ゲーム論的均衡モデルの構造推定に関する基礎的研究 - 混雑緩和政策評価を念頭に - *

Structural Estimation of the Game Theory-based Equilibrium Model
with Empirical Focus on the Congestion Policy Evaluation for Urban Transport*

柳沼秀樹**・福田大輔***
By Hideki YAGINUMA**・Daisuke FUKUDA***

1．はじめに

鉄道や道路網における交通混雑により，利用者が被る時間損失や精神的・肉体的な苦痛は計り知れない．政府や関係機関は混雑問題を是正すべく，輸送力増強といった供給サイドの施策を主に実行してきた．近年では，混雑料金制度といった需要サイドの施策が調査・検討されている．このような混雑緩和を目的とした政策の効果を事前に定量把握することは，政策評価や介入強度の決定等の意思決定に大いに有効である．そのため，理論的フレームに立脚した定量的な混雑政策評価手法の構築は必要不可欠である．

混雑現象の分析においては，個々の意思決定主体を取り巻く他者の影響が主体間に働くこと念頭に置く必要がある．福田ら[1)]が指摘したように，社会的相互作用が有意に作用している交通現象は幾つも見られる．相互作用が存在する状況下において，何らかの政策を実施した場合，その効果は相互作用の影響により左右される．つまり，大規模な政策介入にも関わらず変化が認められないケースや，逆に微小な介入が劇的な変化をもたらすケースなどがあるため，政策検討には十分に留意する必要がある．交通混雑現象においても，利用者間の相互作用を念頭においた均衡モデルの構築が必要である．

一般的に，相互作用を考慮した均衡モデルのパラメータは推定が困難であり，他のモデルから転用するケースや，分析者の経験的に与えられるケースが殆どである．これらは，推定がモデルから直接的に行われないため，本来モデルから推定されるべきパラメータと異なる値を用いており，誤った政策的判断を行う可能性を孕んでいる．モデル構築もさることながら，適切な推定手法で統計学的な優位性を確保することで，現象の再現性および将来予測の信頼性を担保する必要がある．

以上の点を踏まえ，本研究では，混雑緩和政策評価を念頭に置いた相互作用モデルおよび，その推定手法について検討することを目的とする．具体的には，ゲーム理論をベースとして交通混雑を表現したモデルを検討する．また，推定手法として，データに基づいて均衡モデルのパラメータ推定を行う構造推定アプローチの検討を行う．この試みにより，従来手法より精緻な混雑緩和政策評価が可能となり，政策評価の新たなツールが提供できるようになると期待される．

2．既往研究のレビュー

土木計画学において，交通ネットワーク上での行動および混雑現象をゲーム論的均衡モデルの枠組みで構築したモデルは少ない．小林[2)] は，不完備情報下におけるベイズナッシュ均衡から合理的期待均衡に基づくモデルを構築している．Zhou et al.[3)]は，ネットワーク上における混雑政策を上位問題とし利用者の行動を下位問題とした，Stackelbergゲームとして定式化を行っている．Yang et al.[4)]は，利用者が利用者均衡，システム最適，クールノーナッシュ均衡の異なる均衡概念を混合した配分手法を提案している．これらは，政策決定者と利用者の2者間に着目した定式化であり，個人の行動に対して，明確に個人間の相互作用を導入したものではない．また，利用者均衡配分モデルや，それに基づく拡張モデル[5)]は，Charnes and Cooper[6)]によりN人ゲームにおけるNash均衡との等価性が古くに証明されている．しかし，個人が経路をこれ以上変更することができないという意味での等価性であり，個人間の相互作用を念頭においたモデルであることを肯定するものではない．

これらの既往研究は，理論的な定式化が行われ非常に有意義な示唆を与えている．しかし，マクロな主体間での定式化であり，混雑現象をミクロな個人間における相互作用として表現するものではない．また，モデルのパラメータについても，他モデルからの転用や，経験的値を用いた設定がほとんどである．ゲーム論的なモデルの統計的推測に関しては，喜多ら[7)]がNash均衡に基づく利得推定モデルの構築を行っているが，モデル構造が複雑であるため，プレイヤーおよび戦略を拡張した場合に推

*キーワーズ：混雑緩和政策評価，ゲーム理論，構造推定
**学生員，修(工)，東京工業大学大学院理工学研究科
（東京都目黒区大岡山2-12-1 M1-11，TEL03-5734-2577,
E-mail: yaginuma@plan.cv.titech.ac.jp）
***正員，博(工)，東京工業大学大学院理工学研究科
（E-mail: fukuda@plan.cv.titech.ac.jp）

定が困難となる可能性がある．

一方，近年のミクロ計量経済学においては，企業の参入・退出モデルやインタラクションモデルなどがゲーム論的均衡モデルにより構築され，構造推定アプローチによる実証分析が行われている．交通現象を対象とした既往研究として，Ciliberto and Tamer[8)]やAguirregabiria and Ho[9)]による航空市場構造のモデル，Viauroux[10)]による都市交通均衡モデルが挙げられる．特にViaurouxの研究は，筆者の知る限り，交通混雑を対象としたゲーム論的均衡モデルの未知パラメータを，構造推定に基づいて同定している唯一の論文である．

本研究では，Viaurouxモデルが有益であることを認めつつ，問題点として，①交通工学的視点の欠如，②パラメータ推定手法が不明確，の2点を指摘する．①は，OD間における所要時間は，混雑や交通ネットワーク構造により変化するが，その点が考慮されていない点を指す．次に②は，モデルが構造推定により行われたと明記されているが，具体的な推定手法までは明示されていない点を指す．本研究では特に，②の問題点を重要であると考える．以降，Viaurouxモデルの詳細を説明した上で，擬似最尤法に基づく構造推定手法の検討を行う．

３．混雑緩和政策を念頭においたゲーム論的均衡モデル（Viaurouxモデルの概略）

(1)　効用関数の構築

以下では，都市交通における自家用車（自動車）と公共交通（バス）の二肢交通手段選択というシンプルな状況を考える．表記はViauroux[10)]に基本的に従う．

各個人$i \in I$は，混雑に対して異なる認知を形成すると仮定し，それぞれ認知のタイプ$\theta_i \in \Theta$を持つとする．なお，自身以外の他者が持つ認知のタイプは未知とし，すべての個人が持つタイプをθとする．

次に各個人の期間内におけるトリップ量q_iは，自動車とバスの二つ交通機関用いたトリップ量q_i^cおよびq_i^bにより構成される．すべての個人が取ったトリップqと，タイプθ，および個人iの合成財消費量v_iとすると，個人iの効用関数は式(1)のように表される．

$$
\begin{aligned}
u_i(q,\theta,v_i) &= \alpha q_i^c[1+\psi_i^c + \ln\theta_i - \ln s_{-i} - \ln q_i^c] \\
&+(1-\alpha)q_i^b[1+\psi_i^b + \ln\theta_i - \ln s_{-i} - \ln q_i^b] \\
&+hv_i
\end{aligned}
\tag{1}
$$

第一項は車の効用を表しており，うちψ_i^cは自動車に対する快適性を示していると考える．同様に第二項はバスの効用を表し，第三項は2つの交通機関以外の合成財の効用を表している．αとhは自動車と所得の限界効用で，個人間で同質なパラメータである．またs_{-i}は，個人i以外の他者による外部性を表す変数で，具体的には式(2)で表される．

$$
s_{-i} = \frac{1}{I-1}\sum_{j\in I-i}\int_{\theta_j\in\Theta} q_j^c(\theta_j)dF_j(\theta_j) \tag{2}
$$

これは他者のタイプ分布に依存した自動車トリップ数の期待値の形となっており，これによって混雑の程度を表す変数となっている．

次に，式(1)の効用関数に対して，式(3)に示す予算制約式を導入する．

$$
(a_i^c + p_i^c q_i^c) + (a_i^b + p_i^b q_i^b) + p_v v_i \le w_i \tag{3}
$$

左辺の自動車とバスの交通費用および合成財の費用の和が，右辺の個人iの所得w_iを超えないとする設定である．ここでa_i^c, a_i^bは各交通手段の固定費用，p_i^c, p_i^c, p_vは各交通手段並びに合成材の1単位あたり費用を表す．p_vを1とし，さらにv_iが非負であることを仮定した上で式(1)の第三項v_iに代入すると，式(4)に示す効用関数を得ることができる．

$$
\begin{aligned}
u_i(q,\theta) &= \alpha q_i^c[1+\psi_i^c + \ln\theta_i - \ln s_{-i} - \ln q_i^c] \\
&+(1-\alpha)q_i^b[1+\psi_i^b + \ln\theta_i - \ln s_{-i} - \ln q_i^b] \\
&+h(w_i - a_i^c - p_i^c q_i^c - a_i^b - p_i^b q_i^b)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

以上より，式(2)の他者の行動結果（に対する認知）に起因する交通混雑の外部性，並びに，式(3)の個人の予算制約を導入した効用関数が定式化された．

(2)　ベイズナッシュ均衡による基本モデルの導出

ゲーム理論において，各個人が共有知識に対して何らかの情報が欠如している場合，各個人が情報に対してタイプθ_i持つとした情報不完備ゲームの枠組みで分析することが可能となる．混合戦略プロフィールを式(5)とする．

$$
\sigma = (\sigma_i(q_i \mid \theta_i)) \tag{5}
$$

すると，ベイズナッシュ均衡に基づく各交通機関の期待トリップ量は，式(6)のように表すことができる．

$$
q_i^*(\theta_i) = \sum_{q_i} q_i \sigma_i(q_i \mid \theta_i) \tag{6}
$$

式(6)の一階の条件を解くことにより，情報不完備状態における各個人の自動車とバスの各最適トリップ量を式(7)のように導出することができる．なお，混雑の外部性を表すs^*には，他者に対する私的な情報信念μが導入されており，値が大きいほど個人が認知する混雑の外部性は増加する．

$$
\begin{aligned}
&q_i^{c*}(\theta_i) = \frac{\theta_i}{s^*}e^{\psi_i^c - \frac{hp_i^c}{\alpha}},\quad q_i^{b*}(\theta_i) = \frac{\theta_i}{s^*}e^{\psi_i^b - \frac{hp_i^b}{(1-\alpha)}} \\
&s^* = \left(\frac{1}{(1+\mu)I}\sum_{j\in I} e^{\psi_j^c - \frac{hp_j^c}{\alpha}}\right)^{0.5}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

式(7)を計算可能とするため，式(4)の直接効用関数より導かれる間接効用関数を定式化することにより，最終的に式(8)を得ることができる．

$$V_i(w_i - a_i^c - a_i^b, p_i^c, p_i^b, \theta) = h(w_i - a_i^c - a_i^b) + \left(\alpha\theta_i e^{\psi_i^c - \frac{hp_i^c}{\alpha}} + (1-\alpha)\theta_i e^{\psi_i^b - \frac{hp_i^b}{(1-\alpha)}} \right) \times \left(\frac{1}{(1+\mu)I} \sum_{j\in I} e^{\psi_j^c - \frac{hp_j^c}{\alpha}} \right)^{-0.5} \tag{8}$$

なお，個人が他者のタイプを既知とする情報完備ゲームとして定式化することも可能であり，その場合，s^*を式(9)のように書き替える必要がある．

$$s^* = \left(\frac{1}{I} \sum_{j\in I} \theta_j e^{\psi_j^c - \frac{hp_j^c}{\alpha}} \right)^{0.5} \tag{9}$$

以上が基本モデルである．推定を行う際には，さらに具体的な事象（交通状況）を想定する必要がある．Viaurouxは，後に示す4つのケースを想定し，ピークとオフピークに分け，情報完備と不完備の両モデルで個人毎にパラメータの推定を行っている．しかしながら，先に指摘したように，構造推定に用いたアルゴリズムは不明なままとなっている．

４．構造推定による均衡モデルの推定

(1)　構造推定の概要

ゲーム論的均衡モデルのパラメータ推定手法として，構造推定アプローチによる研究が近年活発に行われている[11]．均衡を考慮した計量経済モデルでは，ある均衡状態に基づき定式化した構造型モデルを出発点として，誘導型の定式化を行ってパラメータを推定することが一般的である．しかし，ほとんどのケースでは，推定したパラメータに識別問題が生じ，本来の構造型のパラメータを特定することが出来ない．このことは，本来の定式化された理論モデルに立脚したパラメータが推定されていないことを意味している．

このような問題に対し，構造推定は直接的に構造型モデルを推定する手法であり[11]，モデルによる政策評価をより厳密に行うことを可能とする．現在，構造推定を用いた分析は，静的な均衡モデルをはじめ，パネルデータに基づく動的均衡モデルに関しても，計算技術の発展により可能となっている．

(2)　ゲーム論的均衡モデルの構造推定手法

ゲーム論的均衡モデルにおいて，意思決定者がある戦略を選択する確率は，他者の戦略の選択確率に規定されているのが通常である．これは，ゲーム理論における均衡概念が他者の選択を想定した上で，自身が選択を行うことを前提としているためである．これより，パラメータ推定において，通常の最尤法を用いることは困難となる．この問題に対し，近年，Aguirregabiria[12]が擬似最尤推定法に基づく推定法を提案しており，参入ゲームを例として，Nash 均衡に基づいた構造モデルを構築し，パラメータの推定を行っている．本研究でも，導出したモデルに関して，擬似最尤推定法を用いたパラメータの構造推定を試みる．本研究では，ベイズナッシュ均衡に基づく定式化を考慮し，一部の手順を修正した推定手法を提案する．以下に，具体的な推定手順を示す．

式(8)の間接効用関数を具体的な問題に対応させて再定式化する．個人が期間内における自動車とバスのトリップ量を決定することを想定する．この時，選択肢として，Case1:トリップを行わない，Case2:自動車のみを用いて行う，Case3:バスのみを用いて行う，Case4:自動車とバスを組み合わせて行う，という 4 つの状況を想定する．バスが j 路線存在することすれば，各選択肢における間接効用関数は以下のような形で表される．

$$\begin{aligned} V_i(\theta) &= hw_i \\ V_i^c(\theta) &= \alpha \frac{\theta_i}{s_{-i}^*} e^{\psi_i^c - \frac{hp_i^c}{\alpha}} + h(w_i - a_i^c) \\ V_i^{b_j}(\theta) &= (1-\alpha) \frac{\theta_i}{s_{-i}^*} e^{\psi_i^{b_j} - \frac{hp_i^{b_j}}{(1-\alpha)}} + h(w_i - a_i^{b_j}) \\ V_i^{cb_j}(\theta) &= \alpha \frac{\theta_i}{s_{-i}^*} e^{\psi_i^c - \frac{hp_i^c}{\alpha}} + (1-\alpha) \frac{\theta_i}{s_{-i}^*} e^{\psi_i^{b_j} - \frac{hp_i^{b_j}}{(1-\alpha)}} \\ &\quad + h(w_i - a_i^c - a_i^{b_j}) \end{aligned} \tag{10}$$

間接効用関数が独立かつ同一のガンベル分布に従う誤差項を持つと仮定すると，式(11)に示すようなロジット型の選択確率式を導くことができる．

$$\begin{aligned} &Case1: P(Q_i^c = 0, Q_i^b = 0) = e^{V_i} / S \\ &Case2: P(Q_i^c \geq 1, Q_i^b = 0) = e^{V_i^c} / S \\ &Case3: P(Q_i^c = 0, Q_i^b \geq 1) = e^{V_i^{bj}} / S \\ &Case4: P(Q_i^c \geq 1, Q_i^b \geq 1) = e^{V_i^{cbj}} / S \\ &\qquad S \equiv e^{V_i} + e^{V_i^c} + \sum_{j=1}^{J} (e^{V_i^{bj}} + e^{V_i^{cbj}}) \end{aligned} \tag{11}$$

ただし，Case2 において自動車トリップを 1 回以上行う確率を知るは可能であるが，具体的な利用回数を知ることができない．これは，Case3，Case4 についても同様である．そこで，自動車およびバスの利用回数をそれぞれk，nとする．各利用回数を選択確率式で表すことも可能であるが，モデル構造が複雑化し推定が困難になることが想定される．そこで，利用回数がポアソン分布に従うと仮定すると，式(12)に示す利用回数の確率式を導出することができる．

$$P(Q_i^c = k, Q_i^b = 0 \mid Case2) = \frac{\exp(-q_i^{c*})(q_i^{c*})^k}{k!(1-\exp(-q_i^{c*})}$$

$$P(Q_i^c = 0, Q_i^b = n \mid Case3) = \frac{\exp(-q_i^{b*})(q_i^{b*})^n}{n!(1-\exp(-q_i^{b*})} \qquad (12)$$

$$P(Q_i^c = k, Q_i^b = n \mid Case4) = \frac{\exp(-q_i^{c*})\exp(-q_i^{b*})(q_i^{c*})^k (q_i^{b*})^n}{k!n!(1-\exp(-q_i^{c*})(1-\exp(-q_i^{b*})}$$

構造パラメータの推定を行うにあたり，式(11)および式(12)を用いて尤度関数の構築を行う．具体的には，個人の各ケースについて式(11)と式(12)の積を用いて尤度関数式(13)のように表すことができる．以上までの定式化が Viauroux によるものである．なお，ベイズナッシュ均衡に基づく導出であるため，各個人はタイプを持っており，選択確率式が Closed-form で表現できない（すなわち，パラメータ推定においてシミュレーション積分等の適用が必要である）ことに留意する必要がある．

$$L = \prod_{i=1}^{N} l_i \qquad (13)$$

$$l_i = \int_{\Theta_i} \frac{e^{V_i}}{S} dF(\theta_i)$$

$$l_{ik}^c = \int_{\Theta_i} \frac{\exp(-q_i^{c*})(q_i^{c*})^k}{k!(1-\exp(-q_i^{c*})} \cdot \frac{e^{V_i^c}}{S} dF(\theta_i)$$

$$l_{in}^{bj} = \int_{\Theta_i} \frac{\exp(-q_i^{b*})(q_i^{b*})^n}{n!(1-\exp(-q_i^{b*})} \cdot \frac{e^{V_i^{bj}}}{S} dF(\theta_i)$$

$$l_{in}^{cbj} = \int_{\Theta_i} \frac{\exp(-q_i^{c*})\exp(-q_i^{b*})(q_i^{c*})^k (q_i^{b*})^n}{k!n!(1-\exp(-q_i^{c*})(1-\exp(-q_i^{b*})} \cdot \frac{e^{V_i^{cbj}}}{S} dF(\theta_i)$$

推定に際して，ψ_i^c および ψ_i^b を OD 間の距離や所要時間といった各交通機関を特徴づける変数ベクトル $\mathbf{x}_i$ とパラメータベクトル $\boldsymbol{\beta}_i$ の積によって特定化する．結果，推定する構造パラメータは α, h, μ および $\boldsymbol{\beta}_i$ となる．これらをまとめて $\boldsymbol{\Xi}_i$ とし，全個人の構造パラメータベクトルを $\boldsymbol{\Xi}$ としよう．尤度関数内に，他者の構造パラメータに依存した s^* が存在するため通常の最尤推定法を用いることができない．そこで，s^* に対して適当な値を与えることで擬似な尤度関数を構築し，パラメータ推定を行う擬似最尤推定法を用いる[12]．具体的な推定手順を以下に示す．

①s^* に対して，観測交通量等のような集計データに基づいて算出される期待値を求め，これを初期値として与える．

②尤度関数(式(13))を，個人毎シミュレーション積分等を用いて最大化することで $\boldsymbol{\Xi}_i$ を得ることができる．これを全個人に対して行い $\boldsymbol{\Xi}$ を求める．

③$\boldsymbol{\Xi}$ を用いて，式(7)から個人毎に s^* を求める．

④②，③を繰り返すことで $\boldsymbol{\Xi}$ を更新し，収束が判定された時点で終了する．

本研究では，②においてモンテカルロ積分等のシミュレーション法を用いることで，ベイズナッシュ均衡を考慮した構造推定を行うことが可能となる．

５．今後の課題

本研究では，混雑緩和政策評価を念頭に，相互作用による影響を導入できるゲーム論的均衡モデルと構造推定アプローチによる構造パラメータ推定手法について，Viauroux[10]のモデルを例として検討を行った．特に，パラメータの構造推定に関して疑似最尤法を用いた推定手順を新たに提示した．データを用いた推定結果に関しては，発表時までに準備したい．なお，もう一つの問題点として指摘した，交通工学的視点からの定式化に関しても，引き続き検討を行いたいと考えている．

参考文献

1) 福田大輔, 上野博義, 森地茂: 社会的相互作用存在下での交通行動とミクロ計量分析, 土木学会論文集, No.765/IV-64, pp.49-64, 2004.
2) 小林潔司: 不完備情報下における交通均衡に関する研究, 土木計画学研究・論文集, No.8, pp.81-88, 1990.
3) Zhou, J., Lam, W.H.K. and Heydecker, B.G.:: The Generalized Nash Equilibrium Model for Oligopolistic Transit Market with Elastic Demand, *Transportation Research Part B*, Vol.39, pp.519-544, 2005.
4) Yang, H., Zhang, X. and Meng, Q.: Stackelberg Games and Multiple Equilibrium Behaviors on Networks, *Transportation Research Part B*, Vol.41, pp.481-861, 2007.
5) 例えば，土木学会(編): 交通ネットワークの均衡分析－最新の理論と解法－，土木学会，1998.
6) Charnes, A. and Cooper, W. W.: External Principles for Simulating Traffic Flow in a Network，*Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, Vol.44, pp.201-204, 1958.
7) 喜多秀行, 谷本圭志, 福山敬：ゲーム的状況下におけるプレイヤーの利得推定モデル，土木学会論文集，No.737/IV-60, pp.147-157，2003.
8) Ciliberto, F. and Tamer, E.T.: Market Structure and Multiple Equilibria in Airline Markets, *SSRN Working Paper*, No. 605723, http://ssrn.com/abstract=605723, 2006.
9) Aguirregabiria, V. and Ho, C.Y.: A Dynamic Oligopoly Game of the US Airline Industry: Estimation and Policy Experiments, *Journal of Econometrics* (under review).
10) Viauroux，C.：Structural Estimation of Congestion Costs, *European Economic Review*，Vol.51, pp.1-25，2007.
11) 例えば, 今村晋, 有村俊秀, 片山東: 労働政策の評価:「構造推定アプローチ」と「実験的アプローチ」，日本労働研究雑誌，Vol.43, pp.14-21, 2001.
12) Aguirregabiria. V.: Pseudo Maximum Likelihood Estimation of Structural Models Involving Fixed-point Problems, *Economics Letters*, Vol.84, pp.335-340, 2004.