Mixed Logit Model の推定可能性に関する研究*[1]
On the Estimability of Mixed Logit Models*[1]

中井周作*[2]，北村隆一*[3]
By Shusaku NAKAI[2], Ryuichi KITAMURA*[3]*

1. はじめに

(1) 研究の背景

離散選択モデルは交通計画を含む幅広い分野で適用されてきたが [1)]，本研究は，近年注目を集めている Mixed Logit Model を対象とする．Mixed Logit Model は選択肢間の類似性を表現することができる非 IIA 型モデルであり，Logit Model では表現することができなかった誤差間の相関関係を記述することが可能となったモデルと言える．

Mixed Logit Model はいくつもの形態を採るが，そのなかでも，計量経済学の分野で離散パネルデータの解析などに用いられる Error Components[2)] の概念を誤差項に適用したものを本稿の対象とする．これらモデルでは，誤差項を複数の部分に分割し，Probit Model と同様に誤差間の相関を記述することが可能となっている．すなわち，Mixed Logit Model は離散選択モデルの誤差構造を一般化したモデルと言え，モデル推定も比較的容易に行える柔軟なモデルとなっている [3)]．

その Mixed Logit Model を実データに適用し，モデルの再現性・実用性を論じた研究が多く行われてきた [4) 5)]．しかし，それらの研究は，実データから得られたパラメータ推定値の妥当性を論じる，あるいは他の離散選択モデルとの比較による検証に留まるのが一般である．加えて，実データではモデルパラメータの真値が未知であることから，Mixed Logit Model の推定特性や真の実用性は明らかにされてきたとは言えない．すなわち，扱い易いが故に，その推定結果の妥当性が十分に明らかにされないまま，Mixed Logit Model が適用されてきた可能性があると言えよう．

*1 キーワーズ：Mixed Logit Model，誤差相関，離散選択
*2 学生員，京都大学大学院工学研究科
*3 正員，Ph.D，京都大学大学院工学研究科
（京都市西京区京都大学桂, TEL075-383-3242, FAX075-383-3236）

(2) 本研究の位置付け

以上のように，Mixed Logit Model のもつ問題点として，モデルパラメータの推定値の特性が十分に明らかとされていないという点が挙げられる．当然ながら，Mixed Logit Model を含め，いかなるモデルを用いる場合にも，モデルパラメータ推定値の特性が理解されていることは極めて重要である．すなわち，パラメータ推定値はどのような分布を持つのか，そして標準偏差などの推定値はその分布を正確に示すものなのかを把握することは非常に重要と言える．

本研究では Mixed Logit Model の誤差項の構造に着目し，その推定特性の検証を行う．すなわち，誤差項の相関に着目しつつ，モデルパラメータの推定値がどのような分布を持つのかを数値実験を通じて明らかにする．本研究では，実データを用いるのではなく，仮定したモデルパラメータの値を用い，離散選択をシミュレートすることで作成した離散選択データを用いる．つまり，モデルパラメータの真値が既知という前提の下，パラメータ推定値の分布と真値を比較し，パラメータ推定値の特性を検証することを目的とする．これに加え，モデルの推定可能性についても検討を加える．

2. 仮説の措定

前述したように，ここでは効用関数の誤差項部分に特徴がある Mixed Logit Model を対象としている．式(1)で表される，誤差項が選択肢間で相関がある部分と，相関の無い部分に分割された形となっている場合を考えよう．

$$u_{in} = \boldsymbol{\beta}\mathbf{x}_{in} + \mu z_{in} + \varepsilon_{in}\ ,\ \left(i = 1,2,\cdots\ n = 1,2,\cdots\right) \quad (1)$$

u_{in} ：個人 n が選択肢 i を選択したときの効用

β：パラメータベクトル

$\mathbf{x}_{in}$：個人 n の選択肢 i に関する説明変数ベクトル

μz_{in}：選択肢間で相関のある誤差項（正規分布に従う）

ε_{in}：選択肢間で独立な誤差項（I.I.D. Gumbel 分布に従う）

ここで μz_{in} のうち，μ は平均 0，分散 s^2 の正規分布を仮定したパラメータであり，z_{in} は相関のある選択肢間の誤差項について 1 となるダミー変数であり，特性変数となる．

誤差項 $\mu z_{in}+\varepsilon_{in}$ の分散・共分散は，z_{in} = z_{jn} = 1 のとき，それぞれ次式で表される．

$$Var[\mu z_{in}+\varepsilon_{in}]=s^2+\frac{\pi^2}{6} \tag{2}$$

$$\mathrm{cov}[\mu z_{in}+\varepsilon_{in},\mu z_{jn}+\varepsilon_{jn}]=s^2 \tag{3}$$

ここで，$\frac{\pi^2}{6}$ は Gumbel 分布の分散，s^2 は μ の分散である．式(2)，式(3)より，誤差相関係数 ρ は次のように表される．

$$\rho=\frac{s^2}{s^2+\frac{\pi^2}{6}} \tag{4}$$

この式(4)に着目すると，誤差相関係数 ρ が 1.0 に近づいた時，正規分布に従う誤差項 μz_{in} の分散 s^2 が無限大に発散することが見てとれる．つまり，強度の正の相関が選択肢間に存在するとき，正規分布に従う誤差項 μz_{in} の分散 s^2 が大きな値となり，誤差項全体の分散も大きくなることに伴い，パラメータ **β** の推定値が大きく変動することが予想される．

それに加えて，Mixed Logit Model の特徴として挙げられるのが，パラメータ推定時に用いる最尤推定法の目的関数である尤度関数が凹関数とは言えないことである．その結果，たとえ計算の中で収束解を得たとしても，その収束解が局所的解であり全域的解ではない可能性が否めない．また，本研究で特定する Mixed Logit Model では，式(1)より，正規分布を仮定する誤差項の平均値・分散を同時に推定することになる．つまり，式(4)より誤差相関係数の増大とともに，理論的に正規分布に従う誤差項 μz_{in} の分散 s^2 が大きくなることから，s^2 が発散し推定が行えない可能性が考えられる．

そこで本研究では，特定した効用関数の推定可能性についても論じることとする．以上を踏まえ，本研究では以下 2 つの仮説の措定を行う．

（*仮説 1*）***誤差項間に強度の正の相関がある時，推定されるパラメータ値の分散が増大する．***

（*仮説 2*）***誤差相関係数の増大とともに，モデル推定が行えない可能性が増大する．***

3．離散選択データの作成

本研究で用いる離散選択データは，選択ケース 1,000, 選択肢数は 3 肢, 説明変数は 2 変数として，Probit choice probabilities にしたがって離散選択をシミュレートし離散選択データを生成する．Probit Model の誤差構造，つまり誤差項の分散共分散行列を用いることで，誤差項間の相関関係をシミュレーションに導入している．誤差項の実現値を確率的に生成させ，効用関数にしたがい効用を算出し，一番大きな効用となった選択肢が選ばれたとみなすこととする．既に述べたように，データのシミュレーションに用いられたパラメータ値をパラメータの真値として扱い，後の解析をする．以下，説明変数，誤差項の作成手法を述べる．

(1)　説明変数の作成

作成する 2 つの説明変数には，標準正規分布に従う正規乱数を作成し用いる．

(2)　誤差項の作成

本研究では，選択肢 1 が独立であり，選択肢 2 と選択肢 3 の誤差項間に相関があることを仮定する．そのため，式(5)で表される誤差の分散共分散行列 $\sum_z$ に従う乱数を発生させ，誤差項 z_1,z_2,z_3 を生成する．

$$\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\\ z_3\end{pmatrix}\sim\sigma^2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\rho\\0&\rho&1\end{pmatrix},\ \sum_z=\sigma^2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\rho\\0&\rho&1\end{pmatrix} \tag{5}$$

本研究では, 誤差相関係数 ρ を 0.00, 0.10, 0.30, 0.50，070，0.90，0.95，0.99 と変更し，誤差項を生成する．ここで誤差相関係数 $\rho=1.0$ を含めないのは, 理論的に Mixed Logit Model の推定が行えな

いからである．また，0.90 から 0.95，0.99 としているのは強度の正の相関の下での Mixed Logit Model の挙動を詳細に把握するためである．

(3) 離散選択のシミュレーション

前節で作成した 2 説明変数と，選択肢 2 と選択肢 3 の誤差項間に相関があることを仮定した誤差項に加え，効用関数の 2 つのパラメータ β_1, β_2 の値を用い効用を算出し，一番大きな効用となった選択肢が選ばれるという形で離散選択をシミュレートする．効用関数のパラメータとしては，

$$\begin{cases} \beta_1 = 1.0 \\ \beta_2 = 0.5 \end{cases} \tag{6}$$

を用いた．

モデル推定により得られるパラメータ値は実現値の 1 つであることから, 本研究では設定した 8 種類の誤差相関係数値毎に 100 回分の離散選択データを作成し, そのデータを用いてパラメータ推定を100回繰り返し遂行し, 比較･検証を行う.

4. Mixed Logit Model の特定化と推定

上に述べた本研究で用いる Mixed Logit model の効用関数を整理すると以下の通りである．説明変数は2変数, 選択肢は3肢, 選択ケース数が 1,000 である．効用関数は次式となる．

$$\begin{cases} u_{1n} = \beta_1 X_{11n} + \beta_2 X_{21n} + \mu_1 \cdot 1 + \mu_2 \cdot 0 + \varepsilon_{1n} \\ u_{2n} = \beta_1 X_{12n} + \beta_2 X_{22n} + \mu_1 \cdot 0 + \mu_2 \cdot 1 + \varepsilon_{2n} \\ u_{3n} = \beta_1 X_{13n} + \beta_2 X_{23n} + \mu_1 \cdot 0 + \mu_2 \cdot 1 + \varepsilon_{2n} \end{cases} \tag{7}$$

以下， $(i = 1,2,3 \quad n = 1, \cdots 1{,}000)$ とする．ここに

X_{jin} ：個人 n の選択肢 i に関する $j(j=1,2)$ 番目の説明変数

また， μ_1 の分散を $s_1{}^2$ ， μ_2 の分散を $s_2{}^2$ とする．

誤差分散共分散行列は，離散選択データ作成時の分散共分散行列 $\sum_z$ と整合をとり

$$\begin{pmatrix} s_1{}^2 + \dfrac{\pi^2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & s_2{}^2 + \dfrac{\pi^2}{6} & s_2{}^2 \\ 0 & s_2{}^2 & s_2{}^2 + \dfrac{\pi^2}{6} \end{pmatrix} \tag{8}$$

と表され，選択肢 2 と 3 に相関を仮定したものとなる．また，式(4)より，次式を得る．

$$s^2 = s_1{}^2 = s_2{}^2 = \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{\rho}{1-\rho} \tag{9}$$

モデル推定に当っては，誤差相関係数 ρ に対応した分散 s^2 を初期値として用いる．また，random coefficient である μ_1, μ_2 に関しては，式(9)で算出した分散 $s_1{}^2$， $s_2{}^2$ に加えて，平均値 0 を初期値としモデル推定を行った．これにより，推定可能性が高まる結果になったと考えられる．

5. 推定結果

ここでは，まず 100 回の離散選択のうち成功した回数をもとに推定可能性について述べた後，パラメータ β_1, β_2 の推定値 $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ と真値との比較による再現性に考察を加える．

(1) 推定可能性に関する考察

本研究では 8 種類の誤差相関係数値毎に 100 回分のデータセットでモデル推定を行ったが，前述のように推定が行えないケースが存在した. **表 1** は，100 組のデータで推定を行った中で，推定が行えた回数を示している．

表 1　100 回の推定のうち推定が行えた回数

誤差相関係数 ρ	0.00	0.10	0.30	0.50	0.70	0.90	0.95	0.99
推定が行えた回数（回）	99	100	89	98	93	98	95	46

表 1 より, 誤差相関係数 ρ が 0.99 以外の時は約 9 割の確率で推定が成功しているのに対して，誤差相関係数 ρ が 0.99 の時は推定が行えた回数が 46 回となり，5 割を切る結果となっている．これは誤差相関係数が 0.99 と 1.0 に非常に近い値をとった時, 式(4)に示されるように s^2 が非常に大きな値となることが影響していると考えられる．1.0 に非常に近い値を誤差相関係数 ρ として与えた時，モデル推定の可能性は非常に低くなることが確認された．

(2) モデルの再現性に関する考察

続いて，パラメータ β_1 の推定結果 $\hat{\beta}_1$，パラメータ β_2 の推定結果 $\hat{\beta}_2$ の誤差相関係数毎の平均値・中央値・分散をそれぞれ**表 2**，**表 3** に示す．また，**図 1**，**図 2** には横軸の誤差相関係数 ρ 毎に，パラメータ推定値を，**表 1** に示す推定が行えた回数分プロットした．

表 2　誤差相関係数毎のパラメータ推定値 $\hat{\beta}_1$

誤差相関係数	0.00	0.10	0.30	0.50	0.70	0.90	0.95	0.99
平均	0.997	1.013	1.056	1.137	1.074	1.237	1.608	2.056
中央値	0.991	1.011	1.060	1.124	0.995	0.954	1.040	1.107
分散	0.004	0.008	0.019	0.007	0.085	0.464	1.363	4.198

表 3　誤差相関係数毎のパラメータ推定値 $\hat{\beta}_2$

誤差相関係数	0.00	0.10	0.30	0.50	0.70	0.90	0.95	0.99
平均	0.502	0.515	0.525	0.563	0.538	0.622	0.798	1.036
中央値	0.498	0.508	0.523	0.562	0.510	0.487	0.524	0.562
分散	0.002	0.003	0.006	0.002	0.022	0.116	0.345	1.093

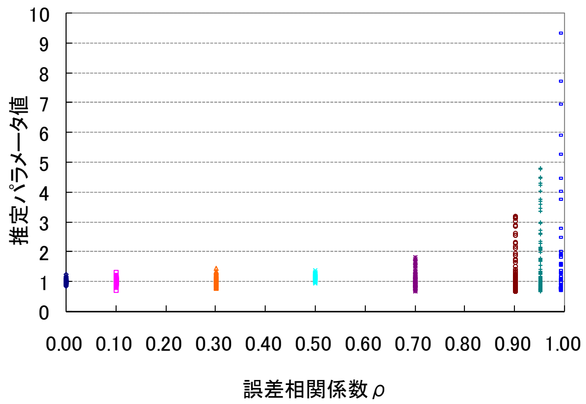

図 1　誤差相関係数毎のパラメータ推定値 $\hat{\beta}_1$

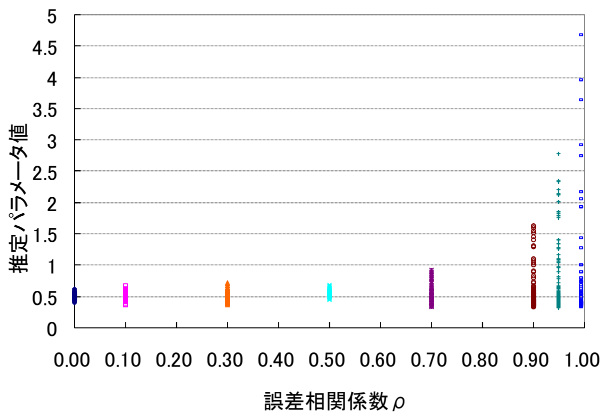

図 2　誤差相関係数毎のパラメータ推定値 $\hat{\beta}_2$

図 1，**図 2** より，誤差相関係数 ρ の値が大きくなるにつれて推定値 $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ が大きく変動していることが分かる．それに加え，**表 2**，**表 3** の結果より，誤差相関係数 ρ が 0.90，0.95，0.99 と高い値をとる時，その分散が大きくなっていることが分かり，パラメータ推定値が不安定であることが確認できる．

最後に式(6)に示すパラメータ真値との比較を行うと，**表 2**，**表 3** より中央値は真値に等しい値を示しているのに対して，その平均値・分散は誤差相関係数の増大とともに大きな値を示すことが分かる．つまり，パラメータの再現性は強度の正の相関の下では低くなることが分かる．これは，前述のように，式(4)よりモデル推定のときに正規分布を仮定する誤差項の分散が非常に大きな値となることが影響していると考えられる．また推定の際に到達した最適点が全域的最適点ではなく，局所的最適点であることも原因と考えられる．

6. まとめ

シミュレーションによって作成されたデータを用い，Mixed Logit model のパラメータ推定値と真値とを比較検討した結果，本研究で措定した仮説 1，仮説 2 の双方を支持する結果を得られたと言える．すなわち，誤差間に強度の正の相関存在する時，Mixed Logit model の再現性・推定可能性の双方が低くなることが示された．しかし，本研究の分析では初期値の設定の仕方などで不十分な点があり，更なる詳細な検証が必要であると考えられる．

参考文献

1）Moshe Ben-Akiva，Steven R. Lerman：Discrete Choice Analysis，The MIT Press，1985

2）W. H. Greene 著，浅井学，中妻照雄，斯波恒正：グリーン　計量経済分析 II，エコノミスト社，2000

3）Kenneth E. Train： Discrete Choice Methods with Simulation，Cambridge university press，2003

4）清水哲夫，屋井鉄雄：Mixed Logit Model とプロビットモデルの推定特性に関する比較分析，土木計画学研究・論文集，No. 16，pp. 587-590，1999.

5）兵藤哲朗，章翔：Mixed Logit モデルの汎用性に着目した特性比較分析，土木学会論文集，No.660/IV-49, 89-99，2000