これは，各車両の経路選択が x_k, x_i, x_{-ik} で指定されたとき，車両 k は最短経路を選んでいることを意味する）．このとき，

$$u_k\left(x_k, y_i, x_{-ik}\right) \geq u_k\left(y_k, y_i, x_{-ik}\right) \quad \text{for } \forall y_i \in R_i, \forall y_k \in R_k \quad (4)$$

が成立する（証明は付録２に記す）．式(4)は「車両 k の最短経路は，k 番目よりあとに出発する車両の経路選択の影響を受けない」ということを意味する．このことは「各車両が最短経路を選ぼうとしている限り，外部性は時間軸にそって正方向にしか伝播しない」といいかえることもできる．

式(4)の性質を用いれば動的均衡配分ゲームの均衡解の解法および収束性を示せる．解法についてはきわめて簡単であり「出発時刻の早い順に配分する」だけである．これは赤松・桑原により提示された連続値による動的均衡配分の解法と同等である[5]．いっぽう，収束性については少なくともBetter response dynamicsに対して示すことができる．いま，1番目の車両から s 番目の車両までが最短経路を選択している状況を考えよう．ある日に経路を変更する車両として i がランダムに抽出され，その車両は「現状より早い経路が発見できれば，その経路を新たに選択するようになる」としよう．この操作は

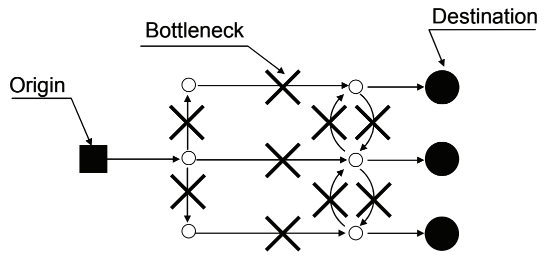

図-1　1起点多終点ネットワークの例

1) $i \le s$ であれば，車両i は経路を変更しない．
2) $i = s+1$ であり，なおかつ車両i が最短経路を選択すれば，結果として「1番目の車両から$s+1$番目の車両までが最短経路を選択している」状態になる．
3) それ以外の場合，$s+1$番目の車両は最短経路以外を選択している．

の３つに場合わけ出来る．これらのうち2)の場合にはsは1だけ増加し，それ以外についてはsは不変である．車両i がランダムに選択される確率は，$s < n$ であるかぎり常に０より大きいので，Better response dynamicsを無限回繰り返せば必ず$s = n$ が成立するようになる．$s = n$ はすべての利用者が最短経路を選択していることを意味するので，この状態は均衡状態である．すなわち，（1起点多終点の）動的配分ゲームの均衡状態は上記のDay-to-day dynamicsに対して収束性を持つ．なお「1番目の車両が最短経路を選択していない」場合は，その車両が経路を変更する車両として抽出され，なおかつそのときに最短経路を選択した時点で$s=1$となるので，結局，最終的には上記の流れに従ってs が増加し，均衡状態へ収束する．

一般的なネットワーク形状，すなわち多起点多終点(Many-to-many)ネットワークでは，式(4)が必ずしも成立するわけではないので，1起点多終点の結論はそのまま適用できない．ただ，これはMany-to-manyにおいて式(4)はいかなるときも成立し得ないことを意味するわけではない．ネットワーク形状および交通需要によっては，「各車両に適正に順番を付与する」ことによって，式(4)を成立させることは必ずしも不可能とはいえない．これが可能な簡単なケースは図-2のような「２起点から出発し，あるノードで合流してから各終点へ向かう」ネットワークである．この場合は合流するノードの流入時刻順に順番を与えれば式(4)が成立することは明らかである．より複雑なネットワークでもこのような「外部性の順番付け」が可能なケースもあることは期待できよう．

なお「外部性の順番付け」が可能であれば，Better response dynamicsは必ず均衡解へ収束するので，具体的な需要とネットワークが与えられている場合は，まずはそれを用いて均衡解の逐次計算を試みるのも手である．ただ，Better response dynamicsの手順には乱数が含まれるため，与えたケースが収束するのかしないのかの判断は簡単とは限らない．そのような状況を避けるためには，あらかじめ便宜的な連番を車両に振り，経路を変更する車両を，連番が小さいほうから大きいほうへ順に抽出することが望ましい．また，当然のことながら，抽出された車両は「より(better)」早い経路ではなく，最初から「最短(best)経路」に配分したほうが効率がよい．式(4)が成立するような「外部性の順番付け」が可能なケースであれば，連番のつけかたに関わらず，上述の方法を用いることにより，各車両の経路選択は有限の繰り返し回数で必ず均衡解に収束する．

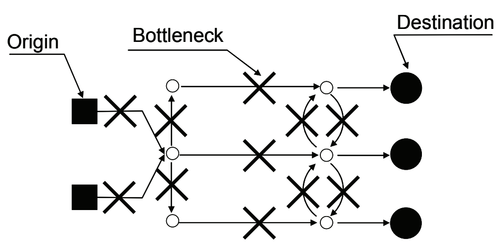

図-2　２起点から出発し合流するネットワークの例

４．まとめと考察

本研究では，交通ネットワーク上の利用者均衡配分問題を離散的な車両を考慮して定式化した「均衡配分ゲーム」の特性の分析を既存紹介の成果も参照しつつ行った．それにより，

○　静的な交通流モデルにおいては，均衡配分ゲームはPotential Gameになることが知られている．その結果，Day-to-dayモデルのひとつであるBetter response dynamicsによる収束性が確保される．
○　動的な交通流モデルにおいては，均衡配分ゲームは「時間軸の外部性」によって外部性の一方向性が存在するケースがあることがわかった．特に1起点多終点ネットワークでは，外部性は出発時刻の早いほうから遅いほうへのみ伝播する．この特性を用いてBetter response dynamicsの安定性を示すことができる．

の２点を示した．いいかえると，静的均衡配分ゲームと動的均衡配分ゲームは，それぞれ異なった形の外部性の伝播の特徴を持ち，それが均衡解の安定性の成立に異なる方法で寄与している，ともいえよう．

いっぽう，本研究では動的均衡配分ゲームについては限定的な分析しかおこなっていない．特に，一般的な収束性については1起点多終点ネットワークでしか示せていない．ただし，多起点多終点ネットワークについては，1起点多終点ネットワークにおいて外部性の方向を決定付けた「出発時刻」にかわるより一般的な「外部性の順番付け」が可能であれば，やはり均衡解は安定になることを示し，それが可能かどうかを判別する方法についても言及した．

今後の課題としては，「外部性の順番付け」をキーとした多起点多終点ネットワークにおけるより一般的な知見の提示が考えられよう．また，確率均衡配分との対応を考慮したDay-to-dayモデルを前提とした分析も興味深いといえよう．

付録１：Potential Gameは「外部性が対称なゲーム」である，ということについては，たとえばHofbauer and Sandholmによっても言及されているが[6]（ただしPopulation Gameを前提としている），ここでは今回のケースにあわせて証明を明示的に行う．なお，以降では簡単のため x_{-ij} を省いて式を表記する．まず，Monderer and Shapleyによって示された，定理 (Theorem 2.8) [4]を適用することにより，

$$\begin{aligned} & u_i\left(x_i,x_j\right)-u_i\left(y_i,x_j\right)+u_j\left(y_i,x_j\right)-u_j\left(y_i,y_j\right) \\ & =u_j\left(x_i,x_j\right)-u_j\left(x_i,y_j\right)+u_i\left(x_i,y_j\right)-u_i\left(y_i,y_j\right) \end{aligned} \quad (5)$$

を式(1)に同値な式として得る．式(5)を変形し，

$$\begin{aligned} & u_i\left(x_i,x_j\right)-u_i\left(x_i,y_j\right)-\left\{u_i\left(y_i,x_j\right)-u_i\left(y_i,y_j\right)\right\} \\ & =u_j\left(x_i,x_j\right)-u_j\left(y_i,x_j\right)-\left\{u_j\left(x_i,y_j\right)-u_j\left(y_i,y_j\right)\right\} \end{aligned} \quad (6)$$

を得る．利用者 i ないし j がそれぞれ選択肢 o_i または o_j を選択した場合，その利用者の利得は一律 $-Z$ になる，としたことを用いると，式(6)の y_i,y_j にそれぞれ o_i と o_j を代入することにより

$$u_i\left(x_i,x_j\right)-u_i\left(x_i,o_j\right)=u_j\left(x_i,x_j\right)-u_j\left(o_i,x_j\right) \quad (7)$$

を得る．これは式(2)と同じである．逆に，式(7)が任意の x_i,x_j で成立すれば， x_i,x_j のいずれかまたは両方を y_i,y_j で置き換えることにより

$$u_i\left(x_i,y_j\right)-u_i\left(x_i,o_j\right)=u_j\left(x_i,y_j\right)-u_j\left(o_i,y_j\right) \quad (8)$$

$$u_i\left(y_i,x_j\right)-u_i\left(y_i,o_j\right)=u_j\left(y_i,x_j\right)-u_j\left(o_i,x_j\right) \quad (9)$$

$$u_i\left(y_i,y_j\right)-u_i\left(y_i,o_j\right)=u_j\left(y_i,y_j\right)-u_j\left(o_i,y_j\right) \quad (10)$$

を得る．式(7)－式(8)，式(9)－式(10)を計算し，さらにそれら２本の式の差をとることにより式(6)が得られる（証明終）．

付録２：車両 k がすでに選択している経路 x_k は最短経路のため，条件 b)より，車両 k よりあとに出発する車両 i （ $i>k$ ）はその経路上のいかなる場所であっても車両 k を追い越せない．これと条件 c)をあわせれば，

$$u_k\left(x_k,x_i,x_{-ik}\right)=u_k\left(x_k,y_i,x_{-ik}\right) \text{ for } \forall y_i\in R_i \quad (11)$$

が成立することが分かる．すなわち最短経路 x_k の旅行時間は車両 i の経路選択によって変動しない．これにより，式(4)の関係が破られるには，車両 i の経路変更により，車両 k の経路として経路 x_k より早い経路が出現しないとならない．そのためには，経路 x_k に含まれないリンク（以降ではリンク l と表記する）の旅行時間が減少する必要があるが，ここで注意したいのは，リンク l の旅行時間の減少は，車両 k がリンク l に流入する時刻より前におきていないとならないことである．いま，仮にそのような旅行時間の減少が実現し，そのときに新しく最短経路となった（リンク l を含む）経路を y_k と表記しよう．また，車両 k が経路 y_k にそってリンク l に流入する時刻を $t_{k,l}^{IN}$ と表記する．いま，経路 y_k は車両 k にとって最短経路なので，リンク l への流入時刻 $t_{k,l}^{IN}$ は車両 k にとって可能なかぎり早い時間になっている．このことと条件b)により，車両 i の流入時刻 $t_{i,l}^{IN}$ は車両 k の流入時刻 $t_{k,l}^{IN}$ よりも必ず遅くなる．これと条件c)をあわせれば，最初に仮定したリンク l の旅行時間の減少は車両 i によって直接発生したものではないことがわかる．また，このことは，車両 k の流入時刻 $t_{i,l}^{IN}$ よりも早くリンク l に到達している別の車両 j に対しても，車両 i は影響し得ない，すなわち，車両 j が経由するいかなるリンクにおいても，車両 i は車両 j より早く流入することは出来ないことを意味する．以上により最初に仮定した旅行時間の減少は車両 i によってなされたものではない．以上により，車両 i の経路変更により，車両 k の経路として経路 x_k より早い経路が出現することはない．よって車両 i がどのように経路を変更しても x_k は引き続き車両 k の最短経路となる．これにより式(4)が成立する（証明終）．

以上の証明は，赤松・桑原が示したDUE(Dynamic User Equilibrium)の基本特性IIおよびIII[5]の拡張である．なお，赤松・桑原によるDUEの基本特性IIおよびIIIでは「DUE状態において（＝全車両が最短経路をとっている場合において）」という前提があるが，ここでは出発時刻がおそいほうの車両（車両 i ）は任意の経路をとれるとしていることに注意したい．この拡張はBetter response dynamicsにおいて均衡状態以外も含めたとりあつかいを行うときに必要となる．

参考文献

１）Wardrop, J.G.: Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research, *Proceedings of the Institute of Civil Engineers, Part II,* pp. 325-378, 1952.

２）Beckmann, M., C.B. McGuire, and C.B. Winsten: *Studies in the Economics of Transportation*, New Haven, Yale University Press, 1956.

３）Rosenthal, R. W.: The Network Equilibrium Problem in Integers, *Networks*, Vol. 3, pp. 53-59, 1973.

４）Monderer, D. and L.S. Shapley: Potential Games, *Games and Economic Behavior,* Vol. 14, No. 1, pp. 124-143, 1996.

５）赤松隆，桑原雅夫：渋滞ネットワークにおける動的利用者均衡配分，土木学会論文集，No. 488/IV-23, pp. 21-30, 1994.

６）Hofbauer, J. and W.H. Sandholm: Evolution in Games with Randomly Disturbed Payoffs, *Journal of Economic Theory*, Vol. 132, No. 1,　pp. 47-69, 2007