AHPにおける支配代替案法の評価原則*
Evaluation Rule of Dominant model on AHP*

木下栄蔵**・田地宏一***・杉浦伸****
By Eizo KINOSHITA** • Kouichi TAJI*** • Shin SUGIURA****

１．はじめに

AHP（Analytic Hierarchy Process）は様々な問題を，総合目的，評価基準，代替案の階層構造に構築し，一対比較を行い代替案の優先順位を導く意思決定モデルである．本稿では AHP の発展モデルである木下・中西によって提案されたDominant model の評価原則について述べる．さらに，Dominant model 以外の AHP における 2 つのモデルとしてBelton & Gear model，Referenced model を取り上げ，その計算法と数値例を示し，さらに 3 つのモデルの数学的構造を構築していずれのモデルも同一の結果を導くことを示す．

２．Dominant model の評価原則

本章ではDominant model の評価原則について述べる．Dominant model は以下の評価原則により導かれる．

評価原則１（支配代替案の存在）

評価空間において，複数の評価基準と複数の代替案が存在する．そして，評価する際，評価の規範となる支配代替案が存在する．

評価原則２（一対比較優の位性）

代替案の評価値は対象とする評価基準に関する一対比較により導出できる．ただし，支配代替案の評価値は 1 とする．

評価原則３（目的合理性：評価基準の重みの非申告性）

評価基準の重みは該当する支配代替案の評価値の比率とする．

評価原則４（総合評価値）

総合評価値 E は評価マトリックス M，評価基準の重み V により以下の式で求められる．ただし，支配代替案の評価値はすべて１とする．　E=MV

評価原則５（総合評価値一致の原則）

あらゆる支配代替案を規範とした総合評価値は一致する．

３．各モデルの数値例

(1) Dominant model[1)2)]

本節では，評価基準は 2 つ，代替案は 3 つの場合について Dominant mode の例について説明する．与えられた 2 つの評価基準における 3 つの代替案の評価値を表ー1 に示す．

表－１　代替案の評価値

	C1	C2	合計
A1	84	24	108
A2	48	65	113
A3	75	21	96
合計	207	110	

Dominant model は複数をある代替案の名からある代替案に着目し（これを支配代替案と呼ぶ），その代替案を基準にして総合評価値を導出する手法である．代替案の評価値については支配代替案の評価値を 1 に正規化する．また，評価基準の重みは支配代替案の評価値の比を用いる．代替案 A1 が支配代替案とすると代替案の評価値と評価基準の重みは表ー2 になる．

表－２　Dominant model の評価値（支配代替案 A1）

	C1	C2
A1	84/84=１	24/24=1
A2	48/84=0.571	65/24=2.708
A3	75/84=0.362	21/24=0.875

Dominant model の評価基準の重み（支配代替案 A1）

	C1	C2

---

*キーワーズ：AHP
**正員，工博，名城大学都市情報学部都市情報学科
（E-mail:kinoshit@urban.meijo-u.ac.jp）
***非会員，工博，名古屋大学大学院工学研究科
（E-mail:taji@nuem.nagoya-u.ac.jp）
****学生員，名城大学大学院都市情報学研究科
（E-mail:p0681501@urban.meijo-u.ac.jp）

評価基準の重み	84/（84+24）=0.778	24/（84+24）＝0.222

表ー2 から，代替案の評価値は（1）式，評価基準の重みは（2）式となる．

$$M=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0.571 & 2.708\\ 0.893 & 0.875\end{bmatrix} \quad (1)$$

$$W=\begin{bmatrix}0.778\\ 0.222\end{bmatrix} \quad (2)$$

したがって評価原則 4 より総合評価値は（3）式となる．

$$E=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0.571 & 2.708\\ 0.893 & 0.875\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0.778\\ 0.222\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1.046\\ 0.889\end{bmatrix} \quad (3)$$

（3）式の結果を合計 1 に正規化すると最終的な評価値として（4）式が得られる．

$$E=\begin{bmatrix}0.341\\ 0.356\\ 0.303\end{bmatrix} \quad (4)$$

次に，支配代替案が A2 の場合について説明する．新たに A2 を支配代替案とした時の代替案の評価値と評価基準の重みは表 - 3 になる．

表ー３　Dominant model **の評価値（支配代替案** A2**）**

	C1	C2
A1	84/48=1.750	24/24=0.369
A2	48/48=1	65/24=1
A3	75/48=1.563	21/24=0.323

Dominant model **の評価基準の重み（支配代替案** A2**）**

	C1	C2
評価基準の重み	48/（48+65）=0.425	65/（48+65）＝0.575

表ー3 から，代替案の評価値は（5）式，評価基準の重みは（6）式となる．

$$M=\begin{bmatrix}1.750 & 0.369\\ 1 & 1\\ 1.563 & 0.323\end{bmatrix} \quad (5)$$

$$W=\begin{bmatrix}0.425\\ 0.575\end{bmatrix} \quad (6)$$

したがって総合評価値は（7）式となる．

$$E=\begin{bmatrix}1.750 & 0.369\\ 1 & 1\\ 1.563 & 0.323\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0.425\\ 0.575\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.956\\ 1\\ 0.850\end{bmatrix} \quad (7)$$

（7）式の結果を合計 1 に正規化すると（4）式と一致する．

同様に支配代替案が A3 の場合は代替案の評価値と評価基準の重みは表 - 4 になる．

表ー４　Dominant model **の評価値（支配代替案** A3**）**

	C1	C2
A1	84/75=1.120	24/21=0.369
A2	48/75=0.640	65/21=3.095
A3	75/75=1	21/21=1

Dominant model **の評価基準の重み（支配代替案** A3**）**

	C1	C2
評価基準の重み	75/（75+21）=0.781	65/（75+21）＝0.219

表ー4 から，代替案の評価値は（8）式，評価基準の重みは（9）式となる．

$$M=\begin{bmatrix}1.120 & 1.143\\ 0.640 & 3.095\\ 1 & 1\end{bmatrix} \quad (8)$$

$$W=\begin{bmatrix}0.781\\ 0.219\end{bmatrix} \quad (9)$$

したがって総合評価値は（10）式となる．

$$E=\begin{bmatrix}1.120 & 1.143\\ 0.640 & 3.095\\ 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0.781\\ 0.219\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.125\\ 1.177\\ 1\end{bmatrix} \quad (10)$$

（10）式の結果を合計 1 に正規化すると（4）式と一致する．どの代替案を支配代替案としても総合評価値が一定である．

以下で述べる Belton & Gear model，Referenced model と異なり総合評価値の導出数が Dominant model は支配代替案の数だけ存在するが，いずれの代替案が支配代替案でも最終的な結果同じであることが Dominant model の特徴である．

さて，AHP の発展モデルである ANP（Analytic Network Process）[7]は複数の評価基準の重みを同時に取り扱うことが可能なモデルである．Dominant model によっ

て得られた評価基準ごとの重みを ANP に適用すると総合評価値の結果が同じであることがわかる.

ANP では，スーパーマトリックスと呼ばれる（11）式を作成する．（11）式の主固有ベクトル（固有値 1 に対応する固有ベクトル）を求め，総合評価値を導出する手法が ANP である.

$$S = \begin{pmatrix} 0 & W \\ M & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

ただし，ANP において（11）式の W と M は列和が 1 の確率行列であることが求められるため，（11）式における M は代替案の評価値の合計を 1 にした評価値，つまり Referenced model と同一の評価値とし，W は Dominant model の評価基準の重みとするとスーパーマトリックスは（12）式となる.

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.778 & 0.425 & 0.781 \\ 0 & 0 & 0.222 & 0.575 & 0.219 \\ 0.406 & 0.218 & 0 & 0 & 0 \\ 0.232 & 0.591 & 0 & 0 & 0 \\ 0.362 & 0.191 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

ここで（12）式のスーパーマトリックス S の主固有ベクトルを $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ とすると，$S\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ を解き，主固有ベクトルとして（13），（14）式が得られる．p は評価基準に関する列ベクトルであり，q は評価値に関する列ベクトルである.

$$p = \begin{bmatrix} 0.653 \\ 0.347 \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$q = \begin{bmatrix} 0.341 \\ 0.356 \\ 0.303 \end{bmatrix} \tag{14}$$

そして，（14）式における評価値ベクトル q は（4）式と一致していることがわかる.

(2) Belton & Gear model[3)-5)]

本節では，評価基準は 2 つ，代替案は 3 つの場合について Belton&Gear model の例について説明する．与えられた評価値は表 - 1 の Dominant model と同様である.

Belton & Gear model では，各評価基準の代替案の評価値の最大値の正規化を行う．また，評価基準の重みの比は各評価基準の評価値の最大値の比である．すなわち，代替案の評価値と評価基準の重みは表 - 5 の示すようになる.

表－５　Belton & Gear model の評価値

	C1	C2
A1	84/84＝1	24/65＝0.369
A2	48/84＝0.571	65/65＝1
A3	75/84＝0.893	21/65＝0.323

Belton & Gear model の評価基準の重み

	C1	C2
評価基準の重み	84/（84+65）＝ 0.564	65/（84+65）＝ 0.436

表―5 より評価値 M は（15）式，評価基準の重み W は（16）式になる．最終的な総合評価値は（17）式となる.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0.369 \\ 0.571 & 1 \\ 0.893 & 0.323 \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$W = \begin{bmatrix} 0.564 \\ 0.436 \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0.369 \\ 0.571 & 1 \\ 0.893 & 0.323 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.564 \\ 0.436 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.725 \\ 0.758 \\ 0.644 \end{bmatrix} \tag{17}$$

（17）式の結果を合計 1 に正規化すると（4）式と一致する.

(3) Referenced mode[6)]

本節では，評価基準を 2 つ，代替案は 3 つの場合について Referenced model の例について説明する．与えられた評価値は表 - 1 の Dominant model と同様である.

Referenced model では代替案の評価値は各評価基準における代替案の評価値の合計の正規化，つまり評価基準ごとに評価値を合計 1 に正規化する．また，評価基準の重みは代替案の評価値の合計の比を用いる．Referenced model における代替案の評価値と評価基準の重みを表 - 6 に示す.

表－６　Referenced model の評価値

	C1	C2
A1	84/207=0.406	24/110=0.218
A2	48/207=0.232	65/110=0.591
A3	75/207=0.362	21/110=0.191

Referenced model の評価基準の重み

	C1	C2
評価基準の重み	207/ (207+110) =0.653	110/ (207+110) ＝ 0347

表 - 6 から，代替案の評価値は（18）式，評価基準の重みは（19）式となる．

$$M=\begin{bmatrix}0.406 & 0.218\\ 0.232 & 0.591\\ 0.362 & 0.191\end{bmatrix} \tag{18}$$

$$W=\begin{bmatrix}0.653\\ 0.347\end{bmatrix} \tag{19}$$

また，総合評価値は（20）式となる．

$$E=\begin{bmatrix}0.406 & 0.218\\ 0.232 & 0.591\\ 0.362 & 0.191\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0.653\\ 0.347\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.341\\ 0.356\\ 0.303\end{bmatrix} \tag{20}$$

Referenced model では評価基準の重み，評価値についても合計 1 の正規化が行われているため得られた（20）式の結果は（4）式と一致している．

３．3 つの AHP モデルの数学的構造

⑴ Dominant model

Dominant model は複数ある代替案の名からある代替案に着目し（これを支配代替案と呼ぶ），その代替案を基準にして総合評価値を導出する．代替案 l が支配代替案であるとき，正規化された評価値は $\tilde{a}_{ij}=\dfrac{a_{ij}}{a_{lj}}$ である．

評価基準の重みは，支配代替案の評価値の比を用い，合計を 1 に正規化した値を重みとして採用する．そのため，評価基準の重みは $\tilde{c}_j=\dfrac{a_{lj}}{\sum_k a_{lk}}$ となる．したがって，代替案 i の総合評価値 $\tilde{p}_i$ は，

$$\tilde{p}_i=\sum_j \tilde{c}_j\tilde{a}_{ij}=\sum_j\frac{a_{lj}}{\sum_k a_{lk}}\frac{a_{ij}}{a_{lj}}=\frac{1}{\sum_k a_{lk}}\sum_j a_{ij} \tag{21}$$

となる．

さらに，Dominant model の評価基準の重みを ANP に組み込んだモデルについて以下に示す．

ANP ではスーパーマトリクス $S=\begin{pmatrix}0 & C\\ A & 0\end{pmatrix}$ を作成し，その主固有ベクトル（固有値 1 に対応する固有ベクトル）を求め総合評価値を得る．ただし，部分行列 A は評価値 a_{ij} を並べたものであり，C は A の転置であるが，それぞれ列の総和を 1 に正規化しているため，A，C の各要素はそれぞれ，$A_{ij}=\dfrac{a_{ij}}{\sum_k a_{kj}},C_{ij}=\dfrac{a_{ji}}{\sum_k a_{jk}}$ となる．

スーパーマトリクス S の主固有ベクトルを $\begin{pmatrix}q\\ p\end{pmatrix}$ と書くと，

$S\begin{pmatrix}q\\ p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q\\ p\end{pmatrix}$ となるが，総合評価値に対応する部分 p のみに注目すると，$ACp=p$，すなわち p はまた行列 AC の主固有ベクトルでもある．

そこで，$p_i=\sum_j a_{ij}$ とおき，ACp の i 行目を計算すると，

$$\begin{aligned}
(ACp)_i&=\sum_j (AC)_{ij}\,p_j\\
&=\sum_j\left(\sum_l\left(\frac{a_{il}}{\sum_k a_{kl}}\times\frac{a_{jl}}{\sum_k a_{jk}}\right)\right)\times\sum_m a_{jm}\\
&=\sum_j\left(\frac{1}{\sum_k a_{jk}}\sum_l\left(\frac{a_{il}a_{jl}}{\sum_k a_{kl}}\right)\right)\times\sum_m a_{jm}\\
&=\sum_j\sum_l\left(\frac{a_{il}a_{jl}}{\sum_k a_{kl}}\right)=\sum_l\sum_j\left(\frac{a_{il}a_{jl}}{\sum_k a_{kl}}\right)\\
&=\sum_l a_{il}=p_i
\end{aligned} \tag{22}$$

となり，$p_i=\sum_j a_{ij}$ は AC の主固有ベクトル，すなわち求めたい総合評価値になることがわかる．これは，（21）式で求めた総合評価値と等しい．なお，同様の計算により q の各要素は $q_j=\sum_i a_{ij}$ となることを示すことができる．

⑵ Belton & Gear model

本節では，Belton & Gear model の構造について説明する．AHP における評価基準 j の下での代替案 i の評価値を a_{ij} とする．AHP での総合評価値 p_i は，評価原則 4 より求められる評価値 a_{ij} に評価基準の重み c_j をかけた重み付き加法和で求める．したがって，評価原則 4 は（23）式と表現できる．

$$p_i = \sum_j c_j a_{ij} \tag{23}$$

Belton & Gear model は，評価基準ごとに評価値の最大値を 1 とするような正規化を行うため，評価基準ごとの評価値の最大値を $\bar{a}_j = \max_i a_{ij}$ とおくと，正規化された評価値は $\bar{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{\bar{a}_j}$ となる．評価基準の重みは，評価基準ごとの最大値の比を合計 1 にした重みを用いるので，$\bar{c}_j = \frac{\bar{a}_j}{\sum_k \bar{a}_k}$ となる．したがって，代替案 i の総合評価値 $\bar{p}_i$ は,

$$\bar{p}_i = \sum_j \bar{c}_j \bar{a}_{ij} = \sum_j \frac{\bar{a}_j}{\sum_k \bar{a}_k} \frac{a_{ij}}{\bar{a}_j} = \frac{1}{\sum_k \bar{a}_k} \sum_j a_{ij} \tag{24}$$

となる．

(3) Referenced model

Referenced model では，評価値を，各評価基準の評価値の総和で割るという正規化を行う．つまり評価基準ごとに評価値を合計 1 に正規化する．$\hat{a}_j = \sum_i a_{ij}$ とおくと，正規化された評価値は $\hat{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{\hat{a}_j}$ である．評価基準の重みは，評価基準ごとの総和の比を用い，合計を 1 に正規化した値を重みとして用いるので，$\hat{c}_j = \frac{\hat{a}_j}{\sum_k \hat{a}_k}$ となる．したがって，代替案 i の総合評価値 $\hat{p}_i$ は,

$$\hat{p}_i = \sum_j \hat{c}_j \hat{a}_{ij} = \sum_j \frac{\hat{a}_j}{\sum_k \hat{a}_k} \frac{a_{ij}}{\hat{a}_j} = \frac{1}{\sum_k \hat{a}_k} \sum_j a_{ij} \tag{25}$$

となる．

以上より，$\tilde{p}_i, \bar{p}_i, \hat{p}_i \propto \sum_j a_{ij}$ となり，これら 3 つの方法から得られた総合評価値は一致することがわかる．

6．おわりに

本論文では，AHP の発展モデルである木下・中西によって提案された Dominant model の評価原則について述べた．

Dominant model の他に AHP における他の 2 つのモデルとして Belton & Gear model，Referenced model を取り上げ，その計算法と数値例を示し，さらに 3 つのモデルの構造を構築し，いずれのモデルも同一の結果が導かれることを示した．

参考文献

1) 木下栄蔵，中西昌武：“ AHP における新しい視点の提案 ”，土木学会論文集，No．569/IV-36，pp.1-8，1997.

2) E.Kinoshita,M.Nakanishi: “Proposal of New AHP model in light of Dominant relationship among Alternatives”, Journal of Operations Research Society of Japan,Vol.42,No2,pp.180-197,1999.

3) Valerie Belton, Tony Gear: “On a short-coming of Saaty’s Method of Analytic Hierarchies”, Omega, Vol.11, No.3, pp.228-230, 1982.

4) Thomas L Saaty, Luis G Vargas, “The Legitimacy of Rank Reversal”, Omega, Vol.12, No.5, pp.513-516, 1984.

5) Valerie Belton, Tony Gear: “The Legitimacy of Rank Reversal- A Comment”, Omega, Vol.13, No.3, pp.143-144, 1985.

6) Bertram Schoner, William C. Wedley: “Ambiguous Criteria Weights in AHP:Consequences and Solutions”, Decision Sciences Vol.20,pp.462-475,1989.

7) 木下栄蔵：「よくわかる AHP　孫子の兵法の戦略モデル」，オーム社，2006.

AHP**における支配代替案法の評価原則***

木下栄蔵**・田地宏一***・杉浦伸****

本稿では AHP の発展モデルである木下・中西によって提案された Dominant model の評価原則について述べる．さらに，Dominant model 以外の AHP における 2 つのモデルとして Belton & Gear model，Referenced model を取り上げ，その計算法と数値例を示し，さらに 3 つのモデルの数学的構造を構築していずれのモデルも同一の結果を導くことを示す．

Evaluation Principle of Dominant model on AHP *

By Eizo KINOSHITA** • Kouichi TAJI*** • Shin SUGIURA****

This paper shows Evaluation principle of Dominant AHP suggested by kinoshita Nakanishi. Furthermore, taking up other two models, Belton & Gear model, Referenced model, we show mathematical structure, numerical example of two methods and three models leads same result.