

Mixed Logit Model 推定の安定性に関する研究*¹

Stability of Parameter Estimates in the Mixed Logit Models*¹

中井周作*², 北村隆一*³

By Shusaku NAKAI*², Ryuichi KITAMURA*³

1. はじめに

(1) 研究の背景

交通計画を含む幅広い分野で適用されてきている離散選択モデルの中で、本研究は近年注目を集めている Mixed Logit Model を対象とする。Mixed Logit Model はいくつもの形態を採り、選択肢間の類似性を表現することができる非 IIA 型モデルであると同時に、離散選択モデルの誤差構造を一般化したモデルと言え、モデル推定も比較的容易に行える柔軟なモデルである¹⁾。本稿では、誤差項を複数の部分 (error components) に分割し、Probit Model と同様に誤差間の相関を記述することを可能としたモデルを分析の対象とする。

Mixed Logit Model の推定値の特性や実用性を論じた研究がなされてきたが、実データに適用し、モデルの再現性・実用性を論じた研究^{2) 3)}や、他の離散選択モデルとの比較検証が中心で、Mixed Logit Model の推定特性や真の実用性は明らかにされてきたとは言えない。すなわち、扱い易いが故に、その推定結果の妥当性が十分に明らかにされないまま、Mixed Logit Model が適用されてきた可能性があると言えよう。

(2) 本研究の位置付け

以上の背景より、モデルパラメータの推定値の特性が十分に明らかとされていないという点が挙げられる。当然ながら、Mixed Logit Model を含め、いかなるモデルを用いる場合にも、モデルパラメータ推定値の特性が理解されていることは極めて重要である。これまでに、シミュレーションによって作成されたデータを用い、パラメータ推定値と真値とを比較検討した結果、誤差間に強

度の正の相関存在する時、Mixed Logit model のパラメータ推定値の分散が増大し不安定となることが示唆されている⁴⁾。しかし、その原因は十分に把握されていない。

一方で、Probit Model は特定する誤差項により、誤差項を identify することができない問題、identification problem を有することが示されている⁵⁾。Identification problem とは、以下に示す3つの誤差項共分散行列の場合のように、効用関数の相対的な差より選択確率が定まることから、モデル推定により共分散行列を特定することが不可能となることを指す。

$$\sigma_A = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sigma_{23} \\ 0 & \sigma_{23} & 1 \end{bmatrix}, \sigma_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sigma_{23} \\ 0 & \sigma_{23} & 1 \end{bmatrix}, \sigma_C = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

本研究では、この identification problem が存在する時、Mixed Logit Model のパラメータ推定値が不安定となると考え、パラメータ推定値の安定性についての検証を行い、Mixed Logit Model が identification problem を有するとき、そのパラメータ推定値は不安定となることを示す。

実際に離散選択モデルを実データに適用する時、分析者はどのような誤差構造を特定するべきかを知り得ない。そこで本研究は誤差構造が既知であるシミュレーションデータを用いてモデル推定を行い、その推定特性の検証を行う。つまり本研究では、実データを用いるのではなく、仮定した誤差構造、モデルパラメータを用い、離散選択をシミュレートすることで作成した離散選択データを用いる。つまり、モデルパラメータの真値と誤差構造が既知であるという前提の下、真値とパラメータ推定値の分布とを比較しパラメータ推定値の安定性を検証する。それに加え、誤差

*1 キーワーズ: Mixed Logit Model, Identification problem, 離散選択

*2 学生員, 京都大学大学院工学研究科

*3 正員, Ph.D, 京都大学大学院工学研究科

(京都市西京区京都大学桂, TEL075-383-3242, FAX075-383-3236)

項の共分散行列の推定値に着目し、identification problem とパラメータ推定値の安定性との関係を明らかにする。

2. 離散選択データの作成

本研究で用いる離散選択データは、選択ケース1,000、選択肢数は3肢、説明変数は2変数として、Probit choice probabilities に従って離散選択をシミュレートし離散選択データを生成する。誤差項の共分散行列は誤差項間の相関関係を仮定するものを用いている。誤差項の実現値を確率的に生成させ、効用関数にしたがい効用を算出し、一番大きな効用となった選択肢が選ばれたとみなすこととする。データのシミュレーションに用いられたパラメータ値をパラメータの真値として扱い、後の解析をする。以下、説明変数、誤差項の作成手法を述べる。

(1) 説明変数の作成

2つの説明変数は、標準正規分布に従う互いに独立な正規乱数により生成する。

(2) 誤差項の作成

選択肢1が独立であり、選択肢2と選択肢3の誤差項間に相関があることを仮定し、式(2)で表される共分散行列 Σ_z に従う乱数を発生させ、誤差項 z_1, z_2, z_3 を生成する。

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \sim \Sigma_z = \sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \rho \\ 0 & \rho & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

本研究では、 $\sigma^2=1.0$ とし、誤差相関係数 ρ を0.00, 0.30, 0.50, 0.70, 0.90, 0.95, 0.99と変更し、誤差項を生成する。誤差相関係数 $\rho=1.0$ を含めないのは、理論的にMixed Logit Modelの推定が行えないからである。

(3) 離散選択のシミュレーション

前節で作成した2説明変数と、選択肢2と選択肢3の誤差項間に相関があることを仮定した誤差項に加え、2つのパラメータ β_1, β_2 の値を用い効用を算出し、一番大きな効用となった選択肢が選ばれるという形で離散選択をシミュレートする。効用関数のパラメータとして、次式を用いた。

$$\begin{cases} \beta_1 = 1.0 \\ \beta_2 = 0.5 \end{cases} \quad (3)$$

モデル推定により得られるパラメータ値は実現値の1つであることから、本研究では設定した7種類の誤差相関係数値毎に100回分の離散選択データを作成し、そのデータを用いてパラメータ推定を100回繰り返し遂行し、比較・検証を行う。

3. Mixed Logit Model の特定化

本研究で用いるMixed Logit Modelの効用関数を整理すると以下の通りである。選択ケースは1,000である。以下、($i=1,2,3$ $n=1, \dots, 1,000$)とする。

$$\begin{cases} u_{1n} = \beta_1 X_{11n} + \beta_2 X_{21n} + \mu_{1n} + \varepsilon_{1n} \\ u_{2n} = \beta_1 X_{12n} + \beta_2 X_{22n} + \mu_{2n} + \varepsilon_{2n} \\ u_{3n} = \beta_1 X_{13n} + \beta_2 X_{23n} + \mu_{2n} + \varepsilon_{2n} \end{cases} \quad (4)$$

u_{in} : 個人 n が選択肢 i を選択したときの効用

β_j : $j(j=1,2)$ 番目の説明変数に関するパラメータ

X_{jin} : 個人 n の選択肢 i に関する $j(j=1,2)$ 番目の説明変数

ε_{in} : 選択肢間で独立な誤差項 (I.I.D. Gumbel 分布に従う)

ここで μ_{1n}, μ_{2n} はerror componentsで、次式で示すようにそれぞれ平均0、分散が s_1^2, s_2^2 の正規分布を仮定する。

$$\mu_{in} \sim N(0, s_i^2), i=1,2, E[\mu_{1n}\mu_{2n}] = 0, \forall n \quad (5)$$

$$E[\mu_{jn}\mu_{j'n'}] = 0, n \neq n', j, j'=1,2,$$

μ_{2n} が選択肢2と3に共通なことから誤差分散共分散行列は、

$$\begin{pmatrix} s_1^2 + \frac{\pi^2}{6} & 0 & 0 \\ s_2^2 + \frac{\pi^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{s_2^2}{s_2^2 + \frac{\pi^2}{6}} \\ 0 & \frac{s_2^2}{s_2^2 + \frac{\pi^2}{6}} & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

と表され、選択肢2と3に相関を持つものとなる。ここで、共分散行列 Σ_z と比較すると、作成した離散選択データの誤差構造を特定化するためには次式の制約条件が必要である。

$$s^2 = s_1^2 = s_2^2 \quad (7)$$

また、共分散行列の分散が作成データでは $\sigma^2=1.0$ であったのに対し、式(6)では $(s_2^2 + \pi^2/6)$ であることから、パラメータ推定値を $\hat{\beta}$ とした時、次式で標準化する必要がある。

$$\tilde{\beta}_j = \frac{1}{\sqrt{\hat{s}^2 + \frac{\pi^2}{6}}} \hat{\beta}_j \quad (8)$$

4. 推定結果

前述のように、実データを用いた分析の場合には特定すべき効用関数を知ることはできず、式(7)で示す制約条件が必要であることも知り得ない。そこで、制約条件を付加した場合としなかった場合で推定を行い、それぞれ推定値 β_1, β_2 を標準化した $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2$ と真値とを比較し、安定性の考察する。

比較のため、制約条件を付加した場合と、付加しなかった場合の、 $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2$ の平均値・中央値・標準偏差を表1に示す。図1、図2には横軸の誤差相関係数 ρ 毎に $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2$ の分布を示す。

図1、図2より、制約を付加しなかった時、誤差相関係数 ρ が大きくなるにつれて推定値 $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2$ が不安定となることが分かる。しかし、制約を付加した場合は ρ に関係なく安定している。また、表1より、制約を加えなかった時、誤差相関係数 ρ が 0.90, 0.95, 0.99 と高い値の時、その標準偏差が大きくなっており、パラメータ推定値が非常に不安定であることが確認できる。

最後に式(3)に示すパラメータ真値との比較を行うと、表1より制約の有無に関係なく、中央値は真値に等しい値を示しているのに対して、制約を付加しなかった時、その平均値・標準偏差は誤差相関係数の増大とともに大きな値を示すことが分かる。つまり、制約を付加すればパラメータ推定は真値周りで安定し、制約を付加しなかった時は強度の正の相関の下、非常に不安定になることが分かった。

表1 $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2$ の平均値・中央値・標準偏差 (制約あり・なし)

誤差相関係数 ρ		0.00	0.30	0.50	0.70	0.90	0.95	0.99	
$\tilde{\beta}_1$	制約あり	平均値	0.97	1.00	1.12	1.03	0.99	1.02	1.01
		中央値	0.96	1.00	1.11	1.02	0.99	1.01	1.01
		標準偏差	0.05	0.06	0.07	0.07	0.08	0.05	0.04
	制約なし	平均値	1.00	1.06	1.14	1.07	1.24	1.61	2.06
		中央値	0.99	1.06	1.12	0.99	0.95	1.04	1.11
		標準偏差	0.07	0.14	0.08	0.29	0.68	1.17	2.05
$\tilde{\beta}_2$	制約あり	平均値	0.50	0.50	0.56	0.51	0.50	0.51	0.50
		中央値	0.50	0.51	0.55	0.51	0.50	0.50	0.50
		標準偏差	0.04	0.04	0.05	0.04	0.04	0.04	0.02
	制約なし	平均値	0.50	0.53	0.56	0.54	0.62	0.80	1.04
		中央値	0.50	0.52	0.56	0.51	0.49	0.52	0.56
		標準偏差	0.04	0.08	0.05	0.15	0.34	0.59	1.05

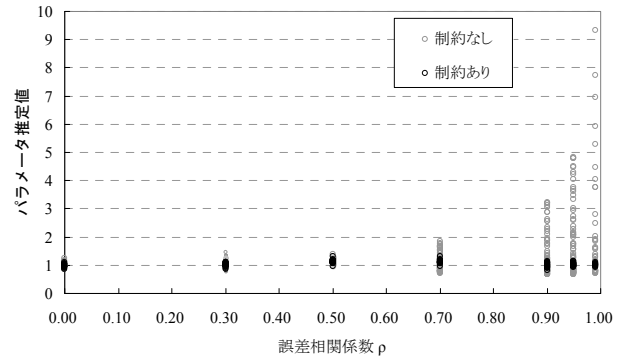


図1 ρ 毎のパラメータ推定値 $\tilde{\beta}_1$ (制約あり・なし)

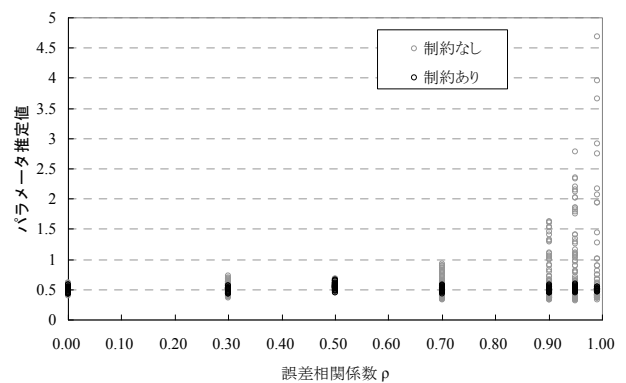


図2 ρ 毎のパラメータ推定値 $\tilde{\beta}_2$ (制約あり・なし)

5. Identification problem に関する考察

以下、推定結果が不安定であった、制約を付加しなかった場合に着目する。共分散行列の要素の推定値に着目し、identification problemが生じていることを検証する。 \hat{s}_1^2, \hat{s}_2^2 を用いて、式(6)より次式で表される $\hat{\sigma}_{11}, \hat{\sigma}_{23}$ の散布図を図3に示す。

$$\hat{\sigma}_{11} = \frac{\hat{s}_1^2 + \frac{\pi^2}{6}}{\hat{s}_2^2 + \frac{\pi^2}{6}}, \quad \hat{\sigma}_{23} = \frac{\hat{s}_2^2}{\hat{s}_2^2 + \frac{\pi^2}{6}} \quad (9)$$

式(1)より、制約を付加しなかった場合は式(1)の σ_A に分類される共分散行列を推定していることが分かる。しかし、図3中に、 $\hat{\sigma}_{11} = 1.0$ となるグループがあり、これは σ_B を推定している。また、 $\hat{\sigma}_{23} = 0.0$ となるグループもあり、これは σ_C を推定している。つまり、Identification problemが生じていることは明らかであろう。

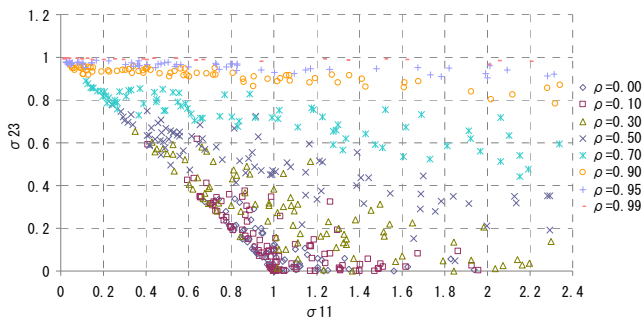


図3 ρ 毎の $\hat{\sigma}_{11}, \hat{\sigma}_{23}$ の散布図 (制約なし)

6. 標準化に関する考察

ここで、 $\rho=0.90$ の時の \hat{s}_1^2, \hat{s}_2^2 の散布図を図4に示す。明らかに、 \hat{s}_1^2, \hat{s}_2^2 間に負の相関関係が見られる。

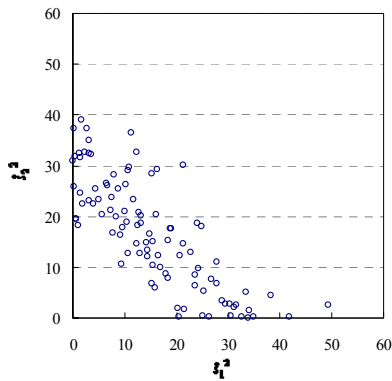


図4 $\rho=0.90$ の時の \hat{s}_1^2, \hat{s}_2^2 の散布図 (制約なし)

これまで式(7)が満たされているという仮定のもとで式(8)を用いて標準化を行ってきたが、図4より、明らかに式(7)は満たされていない。そこで、次式で表される \hat{s}_1^2 と \hat{s}_2^2 の平均を用いた標準化を行う。

$$\tilde{\beta}_j = \frac{1}{\sqrt{\frac{\hat{s}_1^2 + \hat{s}_2^2}{2} + \frac{\pi^2}{6}}} \hat{\beta}_j \quad (9)$$

図5に横軸の誤差相関係数 ρ 毎に $\tilde{\beta}_1$ の分布を示す。真値である 1.0 付近で安定していることが分かる。

図1中の制約を付加しない場合と比較すると式(9)を用いた標準化の方が非常に安定している。

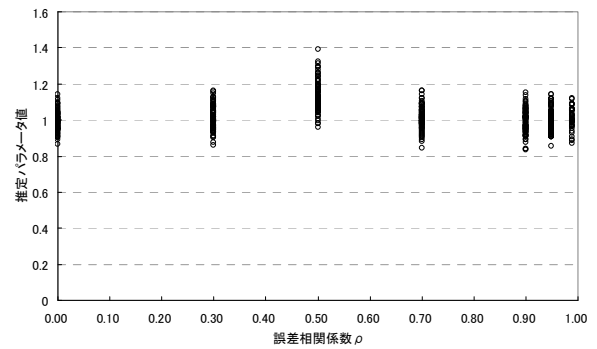


図5 ρ 毎のパラメータ推定値 $\tilde{\beta}_1$ (新しい標準化)

7. まとめ

シミュレーションによって作成されたデータを用い、Mixed Logit model のパラメータ推定値の安定性に関して検証を行った。誤差項の共分散行列の構造が既知の場合、適切な制約条件を付加することでパラメータ推定値は安定するが、共分散行列構造が未知であるというより現実的な前提の下では、誤差間に強度の正の相関が存在する時、特に不安定となった。これは identification problem によるものである。しかし、identification problem が存在していても、標準化の手法に工夫することでパラメータ推定値は安定することが示された。だが、標準化手法に関しては一般的な知見を得られたわけではないため、理論的にも、更なる詳細な検証が必要であると考えられる。

参考文献

- 1) Kenneth E. Train: Discrete Choice Methods with Simulation, Cambridge university press, 2003
- 2) 清水哲夫, 屋井鉄雄: Mixed Logit Model とプロビットモデルの推定特性に関する比較分析, 土木計画学研究・論文集, No. 16, pp. 587-590, 1999.
- 3) 兵藤哲朗, 章翔: Mixed Logit モデルの汎用性に着目した特性比較分析, 土木学会論文集, No.660/IV-49, 89-99, 2000
- 4) 中井周作, 北村隆一: Mixed Logit Model の特定可能性に関する研究, 第36回土木計画学研究発表会・講演集, vol.36, CD-R, 2007
- 5) Dansie, B.R.: Parameter estimability in the multinomial probit model. *Transportation Research B*, Vol. 19, No. 6, pp. 526-528 (1985).