AHPにおける記述モデルと規範モデルの考え方*

A Paradigm of Descriptive Model and Normative Model on AHP*

木下栄蔵**

By Eizo KINOSHITA**

1．はじめに

本論文では AHP における記述モデルと規範モデルの考え方について述べる．

2．記述モデルと規範モデル

本章では AHP における記述モデルと規範モデルについて著者の考えを述べる．

AHP は，1971 年 T. L. Saaty により提唱された考え方で，不確定な状況や多様な評価基準を有する意思決定手法である．この手法は問題の分析において，主観的判断とシステムアプローチをうまくミックスした問題解決型意思決定手法の 1 つである．したがって，AHP を使って問題を解決するには，まず，問題の要素を，

最終目標・・・評価基準・・・代替案

の関係でとらえて，階層構造を作り上げる．そして，最終目標からみた評価基準間の一対比較を行い，その重要さの程度を求め，次に各評価基準からみた各代替案間の一対比較を行いその評価値をもとめる．その後，最終目標からみた各代替案の総合評価値を算出する．AHP は，この評価の過程で，総当り的な一対比較を行うことが特徴である．その結果，これまではモデル化したり定量化したりすることが難しかった問題を解決できるようになったのである．この総当り的な一対比較行列のことを著者は Tom's Matrix と呼んでいる．

ところで，著者は戦略的意思決定について次に示す公理として提案している．

戦略的意思決定における公理
戦略的意思決定が行われるには，「より崇高な戦略」と「より具体的な戦術」が共存し，かつこれらが有機的に結合していることが必要である．

上記に示した戦略的意思決定における公理が満たされるためには，次の 2 つの視点で意思決定問題を捉えなければならない．1 つは，

人々はどのように意思決定をしているのか？

であり，もう 1 つは

人々はどのように意思決定をすべきか？

である．前者を記述的アプローチと呼び，後者を規範的アプローチと呼ぶ．また記述的アプローチで作られているモデルを記述モデル（Descriptive Model）と呼び，規範的アプローチで作られているモデルを規範モデル（Normative Model）と呼ぶ．

ところで，記述モデル（Descriptive Model）では，現状の意思決定の様子を記述するのであるから，「真値」と「観測値」が存在する．「真値」を探し出すにはできるだけ「観測値」を「真値」に近づける努力をする．したがって，そこには一般的に「誤差モデル」（Error Model）が存在する．すなわち，「真値」と「観測値」の差を最小にする解を探し出すことになる．AHP における「Tom's Matrix」にあてはめるとその解は「幾何平均法」になることが証明されている（3 章参照）．

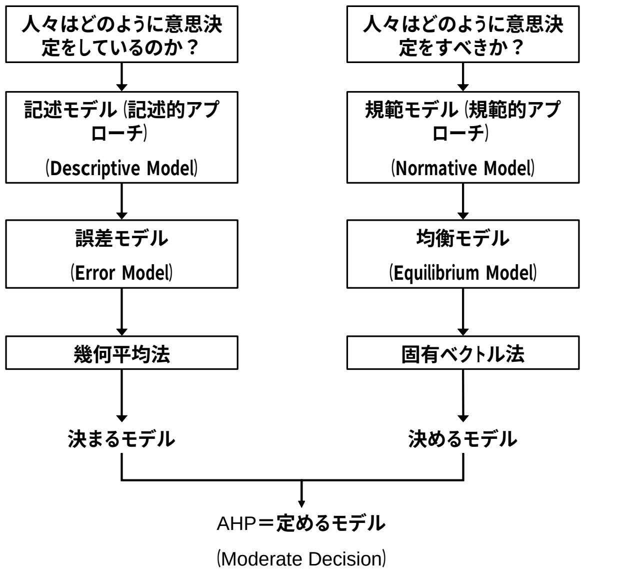
一方，規範モデル（Normative Model）では規範に基づいた意見（行動）が存在するのであるから，「真値」は存在しないのである．「真値」が存在する代わりに，人々の様々な規範に基づいた意見（行動）が存在する．したがって，それらの規範的意見（行動）の集約である均衡点（解）を見つける必要がある．すなわち，そこには一般的に「均衡モデル」（Equilibrium Model）が存在する．そして，より安定した均衡解を探し出すことになる．AHP における「Tom's Matrix」にあてはめるとその解は「固有ベクトル法」になることが証明されている（3 章参照）．

そこで前者の考え方（記述的アプローチ）を決まるモデル（Form Decision）と定義し，後者の考え方（規範的アプローチ）を決めるモデル（Make Decision）と定義する．ところで，AHP は「Tom's Matrix」により構成され，かつ「Tom's Matrix」には上記 2 つのアプローチを合わせ持つことがわかったのである．したがって，AHP は決まるモデル（Form Decision）と決めるモデル（Make Decision）を合わせ持つモデルである定めるもモデル

*キーワーズ：AHP，記述モデル，規範モデル

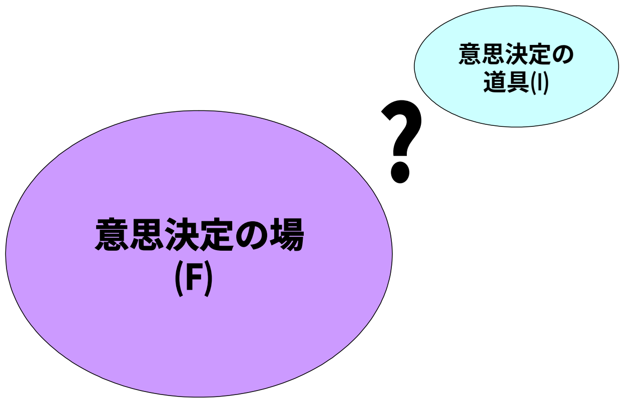
**正員，工博，名城大学都市情報学部都市情報学科
（E-mail:kinoshit@urban.meijo-u.ac.jp）

（Moderate Decision）と定義する（図 - 1 参照）．



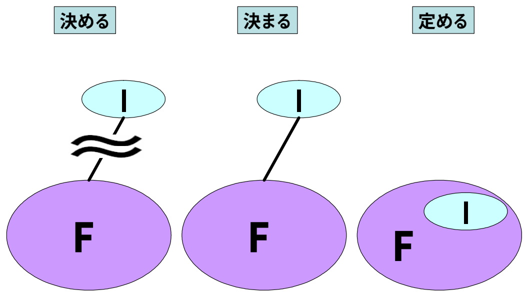
図－１　決まるモデル，決めるモデル，定めるモデル

ところで，次に，決まる（Form Decision），決まる（Make Decision），定める（Moderate Decision）のコンセプトを説明するために，決め方の概念を次のように提案する（図―2 参照）．



図－２　意思決定の概念

すなわち，意思決定は，意思決定の場（F）と意思決定の道具（I）により成り立っている．そして，場（F）の構成員は複数でも良いのである．また道具（I）は，人間である必要はなく，占い，数学的手法，コンピュータシステム，神でも良いのである．ところで，木下[2]は，『孫子の兵法の数学モデル』（講談社ブルーバックス）で，「決める」「決まる」「定める」という 3 つの決め方の概念を提唱した．まず，「決める」は意思決定における独立した価値基準の必要性を説き，「決まる」は意思決定おける合意形成の連続性の必要性を説いている．そして，「定める」は意思決定における独立性と連続性を合わせ持った概念であると説いている（図―3 参照）



図－３　決める，決まる，定める

またそれらの特性（意思決定における特性）は，表―1 にまとめる．

表－１　意思決定における特性

	意思決定の場（F）と意思決定の道具（I）が独立（○）か従属（×）か	意思決定の場（F）と意思決定の道具（I）が連続（○）か不連続（×）か	モデル
決める	○	×	規範モデル（Normative model）
決まる	×	○	記述モデル（Descriptive Model）
定める	○	○	定めるモデル（Moderate Model）

この表において定めるモデルは『意思決定の場と意思決定の道具が独立であり，かつ連続である』ことがわかる．

すなわち，意思決定に必用な特性は，
『意思決定の場と意思決定の道具の間の独立性と連続性が共存することが重要なのである』
と示すことができる．

すなわち，T. L. Saaty が提唱した AHP は「Tom's Matrix（一対比較行列）」で構成され，その解釈において，記述モデル（Descriptive Model）の側面と規範モデル（Normative Model）の側面が共存するモデルであることがわかる．

３．AHP における一対比較行列の解釈

本章では AHP における一対比較行列（Ton's Matrix）の解釈について説明する．さて，一対比較行列からのウェイト導出には，
(1) 古典的解釈
(2) 誤差モデル
(3) 均衡モデル

の 3 種類が存在する．そこで，ここでは，与えられた一対比較行列 $A=[a_{ij}]$から，各評価項目の重要度$w_1,\cdots,w_n$を推定する方法として下記の 3 種類のモデル（解釈）について説明する．

⑴ 古典的解釈

まず，古典的解釈について説明する．ここで，w_1，w_2，･･･，w_nが既知のとき$A=[a_{ij}]$は次のようになる．

$$A=\left[a_{ij}\right]=\begin{bmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \dots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \dots & w_n/w_n \end{bmatrix} \qquad (1)$$

ただし，$a_{ij}=w_i/w_j$，$a_{ji}=1/a_{ij}$，$W=\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$，$i$，$j$=1，2，…$n$である．

この場合すべての i，j，k について $a_{ij}\times a_{jk}=a_{ik}$が成立する．このことは，意思決定者の判断が完全に首尾一貫していることを示している．ここで，この一対比較行列 A に重み列ベクトルWを掛けると，ベクトル n・Wが得られる．すなわち，

$$A\cdot W=n\cdot W \qquad ⑵$$

となる．そして，この式は固有値問題

$$(A-n\cdot I)\cdot W=0 \qquad ⑶$$

に変形できる．ただしIは単位行列を意味する．

ここで$W\neq 0$が成り立つためには，n が A の固有値にならなければならない．このときWはAの固有ベクトルとなる．さらに，理論的にはAの階数は 1 であるから固有値λ_i（i=1，2，･･･，n）は 1 つだけが非零で他は零となる．また，A の主対角要素の和は n であるから，ただ 1 つ零でないλ_iをλ_{max}とすると，λ_i=0，$\lambda_{max}=n$，$\lambda\neq\lambda_{max}$となる．

したがって，ベクトル W は A の最大固有値λ_{max}に対する正規化とした固有ベクトルとなる．すなわち，一対比較行列Aに誤差がなければ，行列Aの主固有ベクトルは正しい重要度を与えることを示している．

⑵ 誤差モデル

ところで，実際の人間の意思決定には誤差が含まれることが多い．つまり，一対比較行列には誤差が存在するので，その誤差を最小にする値を一対比較行列のウェイトに採用するというのが誤差モデルである．すなわち，多少の誤差を許容し，重要度の近似値を与えるという考え方である．そこで，一対比較値a_{ij}は本来あるべき真値であるw_i/w_jに正の誤差e_{ij}を乗じたものとして

$$a_{ij}=\frac{w_i}{w_j}e_{ij} \qquad (4)$$

と表現できる．簡単のため対数を数式の上部にドットで表現し，(4)式の両辺の対数をとると，

$$\dot{a}_{ij}=\dot{w}_i-\dot{w}_j+\dot{e}_{ij} \qquad (5)$$

となる．ここで，誤差項の対数e_{ij}の二乗和を最小にするようなw_iを推定値しようとするのが誤差モデルである．この方法は対数最小二乗法（logarithmic least square method）と呼ばれ，重要度w_iは以下の最適化問題の解として与えられる．

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i,j=1}^{n}\left(\dot{a}_{ij}-\dot{w}_i+\dot{w}_j\right)^2 \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{n}\dot{w}_i=0 \end{aligned} \qquad (6)$$

（6）の解を求め，対数を元に戻すと行列Aの各行の幾何平均，

$$w_i=\left(\prod_{j=1}^{n}a_{ij}\right)^{1/n} \qquad (7)$$

となる．したがって，幾何平均法は，対数最小二乗法となる．

(3) 均衡モデル

さて最後に，均衡モデルについて説明する．まず，与えられた一対比較行列から，固有ベクトル法により，重要度を求めることの数学的な背景は以下の定理 1 のペロン・フロベニウスの定理にある．

定理１ すべての要素が正であるような正方行列Aは，次の性質を持つ固有値$\lambda_{\max}$を持つ．

(1) $\lambda_{\max}>0$であり，$\lambda_{\max}$は固有方程式の単根．

(2) $\lambda_{\max}$に対応する，正の固有ベクトルが存在する．また，非負の固有ベクトルと持つ固有値は$\lambda_{\max}$のみである．

(3) $\lambda_{\max}$以外のAの固有値の絶対値は$\lambda_{\max}$よりも小さ

い．

さて，n 個の項目からなる一対比較行列 $A=[a_{ij}]$の第 i, j 要素 a_{ij} は，項目 j を基準として項目 i を評価した比と読み取れますから，$a_{ij}w_j$ は項目 j が自分自身を w_j と評価したときの項目 i の評価値とみなすことができる．これを項目 i の j からの「外部評価」と呼ぶ．項目 i は自分以外の $n-1$ 個の外部評価を受けるから，その平均値が自己評価値 w_i に一致するように w_i を決めればよいのである．

自己評価値と外部評価の平均値の食い違いを比尺度で表現し，その比のばらつきを最小化するように w_i を決める，ということを考えると，以下のような 2 つのばらつき最小化問題が得られる．

$$\begin{aligned}&\min \quad \max_{i=1,\cdots,n} \frac{\sum_{j\neq i} a_{ij}w_j}{(n-1)w_i} \\ &\text{s.t.} \quad w_i>0 \quad i=1,\cdots,n\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}&\max \quad \min_{i=1,\cdots,n} \frac{\sum_{j\neq i} a_{ij}w_j}{(n-1)w_i} \\ &\text{s.t.} \quad w_i>0 \quad i=1,\cdots,n\end{aligned} \tag{9}$$

さて，この二種類の問題ですが，実はこれらの最適解は一致し，さらに，その最適解 w_i が行列 A の主固有ベクトルになることが示されている．このことは，下の定理 2 におけるフロベニウスの Min-Max 定理により証明されている．定理 2 の中で，一対比較行列 $A=[a_{ij}]$の第 i 行を，行ベクトル A_i とする．

定理 2　一対比較行列 $A=[a_{ij}]$の最大固有値を $\lambda_{\max}$ とする．このとき，任意の正ベクトル $w>0$ に対し，以下の不等式が成り立つ．

$$\min\left(\frac{A_1 w}{w_1},\cdots,\frac{A_n w}{w_n}\right) \le \lambda_{\max} \le \max\left(\frac{A_1 w}{w_1},\cdots,\frac{A_n w}{w_n}\right) \tag{10}$$

とくに，A の主固有ベクトル w^* に対しては，等号で成立，すなわち，

$$\min\left(\frac{A_1 w^*}{w_1^*},\cdots,\frac{A_n w^*}{w_n^*}\right) = \lambda_{\max} = \max\left(\frac{A_1 w^*}{w_1^*},\cdots,\frac{A_n w^*}{w_n^*}\right) \tag{11}$$

が成立する．

以上のように，AHP の均衡モデルはばらつき最小化問題として定式化され，外部評価と自己評価のずれを少なくし，全体の均衡をはかるような評価値を求めることになっている．

さて，一対比較行列の解釈について 3 種類のモデルを説明したが，いずれの方法を用いても 3 行 3 列までの一対比較行列については同一のウェイトが導出される．例えば，一対比較行列

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 8\\ 1/4 & 1 & 3\\ 1/8 & 1/3 & 1\end{bmatrix} \tag{12}$$

はどのモデルを用いてもそのウェイトは

$$W^T=(0.726,0.208,0.0067) \tag{13}$$

と導出されるのである．

参考文献

1) 木下栄蔵：「よくわかる AHP　孫子の兵法の戦略モデル」，オーム社，2006.
2) 木下栄蔵：「孫子の兵法の数学モデル」，講談社ブルーバックス，1998.

AHPにおける記述モデルと規範モデルの考え方*

木下栄蔵**

本論文では AHP における記述モデルと規範モデルの考え方を述べている．さらに両モデルの数学的解釈を記述している．

A Paradigm of Descriptive Model and Normative Model on AHP*

By Eizo KINOSHITA**

This paper explains descriptive model and normative model and show mathematical structure of two models.