# リンク交通量の確率特性を考慮したOD交通量推計法*

## An O-D estimation method considering statistical characteristics of link flows*

宮﨑純一**・中山晶一朗***・高山純一****
By Jun-ichi MIYAZAKI**・Shoichiro NAKAYAMA***・Jun-ichi TAKAYAMA****

### 1. 研究の背景及び目的

近年都市部における慢性的な交通渋滞やそれに伴う地球環境への悪影響が全国的に問題となっている．こうした交通渋滞を緩和するためにも，既存の道路ネットワークの状況改善あるいは新規道路整備による都心通過交通の削減等の対策が求められる．そのためには，あらかじめ対象地域における交通需要量を詳細に把握する必要がある．

基本的に交通需要の推計には，低コストでなおかつ精度が高いことが要求される．一方，従来から用いられてきたパーソントリップ調査による手法は，広域的な都市圏を対象とする場合は高い精度が得られるもののかなりのコストを要する．また都市内の限られた地域を対象とする場合は精度も低下するため，パーソントリップ調査を扱える対象は限られてくる．そこで，既存の観測交通量の資料を用いて交通需要を推計する手法が，コストや精度向上の面からも注目されている．

これまで 1 回観測の（確定値としての）リンク交通量を用いた OD 推計モデルが大半であった．これらのモデルでは各リンク交通量のみの情報で OD 推計を行っている．一方でリンク交通量の観測を多数回行うことが出来る場合，リンク交通量の平均値だけでなく，その分散やリンク間の共分散の情報も獲得することができる．こうしたリンク間における相関を取り入れた OD 交通量推計モデルも存在する [1]．しかしその中では，リンク交通量のみを用いリンク旅行時間や交通ネットワーク均衡などが考慮されていない．これらを考慮することにより，より正確に，よりロバストに OD 交通量推計を行うことが期待できる．本研究では，リンク交通量の分散共分散行列を用いるとともに，交通ネットワーク均衡の制約下でOD推計する手法を提案する．

### 2. 観測交通量と推計交通量の関係

リンク観測交通量から OD 交通量を推計するモデルでは，実際の道路網の形状に基づいて推計値が観測値に適合するような計算が行われるので，より高精度の値が得られる．しかしこの場合，一般的に得られるリンク観測交通量の数は推計すべき OD 交通量の数よりも少ない．

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{Y} \tag{1}$$

ここで，$\mathbf{X}$ は各リンクの観測交通量を要素に持つベクトル，$\mathbf{Y}$ は各経路交通量を要素に持つベクトルを表す．また $\mathbf{A}$ は，リンク$i$が経路$j$に含まれていれば1，含まれていなければ0となる要素$a_{ij}$より構成されるパスリンクインシデンス行列を表す．経路交通量 $\mathbf{Y}$ より推計OD交通量を得るのであるが，上述のように(1)式において($\mathbf{X}$ の要素の数)<($\mathbf{Y}$ の要素の数)であるため一意的な解が得られない．このような場合，観測交通量の各リンク間における相関関係（分散共分散行列）も用いることで推定が可能となると考えられる．

### 3. 交通量の確率分布と交通ネットワーク均衡 [2)]

本研究では，同じ OD ペアの道路利用者は同質であると仮定する．これにより，道路利用者はあえて経路を確率的に変更することにより交通量・旅行時間の不確実性を増すようなことはせず，各道路利用者は均衡状態では確定的に道路を選択することとなる．経路交通量は，その経路を選択する（するべき）利用者が実際にトリップを行ったのか否かにより決定される．このトリップを行うか否かは外生的に決定されており，それを確率的に取り扱うものとする．つまり，トリップの有無は各個人の外生的な事情により決定されるが，そのような個人のトリップの有無の集積を巨視的に見ると，経路交通量は確率的に変動しているように見えると考えられるため，経

* キーワーズ:分散共分散，交通ネットワーク均衡，MPEC
** 学生員 神戸大学大学院工学研究科
（神戸市灘区六甲台町1-1）
*** 正会員，博（工）金沢大学大学院自然科学研究科
（石川県金沢市角間町
TEL076-234-4614 FAX076-234-4644）
**** フェロー，博（工）金沢大学大学院自然科学研究科
（石川県金沢市角間町
TEL076-234-4613 FAX076-234-4644）

路交通量は確率的であると仮定できる．また，OD 交通量は経路交通量の和であるため，OD 交通量も確率的に変動する．なお，その確率的な OD 交通量は互いに独立であると仮定する．

OD ペア $i(i=1,2,\ldots,I)$ の潜在的な交通需要（トリップを行う可能性のある人の総数）を $n_i$ とする．各利用者は確率的に経路を選択することはなく確定的に選択を行うので，その OD ペアの潜在的な道路利用者は，各自どの経路を選択するかは予め決めている．OD ペア $i$ について，経路 $j(j=1,2,\ldots,J_i)$ を選択する潜在的な人数を $n_{ij}$ とすると，$n_i=\sum_j n_{ij}$ となる．このように潜在交通需要は OD ペアごとに選択可能な全経路の潜在的選択者数の和となる．

つまり経路選択とは，$n_{ij}$ を決定することと等しくなる．経路選択は毎日行われるものと言うより，長期的な均衡状態での習慣的に走行する経路を形成することと解釈できる．道路利用者は，各自習慣的に同じ経路のみを走行し，トリップの有無のみ，外性的な要因から決定する．よって経路交通量は互いに独立であり，2 経路のみの単純なネットワークであっても経路交通量の共分散は 0 である．これは，全員が習慣的にトリップを行うなら，毎回同じ経路を選択するためである．

ここでは上述のように，習慣的に同じ経路を走行することを前提とし，その習慣的に走行する経路を決定するのが即ち経路選択となる．この意味での経路選択は，経路の平均旅行時間に基づいて行われると仮定する．その理由としては，合理的な道路利用者は旅行時間の短い経路を選好するが，その旅行時間が確率的に変動する場合は，その変動旅行時間の代表値である平均に基づいて経路を選択すると仮定するのが最も妥当であるからである．

OD や経路に関わらず各人がトリップを行う確率を $p$ と仮定すると，OD ペア $i$ の経路 $j$ の実際に発生する経路交通量は経路間で独立な二項分布 $\mathrm{Bn}[n_{ij},p]$ に従う．その平均と分散はそれぞれ $n_{ij}p$ と $n_{ij}p(1-p)$ である．なお，経路間で経路交通量は独立であるが，これはリンク交通量が互いに独立であることを意味してはいない．潜在的な経路選択者数 $n_{ij}$ が十分に大きい場合，二項分布に従う経路交通量は正規分布で近似できる．よって本研究では，各経路交通量は正規分布に従うと仮定することにする．OD ペア $i$ の経路 $j$ の経路交通量は平均と分散がそれぞれ $n_{ij}p$ と $n_{ij}p(1-p)$ の正規分布 $\mathrm{N}[n_{ij}p,n_{ij}p(1-p)]$ に従う．ここで，経路の平均交通量 $n_{ij}p$ を $\theta_{ij}$ とし，$1-p$ を $\eta$ と記載することにすると，経路交通量の分散は $\eta\theta_{ij}$ となり，経路交通量の従う確率分布は $\mathrm{N}[\theta_{ij},\eta\theta_{ij}]$ と表記できる．OD ペア $i$ の経路 $j$ の経路交通量の分散に関して，本来ならば $\eta=1-p(0\le\eta\le1)$ であるため $0\le\eta\le1$ となる．

しかしこのような制約があると，実際のネットワークに適用する際，経路交通量の分散に制約を課すこととなり，交通量の分散が大きい場合問題が生じることが考えられる．このことを考慮し本研究では，$\eta>0$ と $\eta$ の定義域を拡張することとする．

以上のように経路交通量は，独立な正規分布に従うと仮定する．よってその和であるリンク交通量もまた正規分布の再生性により正規分布となる．しかし，リンク交通量は必ずしも互いに独立であるとは限らない．隣接するリンクでは共通に通過する経路交通量が多いため，一方のリンク交通量が多ければその隣接リンクの交通量も多くなる．ここで，リンク $a$ の平均リンク交通量を $\mu_a$ とする．また，リンク $a$ とリンク $a'$ の交通量の共分散を $\sigma_{aa'}(=\mathrm{Cov}[X_a,X_{a'}])$ とする．ここで，$X$ は各リンク交通量の確率変数を表す．なお，上述のようにリンク $a$ の交通量の分散は $\sigma_a{}^2=\mathrm{Var}[X_a]=\eta\mu_a$ である．$\sigma_a{}^2$ 及び $\sigma_{aa'}$ を要素に持つリンク交通量の分散共分散行列 $\mathbf{\Sigma}_{AA}$ は次式で表される．

$$\mathbf{\Sigma}_{AA}=\begin{bmatrix}\sigma_1{}^2 & \cdots & \cdots & \sigma_{1A}\\ \vdots & \sigma_a{}^2 & \sigma_{aa'} & \vdots\\ \vdots & \sigma_{aa'} & \sigma_{a'}{}^2 & \vdots\\ \sigma_{1A} & \cdots & \cdots & \sigma_A{}^2\end{bmatrix} \tag{2}$$

ここで，

$$\sigma_{aa'}=\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i}\delta_{a,ij}\delta_{a',ij}\sigma_{ij}{}^2=\eta\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i}\delta_{a,ij}\delta_{a',ij}\mu_{ij} \tag{3}$$

全てのリンク交通量は次式の確率密度関数 $f_{\mathbf{X}_A}(\mathbf{x}_A)$ を持つ多変量正規分布 $\mathrm{N}[\boldsymbol{\mu}_A,\mathbf{\Sigma}_{AA}]$ に従う．

$$f_{\mathbf{X}_A}(\mathbf{x}_A)=\frac{\exp\left\{-\dfrac{1}{2}(\mathbf{x}_A-\boldsymbol{\mu}_A)^T\mathbf{\Sigma}_{AA}{}^{-1}(\mathbf{x}_A-\boldsymbol{\mu}_A)\right\}}{\sqrt{(2\pi)^A|\mathbf{\Sigma}_{AA}|}} \tag{4}$$

ここで，$\mathbf{x}_A$ はリンク交通量の実現値のベクトルを表す．

本研究では各道路利用者は次式のロジットモデルに従い，経路選択確率 $\mathbf{p}_i$ を決定していると仮定する．

$$p_{ij}=\frac{\exp(-\gamma\bar{t}_{ij})}{\sum_{j'\in J_i}\exp(-\gamma\bar{t}_{ij'})} \tag{5}$$

ここで，$\bar{t}_{ij}$ は OD ペア $i$ の経路 $j$ の平均旅行時間，$\gamma$ は正のパラメータである．$\gamma=0$ となる場合，各 OD

ペア $i$ において全ての経路交通量は等しくなる．

確率的ネットワーク均衡モデルを定式化するのに際し，(5)式を含んだ関数 $\mathbf{g}=(g_{11},\ldots,g_{21},\ldots)^{\mathrm{T}}$ を考える．関数 $\mathbf{g}$ の要素 $g_{ij}$ を以下のように定義する．

$$g_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = \lambda_i \frac{\exp(-\gamma \bar{t}_{ij}(\boldsymbol{\theta}))}{\sum_{j' \in J_i} \exp(-\gamma \bar{t}_{ij}(\boldsymbol{\theta}))} \tag{6}$$

ここで，$\boldsymbol{\theta}$ は平均経路交通量ベクトルを表す．

確率ネットワーク均衡は，関数（写像）$\mathbf{g}$ に関する以下の不動点問題として定式化される．

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) \tag{7}$$

この(7)式を，最適化問題の均衡制約条件として適用するものとする．

## 5. 定式化（最尤法）

既述のように，全てのリンク交通量は(4)式の確率密度関数を持つ多変量正規分布に従うと仮定できる．本研究では目的関数として，この確率密度関数の値が最大となるような尤度関数を設定する．

観測リンク交通量が得られた場合，次のような対数尤度関数 $L(\boldsymbol{\lambda}\mid\mathbf{x})$ を定義することができる．

$$L(\boldsymbol{\lambda}\mid\mathbf{x}) = \ln f_{\tilde{\mathbf{X}}}(\mathbf{x}) = \sum_{a\in \bar{A}} \ln f_{X_a}(x_a \mid \mathbf{x}_{-a}) \tag{8}$$

ただし，$\boldsymbol{\lambda}$ は平均OD交通量ベクトルであり，$f_{X_a}(x_a\mid\mathbf{x}_{-a})$ はリンク $a$ 以外のリンク交通量が与えられた場合のリンク $a$ の交通量の確率密度関数である．

またリンク交通量の観測が複数回にわたって行われるような場合，第 $r$ 回目の観測値を $\mathbf{x}_r$ とする $(r\in R)$．異なった回の観測値が独立である場合，次のように対数尤度関数を定義することができる．

$$L(\boldsymbol{\lambda}\mid\mathbf{x}_r;\forall r\in R) = \sum_{r\in R} \ln f_{\mathbf{X}_r}(\mathbf{x}_r) \tag{9}$$

ここで，$f_{\mathbf{X}_r}(\mathbf{x}_r)$ は $r$ 回目の観測交通量が生起する確率である．なお，異なった回の観測値が独立でない場合は，観測回間での関係を考慮した尤度関数を個別に設定することが必要となる．

以上より最尤法を用いたOD交通量推計は，確率ネットワーク均衡が下位問題となったMPECとして次のように定式化される．

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}} L(\boldsymbol{\lambda}\mid\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}) \quad s.t.\quad \boldsymbol{\theta}=\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) \tag{10}$$

## 6. 単純ネットワークへの適用

ここでは，図6.1のような2×2格子状ネットワークへの適用を考える．ODペア数は36，経路数は104，リンク数は24である．現実のネットワークにおいて推計を行う際，観測交通量データの得られるリンク数よりも交通量を推計すべきODペアの数の方が多いことが考えられる．よってこの図6.1のようなネットワークへの適用を考慮する必要がある．

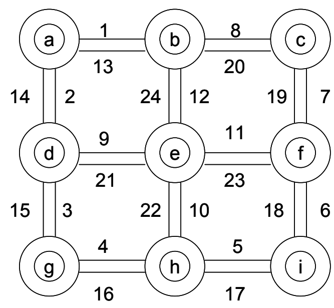


図6.1 2×2格子状ネットワーク

各平均旅行時間関数は，$\alpha$ をリンク自由走行時間，$\beta$ をリンク交通容量とすると次の式で表現できる．

$$\bar{t}(\mu) = \alpha\left[1+\frac{\mu^2+\mu}{\beta}\right] \tag{11}$$

ロジットパラメータ $\gamma$ の真値を0.5とし，そのときの(7)式の均衡解を経路交通量の真値としそれを平均値にとる正規乱数の発生により得られた経路交通量の乱数列から観測日数分（ここでは25日間とする）を取り出してリンク観測交通量を作成する．

推計結果は以下のように示される．

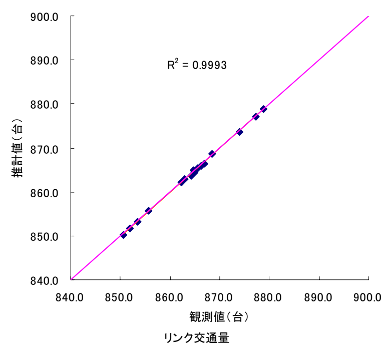


図6.2 リンク交通量相関図

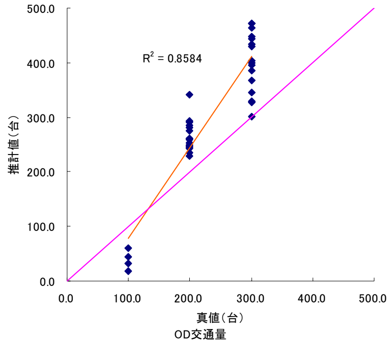


図6.3 OD交通量相関図

結果より，リンク交通量の相関係数が0.9997，OD交通量が0.9265と比較的良好な推計精度が得られたと言える．若干過大推計の傾向が見られるものの，最尤法を用いたOD交通量推計は有効な手法であると言える．またこうした結果が得られたのは，交通ネットワーク均衡を考慮した制約条件の加味によるものがかなり大きいと言えよう．

一方，既存モデル（Hazelton[1]）を目的関数として用い同様の推計を行った結果推計OD交通量の相関係数が0.2にも満たなかったことからも，最尤法を用いたモデルはより有効な手法であると考えられる．ただ，下表からもわかるように，推計精度の良いODペアとそうでないODペアとの差が極端であり，いかにして均等に良好な推計結果を導き出すかが今後の課題となる．

表6.1各推計OD交通量

| | OD1 | OD2 | OD3 | OD4 | OD5 | OD6 | OD7 | OD8 | OD9 | OD10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 真値 | 300.0 | 200.0 | 200.0 | 100.0 | 300.0 | 300.0 | 200.0 | 200.0 | 200.0 | 300.0 |
| 推計値 | 328.9 | 292.5 | 242.2 | 61.1 | 444.4 | 472.3 | 282.0 | 261.3 | 290.7 | 301.5 |

| | OD11 | OD12 | OD13 | OD14 | OD15 | OD16 | OD17 | OD18 | OD19 | OD20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 真値 | 100.0 | 200.0 | 300.0 | 200.0 | 300.0 | 200.0 | 300.0 | 300.0 | 300.0 | 300.0 |
| 推計値 | 18.3 | 258.2 | 448.7 | 246.0 | 464.4 | 261.2 | 345.5 | 367.8 | 399.4 | 396.0 |

| | OD21 | OD22 | OD23 | OD24 | OD25 | OD26 | OD27 | OD28 | OD29 | OD30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 真値 | 200.0 | 300.0 | 200.0 | 300.0 | 200.0 | 100.0 | 300.0 | 200.0 | 200.0 | 200.0 |
| 推計値 | 245.3 | 472.7 | 235.7 | 434.7 | 253.1 | 31.2 | 386.3 | 249.2 | 284.7 | 229.3 |

| | OD31 | OD32 | OD33 | OD34 | OD35 | OD36 | $\gamma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 真値 | 300.0 | 300.0 | 100.0 | 200.0 | 200.0 | 300.0 | 0.5 |
| 推計値 | 404.4 | 429.8 | 43.6 | 341.0 | 274.8 | 326.4 | 0.0003 |

（台）

## 6. おわりに

本研究では，MPEC により交通ネットワーク均衡を加味し，リンク観測交通量が多変量正規分布に従うといった性質を利用した最尤法による推計モデルを提示した．こうした交通ネットワーク均衡を考慮することは，対象となる道路ネットワークがより複雑になるほど（経路選択パターンが多いほど）その効果を発揮することは既に明らかである．しかしその場合，当然のことながら扱うべき未知変数の数も多くなる．言い換えると，扱う最適化問題がより複雑となるため，その計算プロセスの具体的な内容及び問題点を今後明らかにしていく必要がある．本研究においても OD 交通量，経路交通量及び各種パラメータを全て同時推計する形となった．そしてこうした均衡制約付最適化問題を解くにあたり，既存のソフトウェア（MATLAB）のアドイン関数“fmincon”を用いた．fmincon は，“複数変数のスカラー関数に関する制約付最小値を，初期推定値を用いて探索する”ツールである．その中では基本的に線形探索法あるいは信頼領域法が解法として用いられているが，これまでの計算において，初期値の入力値によって出力される最適解が異なってくる（あるいは，初期値によっては収束しなくなる）現象がしばしば見られた．こうした原因の一つとして，得られた解が大域解ではなく局所解であることが考えられる．

いずれにせよ，本研究で用いたモデル式は未知変数が極めて多く，かつ多次元であるため関数形を空間的に把握するのはほぼ不可能である．こうした中で，上述のような大域解と局所解の位置関係をいかに把握するか，一度局所解に陥った場合そこからいかにして抜け出し大域解に到達するか，あるいはより理論的かつ正確に初期値を決定する効果的な手法の確立等が今後の課題である．

---

Hazelton[1]について

観測リンク交通量と推計リンク交通量の間における期待値の差と分散共分散の差との合計が最小化される次のような目的関数が提案されている．

$$\min.\quad Q(\boldsymbol{\theta}) = d_1(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta}), \overline{\mathbf{X}}) + d_2(\Sigma(\boldsymbol{\theta}), S)$$

$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\theta})$ は推計リンク交通量の期待値，$\overline{\mathbf{X}}$ はリンク観測交通量の期待値，$\Sigma(\boldsymbol{\theta})$ は推計リンク交通量の分散共分散，$S$ はリンク観測交通量の分散共分散を表す．

---

## 参考文献


1)Hazelton.M: Some comments on origin-destination matrix estimation. Transportation Research Vol.37B pp.811-822 2003.

2)中山晶一朗，高山純一，長尾一輝，所俊宏：現実道路ネットワークの時間信頼性評価のための確率的交通均衡モデル及びそれを用いた情報提供効果分析，土木学会論文集D，Vol62，No.4，pp.526-536，2006.

3)中山晶一朗，高山純一：リンク交通量を用いた交通ネットワーク均衡モデルのパラメータ推定：リンク間相関を考慮した最尤法，土木学会論文集D，Vol.62，No.4，pp.548-557，2006.