

交通ネットワーク均衡モデルの求解アルゴリズムと収束判定*

Algorithms for Equilibrium Transportation Network Models and Evaluation of Their Convergence Error*

井上紳一**

By Shin-ichi INOUE**

1. はじめに

利用者均衡配分モデルを代表とする交通ネットワーク均衡モデルは、数理問題としては非線形計画問題、非線形相補性問題、変分不等式問題等として定式化される。これらの問題の解を求めるにあたっては、一般には解析的に解くことは不可能であり、解の更新を繰り返しながら均衡状態に近づけて行く、いわゆる収束計算による求解法が用いられる。

収束計算によって厳密な均衡解を得るためには計算を無限に繰り返す必要があり、現実には有限回の繰り返しで打ち切らざるを得ないため、算出される解は厳密解からの誤差を多少なりとも含んだ近似解となる。計算結果が含む誤差の大きさと収束計算に要する時間はトレードオフの関係にあり、どこで収束計算を打ち切ればよいかの判断は、工学的には非常に重要な問題である。

また、一口に収束計算と言っても実際には様々な求解アルゴリズムが開発され、それぞれに得失を持っている。交通ネットワーク均衡モデルの研究においては、非線形計画問題や非線形相補性問題といった標準的な形式でモデルを定式化できさえすれば少なくとも何からの求解法が存在することは分かるので、ともすると具体的なアルゴリズムについては重要視されない傾向が見受けられる。しかし、モデルを実務で活用するにあたっては、求解アルゴリズムの適切な選択も工学的には重要なテーマである。

そこで本研究では、収束計算における収束判定指標について、定量的な分析結果に基づいて考察を加えるとともに、主要な交通ネットワーク均衡モデルについて既往の解法アルゴリズムを整理し、それらのアルゴリズムについて実用性の観点から横断的に性能比較を行った。

2. 収束判定指標

前述のように収束計算を打ち切る判断を行うにあたっては、計算中の解が十分に収束しているかどうかを判定する必要がある。ここでは、代表的ないくつかの判定指標について整理する。

以下では、解を得ようとしている未知変数（例えばリンク交通量など）のベクトルを \mathbf{x} とし、厳密解（モデルの均衡条件を厳密に満たす解） \mathbf{x}^* が一意に存在することが保証されているものとする。

(1) 厳密解との乖離を表す指標

収束計算の途中 (n 回繰り返し時点) での解 $\mathbf{x}^{(n)}$ が厳密解 \mathbf{x}^* とどの程度乖離しているかを表す指標、具体的には、 $\max |x_a^{(n)} - x_a^*|$ (乖離の最大値) や、 $\|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}^*\|$ (ノルム) などが考えられる。

このタイプの指標は、指標の持つ意味を解釈し易く、最も素直な考え方である。また、これらの指標によって収束計算の打ち切りの判断を行えば、得られた解に含まれる誤差（厳密解との差）が所与の範囲内に収まるように直接的にコントロールすることが可能であり、実務的にも有用である。

しかし、通常は収束計算に先立って厳密解 \mathbf{x}^* が与えられていることはあり得ないので、これらの指標を収束計算の打ち切りの判断に用いることはできない。ただし、研究においては予め厳密解の得られている問題を分析対象とすることが可能なので、アルゴリズムの特性等の分析にこれらの指標を活用することは可能である。

(2) 収束計算に伴う解の変化を表す指標

収束計算において、計算途中の解は（単調とは限らないが）厳密解に徐々に近づいて行く。解の変化が小さくなれば収束したと見なせるとの考え方から、計算の容易な収束判定方法として $\max |x_a^{(n)} - x_a^{(n-1)}|$ (変化の最大値) や、 $\max |x_a^{(n)} - x_a^{(n-1)}| / x_a^{(n-1)}$ (変化割合の最大値) などが広く用いられている。

しかし、これらの指標には以下のような重大な欠点がある。

- 収束が緩慢でなかなか厳密解に近付かない、

* キーワーズ：交通ネットワーク分析

** 正員，修(工)，財団法人計量計画研究所
(東京都新宿区市谷本村町 2-9,
TEL 03-3268-9911, FAX 03-5229-8081)

遅いアルゴリズムを用いると、むしろ指標の値が小さくなり、見かけ上は収束しているように見えてしまう。

- これらの指標と、計算途中の解に含まれる誤差（厳密解との差）との相関は問題設定やアルゴリズムに依存し一定ではないため、解の誤差を評価して収束計算打ち切りの判断を行うことが困難である。

(3) 目的関数の利用

非線形計画問題として定式化できるモデルにおいては、収束計算に伴って目的関数の値が漸減し、最終的には均衡時に目的関数値は最小となるので、目的関数を評価することによって収束状況を把握できるように見える。

目的関数値の減少幅は一般に収束が進むにつれて緩慢になって行くが、前記(2)と同様、収束の遅いアルゴリズムを用いた方が目的関数値の減少幅も小さくなる。そのため、目的関数値の減少幅が小さくなったとしても、十分に厳密解に近づいたからなのか、単に途中で停滞しているだけなのかは、どこまで目的関数値が下がるのか予め分かっていないと判断できない。

しかし、双対定理を利用すると目的関数値の下界を計算することができる。例えば需要固定型確定的利用者均衡配分モデルについては、以下の目的関数

$$Z(\mathbf{x}) = \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} t_a(w) \cdot dw \quad (1)$$

に対してその下界は

$$LB(\mathbf{x}) = \sum_{rs \in \Omega} q_{rs} \cdot \left\{ \min_{k \in K_{rs}} c_{rs,k}(\mathbf{x}) \right\} - \sum_{a \in A} \left\{ x_a \cdot t_a(x_a) - \int_0^{x_a} t_a(w) \cdot dw \right\} \quad (2)$$

で計算できる。また、厳密解 \mathbf{x}^* の下では $Z(\mathbf{x}^*)$ と $LB(\mathbf{x}^*)$ は一致する。ただし、 x_a はリンク交通量、 $t_a(\cdot)$ はリンクコスト関数、 q_{rs} は OD 交通量、 $c_{rs,k}$ は経路コスト、 Ω は OD ペア集合、 K_{rs} は経路集合である。ここで、

$$G(\mathbf{x}) = Z(\mathbf{x}) - LB(\mathbf{x}) = \sum_{a \in A} x_a \cdot t_a(x_a) - \sum_{rs \in \Omega} q_{rs} \cdot \left\{ \min_{k \in K_{rs}} c_{rs,k}(\mathbf{x}) \right\} \quad (3)$$

を定義する。 $G(\mathbf{x}^*) = Z(\mathbf{x}^*) - LB(\mathbf{x}^*) = 0$ となる。したがって、 $G(\mathbf{x})$ を収束判定指標として用いることができる。 $G(\mathbf{x})$ は「双対ギャップ」と呼ばれる。

また、式(3)を変形すると、

$$G(\mathbf{x}) = \sum_{rs \in \Omega} \sum_{k \in K_{rs}} f_{rs,k} \cdot \left\{ c_{rs,k} - \min_{k \in K_{rs}} c_{rs,k}(\mathbf{x}) \right\} \quad (4)$$

ただし、 $f_{rs,k}$ は経路交通量である。つまり、 $G(\mathbf{x})$ は

経路コストと OD 間最小コストの差の総和であるので、 $G(\mathbf{x})$ は均衡状態からの旅行コストの乖離の程度を表していると解釈することが可能である。

同様に、需要固定型確率的利用者均衡配分モデルについては、

$$G = \sum_{rs \in \Omega} \sum_{k \in K_{rs}} f_{rs,k} \cdot c_{rs,k} - \sum_{rs \in \Omega} q_{rs} \cdot \frac{1}{-\theta} \cdot \ln \sum_{k \in K_{rs}} \exp(-\theta \cdot c_{rs,k}) - \sum_{rs \in \Omega} \frac{q_{rs}}{\theta} \cdot \sum_{k \in K_{rs}} \left(-\frac{f_{rs,k}}{q_{rs}} \cdot \ln \frac{f_{rs,k}}{q_{rs}} \right) \quad (5)$$

すなわち、 $G(\mathbf{x}) =$ [経路コストの総和] $-$ [期待最小コストの総和] $-$ [エントロピーの総和] であり、高速転換率内生確定的利用者均衡配分モデル（高速道・一般道選択と経路配分の統合モデル）では、

$$G = \sum_{a \in A} x_a \cdot t_a(x_a) - \sum_{rs \in \Omega} \frac{q_{rs}}{\theta} \cdot \left(-\frac{u_{rs}^G}{q_{rs}} \cdot \ln \frac{u_{rs}^G}{q_{rs}} - \frac{u_{rs}^E}{q_{rs}} \cdot \ln \frac{u_{rs}^E}{q_{rs}} - \psi \cdot \frac{u_{rs}^E}{q_{rs}} \right) - \sum_{rs \in \Omega} \frac{q_{rs}}{-\theta} \cdot \ln \left\{ \exp(-\theta \cdot C_{rs}^G) + \exp(-\theta \cdot C_{rs}^E - \psi) \right\} \quad (6)$$

すなわち、 $G(\mathbf{x}) =$ [経路コストの総和] $-$ [期待最小コストの総和] $-$ [エントロピーの総和] となる。

(4) Merit 関数の利用

非線形計画問題として定式化できないモデルにおいて、他の形式、例えば非線形相補性問題

$$\text{Find } \mathbf{x} \text{ such that } \mathbf{x} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \geq 0, \mathbf{F}(\mathbf{x}) \geq 0 \quad (7)$$

として定式化する場合を考える。このとき例えば

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \cdot \sum_i \left(x_i + F_i(\mathbf{x}) - \sqrt{x_i^2 + F_i^2(\mathbf{x})} \right)^2 \quad (8)$$

のように Merit 関数 $G(\mathbf{x})$ を定義すれば、 $G(\mathbf{x}) \geq 0$ かつ $G(\mathbf{x}^*) = 0$ となるので、式(7)の非線形相補性問題を非線形計画問題 $\text{minimize } G(\mathbf{x})$ に書き換えることができる。ここで、 $G(\mathbf{x})$ は厳密解 \mathbf{x}^* からの解 \mathbf{x} の乖離の程度を総合的に表していると解釈できるので、収束判定指標として利用することができる。

(5) 収束判定方法の検討

上で整理した収束判定指標のうち、指標の持つ意味を解釈しやすく、実務的にも有用なのは(1)のタイプであるが、現実には利用できない。一方、(3)や(4)のタイプの指標は均衡点からの乖離の程度を総合的に表していると考えられ、均衡時には値がゼロにな

るため、数値計算上は扱いやすいが、モデルによっては交通工学的な意味解釈が厄介で、そのままでは実務では使いにくい。

そこで、厳密解が既知の均衡問題を利用して(1)タイプの指標と(3)(4)タイプの指標との相関を分析、把握しておくことより、(3)(4)タイプから(1)タイプの指標を推定する方法を提案する。ここでは確定的利用者均衡配分モデルを例にとる。

まず、いくつかの例題（表-1参照）についてモデルの厳密解を求めておく。先述したように厳密解を得るには無限回の繰り返し計算が必要になるが、実際には計算機上の実数の精度（IEEE 倍精度実数で約

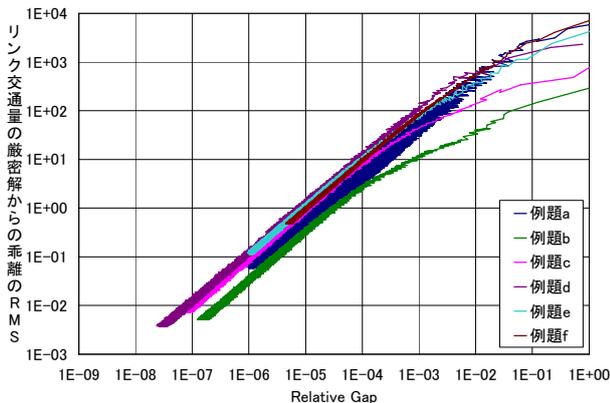


図-1 Relative Gapとリンク交通量のRMS誤差の関係（Frank-Wolfe法を用いた場合）

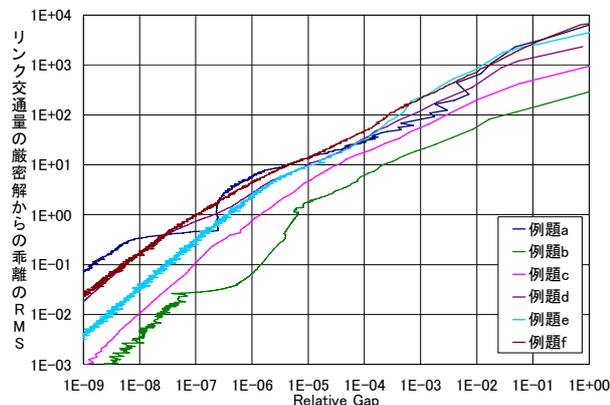


図-2 Relative Gapとリンク交通量のRMS誤差の関係（Bar-Gera法を用いた場合）

表-1 分析に用いた例題の諸元

例題	リンク数	ノード数	ゾーン数	平均混雑度
a	1,200	430	70	0.23
b	2,800	1,040	150	0.19
c	3,000	930	390	0.24
d	3,400	1,200	190	0.26
e	12,000	3,900	480	0.26
f	22,000	8,400	570	0.49

15桁) による制約を受けるため、この精度に達した解を事実上の厳密解と見なすことにする。

図-1は、横軸に Relative Gap（双対ギャップを目的関数値で除してネットワーク規模に依存しないように基準化したもの）をとり、縦軸にリンク交通量の RMS 誤差（リンク交通量の厳密解との乖離の平方の平均の平方根）をとり、複数の例題設定の下で両者の関係を比較したものである。

図-1から分かるように二つの指標には強い相関があり、且つ例題設定に依らずほぼ共通の直線上に乗っており、リンク交通量の RMS 誤差は Relative Gap の約 10^5 倍となっている。ただし、完全に共通の線上に乗っているわけではなく、入力条件を変えるとグラフが左上または右下に移動してしまうため、横軸の双対ギャップをより適切に基準化するように改良の余地があり、今後の研究課題である。

また、求解に用いるアルゴリズムによってもこの相関グラフの形状は異なる。図-1は Frank-Wolfe 法を用いたときのものであるが、図-2に示すように Bar-Gera 法を用いたときにはグラフは左上に移動し、入力条件による差異も広がっている。したがって、双対ギャップからリンク交通量の誤差を推定する関係式は、アルゴリズムごとに分析する必要がある。

3. アルゴリズムの性能比較

(1) 確定的利用者均衡配分のアルゴリズムの比較

次に、交通ネットワーク均衡モデルの求解に用いるアルゴリズムの性能比較を行う。ここでは、交通ネットワーク均衡モデルの中でも特に多くのアルゴリズムが開発されている確定的利用者均衡配分モデルを例にとる。

アルゴリズムに関する既往の論文では勿論それぞれの性能の検証が行われているが、総じて以下のような問題がある。

- Frank-Wolfe 法をベンチマークにして比較を行っているものが殆どである。Frank-Wolfe 法は遅い部類に入るアルゴリズムであり、高速なアルゴリズムの評価に用いる比較対照としては適切ではない。また、新しいアルゴリズム同士の横並びの比較ができない。
- 検証に用いる例題がそれぞれの論文で異なっていることが多く、共通の入力条件下での横並びの比較ができない。
- また、小規模の例題を用いていることが多く、実践的な性能が分からない。既往論文でよく見かける Sioux Falls のネットワークは実在の都市のものであるが、高々24ゾーン76リン

クであり小さ過ぎる。

- 収束判定指標に不適切なものを使っている場合がある。例えば前章(1)のタイプの指標は収束の程度を表すには不適切である上、指標自体の挙動がアルゴリズムに大きく依存する。
- アルゴリズム自体の性能差の他に、プログラミングの際の実装の優劣も影響している可能性がある。

そこで本研究では、同一の計算機環境と同一の例題を用いて、既往の主要なアルゴリズムの横断的な

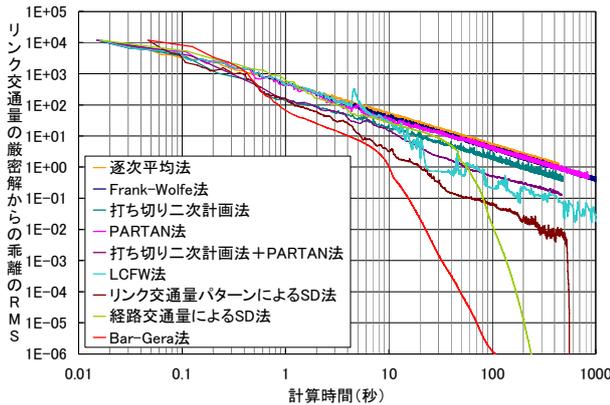


図-3 主要アルゴリズムの速度の比較 (例題a)

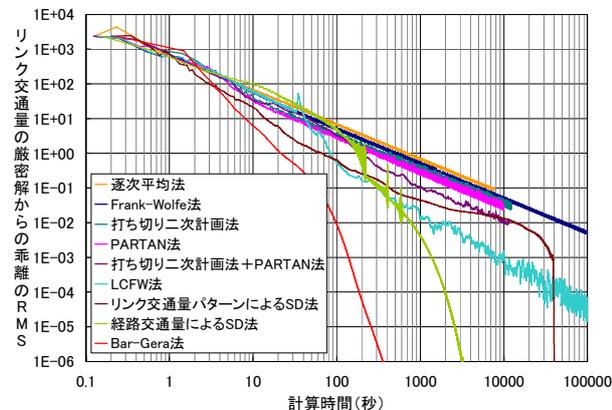


図-4 主要アルゴリズムの速度の比較 (例題d)

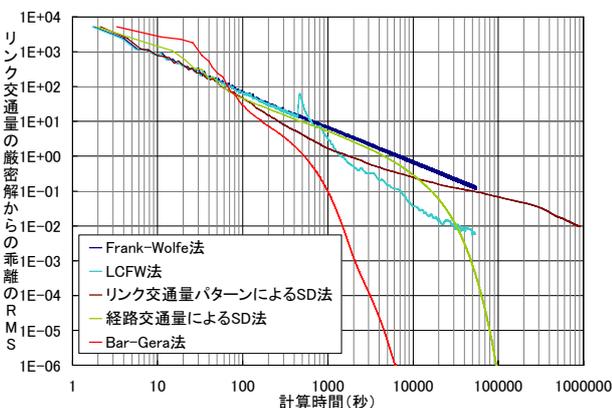


図-5 主要アルゴリズムの速度の比較 (例題e)

比較を行った。プログラムの実装とコーディングは全て筆者が独自に行ったものであるため、実装の優劣に起因する性能差は小さいと考えられる。収束状況を表す指標には、リンク交通量の厳密解からの乖離の RMS 平均を用いた。

結果の一部を図-3~5に示す。両対数目盛のグラフ上で、Frank-Wolfe 法はかなり正確に傾き-1の直線となっている。すなわち、誤差を半減させるためには計算時間が2倍必要になることを示しており、一次収束よりも更に遅い。

また、Frank-Wolfe 法や PARTAN 法など、目的関数の一階微分しか利用しないアルゴリズムでは、同様に傾きがほぼ-1であり、性能は Frank-Wolfe 法と大差ない。

LCFW 法は Frank-Wolfe 法の発展型で、目的関数の一階微分しか利用しないタイプであるが、Frank-Wolfe 法よりも高い性能を示している。

SD 法や Bar-Gera 法は、目的関数の二階微分を利用するアルゴリズムであり、収束が進むにつれて Frank-Wolfe 法との性能差が大きくなる。また、SD 法よりは Bar-Gera 法の方が高速であるが、その差はネットワークの規模が大きいほど顕著になる。

ただし、収束の初期 (初期解からの数回分) はどのアルゴリズムも速度に大差はない。

(2) アルゴリズムに関する課題

我が国のネットワーク研究者の間では、より高速なアルゴリズムの開発の必要性に対する認識が充分でないように見受けられる。

一方で、実務者の多くは未だに Frank-Wolfe 法などのプリミティブな解法に安住または手一杯であり、高速なアルゴリズムに対する理解と利用は残念ながら進んでいない。

しかしながら、以下の理由から、より高速なアルゴリズムへのニーズは潜在的なものも含めて非常に大きいと考えられる。

- 実務においては数万~数十万リンクにおよぶ大規模なネットワークで交通量推計を行う場合があり、既存のアルゴリズムでは1ケースの計算だけで数日を費やすことになる。
- 実務においては多数のケースの計算を短期間にこなさなければいけない場合がある。同時に複数のケースを進められる場合には複数の PC を投入することで解決できるが、1ケース計算するごとに入力データやパラメータの調整を繰り返すような逐次作業となることも多く、計算は速いに越したことはない。
- 単なる交通量配分だけでなく、ネットワーク

均衡条件下で上位問題（最適政策の分析など）を解く、MPEC (Mathematical Programming with Equilibrium Constraints) アプローチを用いる場合、上位の最適化問題を解く過程で下位のネットワーク均衡問題を何度も繰り返し解く必要があり、高速なアルゴリズムの必要性が極めて高い。

海外の研究論文をレビューする限り、確定的利用者均衡配分モデルについては多くのアルゴリズムが開発され、近年でもまだ新たなアルゴリズムが登場している。ただし、大規模ネットワークに適用可能で収束計算の初期段階での速度が高いアルゴリズムへのニーズが高いと思われ、今後期待したい。

確率的利用者均衡配分モデルについては、高速化以前の問題として、Dial 配分、Markov chain 配分、SD 法のいずれも、経路選択枝集合に関連する欠点を抱えており、安心して使えるアルゴリズムが存在しないことが、モデルの普及に向けた大きな課題である。

高速転換率内生化利用者均衡配分モデルや交通ネットワーク統合モデル、更には、非線形計画問題として定式化できないモデルなど、より複雑高度なモデルの解法については、既往研究も多くはないが、より優れたアルゴリズムを適宜開発してゆく必要があると思われる。

また、近年 PC 用の CPU ではマルチコア化が急速に進み、安価に手軽に並列計算を行える環境が出現した。ネットワーク均衡分析のアルゴリズムでは並列処理との親和性が高い部分も多く、マルチコア CPU の活用が期待できる。並列処理と言うと、一起点多終点の経路探索を複数の起点から同時に実行することをまず思いつくが、それに留まらず、アルゴリズム全体を並列化に適したものにするアプローチが考えられる。

4. おわりに

本研究では未だ分析が不十分であり、問題提起に留まっている部分が多いが、今後も引き続き分析を続けて行きたい。特に、適切な収束判定については交通ネットワーク均衡モデルが普及してゆく上で重要な要素であり、本稿が呼び水となって更に多様な研究が進展すれば幸いである。

参考文献

- 1) Y. Sheffi (1985), *Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods*, Prentice-Hall
- 2) M. Patriksson (1994), *The Traffic Assignment Problem: Models and Methods*, VSP, The Netherlands
- 3) D. Boyce, B. Ralevic-Dekic and H. Bar-Gera (2004), Convergence of traffic assignments: How much is enough?, *Journal of Transportation Engineering*, ASCE, Vol. 130, Issue 1, pp. 49–55
- 4) G. Rose, M. S. Daskin and F. S. Koppelman (1988), An examination of convergence error in equilibrium traffic assignment models, *Transportation Research*, Part B, Vol. 22, No. 4, pp. 261–274
- 5) L. J. LeBlanc, E. K. Morlok and W. P. Pierskalla (1975), An efficient approach to solving the road network equilibrium traffic assignment problem, *Transportation Research*, Vol. 9, pp. 309–318
- 6) L. J. LeBlanc, R. V. Helgason and D. E. Boyce (1985), Improved Efficiency of the Frank-Wolfe Algorithm for Convex Network Problems, *Transportation Science*, Vol. 19, No. 4, pp. 445–462
- 7) M. Florian, J. Guelat and H. Spiess (1987), An efficient implementation of the PARTAN variant of the linear approximation method for the network equilibrium problem, *Networks*, Vol. 17, pp. 319–339
- 8) Y. Arezki and D. Van Vliet (1990), A full analytical implementation of the PARTAN/Frank-Wolfe Algorithm for Equilibrium Assignment, *Transportation Science*, Vol. 24, No. 1, pp. 58–62
- 9) R. S. Dembo and U. Tulowitzki (1988), Computing equilibria on large multicommodity networks: Application of truncated quadratic programming algorithms, *Networks*, Vol. 18, pp. 273–284
- 10) D.-H. Lee and Y. Nie (2001), Accelerating strategies and computational studies of the Frank-Wolfe algorithm for the traffic assignment problem, *Transportation Research Record*, 1771, pp. 97–105
- 11) S. Lawphongpanich and D. W. Hearn (1984), Simplicial decomposition of asymmetric traffic assignment problem, *Transportation Research*, 18, pp. 123–133
- 12) D. W. Hearn, S. Lawphongpanich and J. A. Ventura (1987), Restricted simplicial decomposition: Computation and extensions, *Mathematical Programming Study*, 31, pp. 99–118
- 13) T. Larsson and M. Patriksson (1992), Simplicial decomposition with disaggregated representation for the traffic assignment problem, *Transportation*

Science, Vol. 26, pp. 4–17

- 14) R. Jayakrishnan, W. K. Tsai, J. N. Prashker and S. Rajadhyaksha (1994), Faster Path-Based Algorithm for Traffic Assignment, *Transportation Research Record*, 1443, pp. 75–83
- 15) H. Bar-Gera (1999), Origin-based algorithms for transportation network modeling, Ph.D. thesis, University of Illinois at Chicago (*NISS Technical*
- 16) H. Bar-Gera (2002), Origin-based algorithm for the traffic assignment problem, *Transportation Science*, Vol. 36, pp. 398–417
- 17) R. B. Dial (2006), A path-based user-equilibrium traffic assignment algorithm that obviates path storage and enumeration, *Transportation Research*, Part B, Article in press