連続平面上の都市形成*

ー von Thünenn, Beckmann, Puuの統合 ー

Formation of Urban Configuration over a Two Dimensional Continuous Space*
- von Thünenn, Beckmann, and Puu Unified -

宮田　譲**
By Yuzuru MIYATA**

１．はじめに

Beckmann[1] は世界に先立ち，２次元連続空間の概念を経済学に導入した。この先駆的な研究はそれほどの拡がりを見せなかったが，Beckmann and Puu[2] により連続空間経済学の体系的な取り扱いが発表された。彼らのアプローチは偏微分方程式を用いるものであったが，Beckmann[1]によって導入されたgradient lawの精神は脈々と引き継がれている。Beckmann and Puu[2]を引き継ぎ，Puu[3]自身によっても連続空間経済学は発展させられている。この研究での特徴は多くのコンピュータシミュレーションを用い，理論的結果をビジュアル化していることにある。

Beckmann and Puu[2]は２次元連続空間上での都市形成の研究を意図したものであるが，物流を明示的に捉えていることに特徴がある。しかしながら家計や企業の立地についての考察は必ずしも満足できるものではなく，新都市経済学的考察も必要とされよう。

本研究では家計と企業の付け値地代関数[4]を導入し，偏微分方程式論を用いたより体系的な考察を行う。特に本研究で用いるFourier積分作用素[5]は，経済学に初めて導入される概念である。

２．経済主体の行動

（１）本研究の主要前提条件

a)連続平面上での都市を仮定する。都市はコンパクトで必要回数微分可能な単純閉曲線で囲まれている。都市内の土地条件は同質である。

b)都市には N 人の家計と M の企業が存在している。これらの数は十分に大きいものとする。家計，企業はそれぞれ同質とする。

c)都市内の土地は不在地主によって所有されている。都市には唯一の地方政府があり，地方政府は都市内の土地を不在地主から借りている。地方政府は家計，企業から市場で決まる土地レントを受け取り，それを家計に均等に再分配する。

d)後に述べるように，企業の立地ポテンシャル関数は十分に大きい，もしくは家計，企業の交通費用は十分に小さいものとする。この場合，都市の形状は von Thünen 環となる。

*キーワーズ：土地利用，住宅立地，地価分析，計画手法論
**正員、学博，豊橋技術科学大学人文・社会工学系
（豊橋市天伯町雲雀ヶ丘１－１，TEL 0532-44-6955,
FAX 0532-44-6947, e-mail: miyata@hse.tut.ac.jp）

（２）企業行動

地点$\boldsymbol{x}$ = (x_1, x_2)での企業の生産関数はCobb-Douglas 型とする。また集積の経済を考え，それを式(1)の立地ポテンシャル関数[6]で表現する。

$$\Omega(\boldsymbol{x}) \equiv \iint_A b(\boldsymbol{y}) \exp(-\omega \| \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} \|) dy_1 dy_2 \tag{1}$$

ここで，A：都市域，$b(\boldsymbol{y})$：地点 $\boldsymbol{y}$ での企業密度，ω：パラメータ，$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$：地点$\boldsymbol{x}$と地点$\boldsymbol{y}$との距離

地点$\boldsymbol{x}$での企業の生産関数は式(2)で表される。

$$q(\boldsymbol{x}) = \Omega(\boldsymbol{x}) q_A k_d(\boldsymbol{x})^{\alpha_k} l_d(\boldsymbol{x})^{\alpha_l} m_B{}^{\alpha_m} \tag{2}$$

ここで，$q(\boldsymbol{x})$：地点$\boldsymbol{x}$での生産量，$k_d(\boldsymbol{x})$：資本投入量，$l_d(\boldsymbol{x})$：労働投入量，m_B：土地投入量(固定的)，q_A, α_k, α_l, α_m：生産関数の技術パラメータ$(\alpha_k+\alpha_l+\alpha_m=1)$

財価格，資本収益率，賃金率が与えられたもとでの企業による付け値地代は式(3)となる。ここでは企業の参入・撤退の自由を考慮して，均衡利潤はゼロとする。

$$g_B(\boldsymbol{x}) \equiv max\left[\frac{p(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{x}) - r(\boldsymbol{x})k_d(\boldsymbol{x}) - w(\boldsymbol{x})l_d(\boldsymbol{x})}{m_B}\right] \tag{3}$$

subject to $\pi_B(\boldsymbol{x})=0$

ここで，$p(\boldsymbol{x})$：地点$\boldsymbol{x}$での財価格，$r(\boldsymbol{x})$：地点$\boldsymbol{x}$での資本収益率，$w(\boldsymbol{x})$：地点$\boldsymbol{x}$での賃金率，$g_B(\boldsymbol{x})$：地点$\boldsymbol{x}$での企業による付け値地代，$\pi_B(\boldsymbol{x})$：地点$\boldsymbol{x}$での企業利潤

この最適化問題を解くと，地点 $\boldsymbol{x}$ での企業による労働需要，資本需要，付け値地代関数が求まる。

$$k_d(\boldsymbol{x}) = (p(\boldsymbol{x})K(\boldsymbol{x})q_A)^{\frac{1}{\alpha_m}} \left[\frac{\alpha_k}{r(\boldsymbol{x})}\right] \left[\frac{\alpha_k}{r(\boldsymbol{x})}\right]^{\frac{\alpha_k}{\alpha_m}} \left[\frac{\alpha_l}{w(\boldsymbol{x})}\right]^{\frac{\alpha_l}{\alpha_m}} m_B \quad (4)$$

$$l_d(\boldsymbol{x}) = (p(\boldsymbol{x})K(\boldsymbol{x})q_A)^{\frac{1}{\alpha_m}} \left[\frac{\alpha_l}{w(\boldsymbol{x})}\right] \left[\frac{\alpha_k}{r(\boldsymbol{x})}\right]^{\frac{\alpha_k}{\alpha_m}} \left[\frac{\alpha_l}{w(\boldsymbol{x})}\right]^{\frac{\alpha_l}{\alpha_m}} m_B \quad (5)$$

$$g_B(\boldsymbol{x}) = (p(\boldsymbol{x})K(\boldsymbol{x})q_A)^{\frac{1}{\alpha_m}} \left[\frac{\alpha_k}{r(\boldsymbol{x})}\right]^{\frac{\alpha_k}{\alpha_m}} \left[\frac{\alpha_l}{w(\boldsymbol{x})}\right]^{\frac{\alpha_l}{\alpha_m}} \times \left\{ \left[\frac{\alpha_k}{r(\boldsymbol{x})}\right]^{\frac{\alpha_k}{\alpha_m}(2+\alpha_l)} \left[\frac{\alpha_l}{w(\boldsymbol{x})}\right]^{\frac{\alpha_l}{\alpha_m}(2+\alpha_k)} - \alpha_k - \alpha_l \right\} \quad (6)$$

（3）家計行動

地点$\boldsymbol{x}$における１家計の効用関数は以下で表される。

$$u(c(\boldsymbol{x}), m_H) \equiv c(\boldsymbol{x})^{\beta_c} m_H^{\beta_m} \quad (\beta_c + \beta_m = 1) \quad (7)$$

ここで，$c(\boldsymbol{x})$：地点$\boldsymbol{x}$における１家計の財消費量，m_H：地点$\boldsymbol{x}$における１家計の土地使用量(固定的)，β_c，β_m：分配パラメータ

各家計は所有する労働時間l_sと資本ストックk_sを価格に対して完全非弾力的に企業に提供する。そして所得$w(\boldsymbol{x})\,l_s + r(\boldsymbol{x})\,k_s + \pi_H$を得る。ここで$\pi_H$は地方政府による再分配所得を表す。

立地均衡状態では家計の効用水準は立地点に依存しない値u^*を取る。土地使用量が固定されていることから，財消費量も立地点に依存しない値c^*となる。

これより地点$\boldsymbol{x}$における家計の付け値地代関数は以下となる。

$$g_H(\boldsymbol{x}) \equiv \frac{w(\boldsymbol{x})l_s + r(\boldsymbol{x})k_s + \pi_H - p(\boldsymbol{x})c^*}{m_H} \quad (8)$$

また地方政府による再分配所得は以下で定義される。

$$\pi_H \equiv \frac{1}{N}\iint_A [g_B(\boldsymbol{x})b(\boldsymbol{x})m_B + g_H(\boldsymbol{x})h(\boldsymbol{x})m_H]dx_1dx_2 \quad (9)$$

ここで，$h(\boldsymbol{x})$：地点$\boldsymbol{x}$における家計密度

農業地代をg_Aで表せば，地点$\boldsymbol{x}$の地代は以下となる。

$$g(\boldsymbol{x}) \equiv \max\{g_B(\boldsymbol{x}), g_H(\boldsymbol{x}), g_A\} \quad (10)$$

（4）財，労働，資本に関する局所バランス方程式

まず財の輸送費用には財そのものを使うとして(von Thünen 技術)，その比率を a としよう。$\varphi(\boldsymbol{x})$を単位時間当たり地点$\boldsymbol{x}$に運ばれる財の２次元ベクトルとする。この時，地点$\boldsymbol{x}$における財輸送量の変化について，以下の局所バランス方程式が成立する。

$$div\,\varphi(\boldsymbol{x}) = q(\boldsymbol{x})b(\boldsymbol{x}) - c^*h(\boldsymbol{x}) - a\|\varphi(\boldsymbol{x})\| \quad (11)$$

ここで，$\|\cdot\|$：２次元ベクトルのノルム

同様に１単位の労働を単位距離輸送する費用(労働で測られる)を b とする。$\psi(\boldsymbol{x})$を地点$\boldsymbol{x}$において単位時間当りに輸送される労働量の２次元ベクトルとすると，地点$\boldsymbol{x}$における労働輸送の変化について，以下の局所バランス式が成立する。

$$div\,\psi(\boldsymbol{x}) = l_s h(\boldsymbol{x}) - l_d(\boldsymbol{x})b(\boldsymbol{x}) - b\|\psi(\boldsymbol{x})\| \quad (12)$$

資本ストックについては費用なしで移動自由とする。これは一旦資本ストックが装備されれば，均衡状態においては移動しないため，物流や人流に比べ移動費用は微小と考えられるためである。したがって各地点において資本均衡が成立する。

$$k_d(\boldsymbol{x})b(\boldsymbol{x}) = ks(\boldsymbol{x}) \quad (13)$$

ここで$\iint_A ks(\boldsymbol{x})dx_1dx_2 = \iint_A k_s h(\boldsymbol{x})dx_1dx_2$

資本ストックの移動自由性から，以下が成立する。

$$\iint_A ks(\boldsymbol{x})dx_1dx_2 = k_s N \quad (14)$$

（5）財市場と労働市場の大域的均衡条件

財局所バランス式を Green の公式を用いて積分すれば，財市場の大域的均衡条件が導出される。なお本研究では都市での生産物は全て都市内で消費され，移出入は考えない。したがって式(15)の右辺はゼロとなる。

$$\iint_A div\,\varphi(\boldsymbol{x})dx_1dx_2 = \iint_A [q(\boldsymbol{x})b(\boldsymbol{x}) - c^*h(\boldsymbol{x}) - a\|\varphi(\boldsymbol{x})\|]dx_1dx_2 = \int_{\partial A} c_n(\boldsymbol{x}(s))ds = 0 \quad (15)$$

労働についても家計の都市内外との移動を考えないため，式(16)の大域的均衡条件を得る。

$$\iint_A div\,\psi(\boldsymbol{x})dx_1dx_2 = \iint_A [l_s h(\boldsymbol{x}) - l_d(\boldsymbol{x})b(\boldsymbol{x}) - b\|\psi(\boldsymbol{x})\|]dx_1dx_2 = \int_{\partial A} l_n(\boldsymbol{x}(s))ds = 0 \quad (16)$$

（6）財輸送業者

財の輸送は財輸送業者によってなされるものとする。財輸送業者は地点xで$p(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{x})b(\boldsymbol{x})$の財を企業から購入し，家計に$p(\boldsymbol{x})c^*h(\boldsymbol{x})$を売る。ここで地点$x$に家計が存在しない場合には財は持ち越しとなり，企業が存在しない場合には売るだけとなる。

したがって地点xでの財輸送業者の利潤は以下となる。

$$\begin{aligned}\pi_{Tq}(\boldsymbol{x}) &= p(\boldsymbol{x})c^* h(\boldsymbol{x}) - p(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{x})b(\boldsymbol{x}) \\ &= -p(\boldsymbol{x}) div\, \varphi(\boldsymbol{x}) - p(\boldsymbol{x})a \,\|\, \varphi(\boldsymbol{x}) \,\| \end{aligned} \tag{17}$$

財輸送業者は都市全体での利潤が最大となるようなルートを探索する。これは式(17)を都市全体で積分し，それに変分法を用いることによって求められる。財輸送に関する最適条件は式(18)に帰着する。

$$p(\boldsymbol{x})a\frac{\varphi(\boldsymbol{x})}{\|\varphi(\boldsymbol{x})\|} = grad\ p(\boldsymbol{x}) \tag{18}$$

この式において$\varphi(\mathbf{x})$ / ‖ $\varphi(\mathbf{x})$ ‖ は財輸送の方向を表し，それが財価格の勾配となっていることを表す。すなわち財輸送の方向は，財価格が最も高くなる方向である。これがBeckmann[1]による有名なgradient lawである。

$p(\mathbf{x})a\varphi(\mathbf{x})$ / ‖ $\varphi(\mathbf{x})$ ‖は財１単位を単位距離輸送する費用を表す。地点$\mathbf{x}_A$と地点$\mathbf{x}_B$を結ぶ最適ルート上での輸送費用を求めてみよう。最適ルートを以下のようにパラメタライズする。$D(s) = (x_1(s), x_2(s))$ $(0 \le s \le 1, \mathbf{x}_A = (x_1(0), x_2(0)), \mathbf{x}_B = (x_1(1), x_2(1)))$。したがって財１単位の輸送費用は以下で表される。

$$\begin{aligned}&\int_0^1 p(\boldsymbol{x}(s))a\frac{\varphi(\boldsymbol{x}(s))}{\|\varphi(\boldsymbol{x}(s))\|}\frac{d\boldsymbol{x}(s)}{ds}ds \\ &= \int_0^1 grad\ p(\boldsymbol{x}(s))\frac{d\boldsymbol{x}(s)}{ds}ds \\ &= p(\boldsymbol{x}_B) - p(\boldsymbol{x}_A)\end{aligned} \tag{19}$$

式(19)は最適ルート上での財１単位の輸送費用が，２地点間の価格差になっていることを表しており，財価格に輸送費用が含まれていることを意味している。

さらに財輸送業者の都市全体での総利潤はゼロであることも確認できる。

（７）通勤輸送業者

通勤は通勤輸送業者によってなされるものとする。通勤輸送業者は地点xで$w(\mathbf{x})l_d(\mathbf{x})b(\mathbf{x})$の賃金を企業から受け取り，家計に$w(\mathbf{x})l_s h(\mathbf{x})$の賃金を支払い，労働者を輸送する。ここで地点$x$に家計が存在しない場合には新規乗車はなく，企業が存在しない場合には降車だけとなる。

通勤輸送業者も都市全体での利潤が最大となるようなルートを探索する。これも変分法によって求められる。通勤に関する最適条件は式(20)に帰着する。

$$w(\boldsymbol{x})b\frac{\psi(\boldsymbol{x})}{\|\psi(\boldsymbol{x})\|} = grad\ w(\boldsymbol{x}) \tag{20}$$

式(20)は通勤輸送の方向が，賃金率が最も高くなる方向であることを示している。通勤輸送の最適ルート上では，賃金率に通勤費用が含まれていること，都市全体での通勤輸送業者の総利潤がゼロとなることも確認できる。

３．財価格

式(18)の財価格方程式は非線形１階偏微分方程式に変形可能である。

$$\left(\frac{\partial ln\ p(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial ln\ p(\boldsymbol{x})}{\partial x_2}\right)^2 = a^2 \tag{21}$$

この方程式は解くことができ，初期多様体が１点に退化している場合，解は以下となる。

$$p(x_1, x_2) = p_0 \exp a\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \tag{22}$$

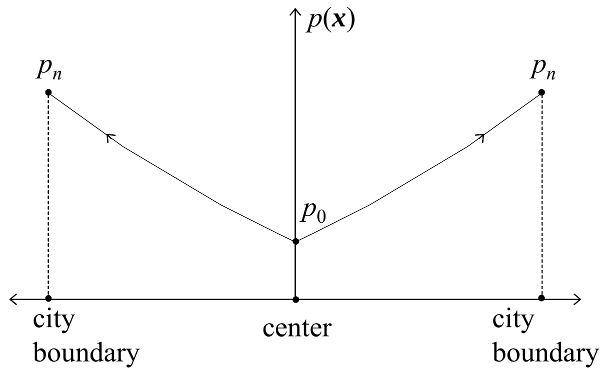
財価格の初期値 p_0 は，都市全体の均衡条件から決まる都市境界上での財価格によって決まる。式(22)は積分コノイド[7]と呼ばれ，図−１のような解曲面となる。

４．賃金率

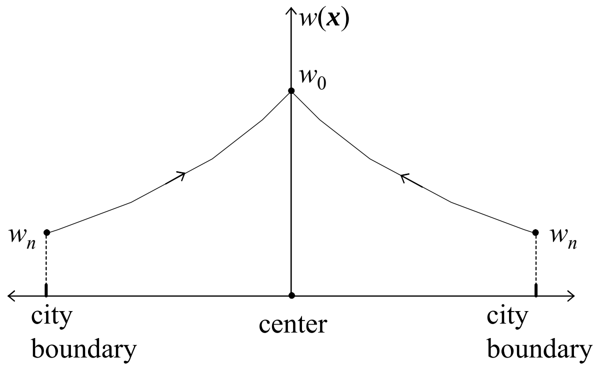
賃金率も同様に式(20)を変形して，非線形１階偏微分方程式を導き，その解は以下となる。

$$w(x_1, x_2) = w_0 \exp(-b\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \tag{23}$$

賃金率の空間的プロファイルは図−２となる。財価格とは逆に賃金率は都心部に向かって高くなるが，これは企業が負担する賃金率を表すためである。



図−１　財価格の空間的プロファイル



図−２　賃金率の空間的プロファイル

５．最適財輸送量

ここでは最適財輸送量を求めてみよう。式(18)を変形すると，以下の１階準線形偏微分方程式が得られる。

$$Q(\boldsymbol{x})\frac{\partial\|\varphi(\boldsymbol{x})\|}{\partial x_1}+R(\boldsymbol{x})\frac{\partial\|\varphi(\boldsymbol{x})\|}{\partial x_2} \tag{24}$$
$$=q(\boldsymbol{x})b(\boldsymbol{x})-c^{*}h(\boldsymbol{x})-\|\varphi(\boldsymbol{x})\|(a+1/\sqrt{x_1^2+x_2^2})$$

ここで

$$Q(\boldsymbol{x})\equiv x_1/\sqrt{x_1^2+x_2^2}\ ,\quad R(\boldsymbol{x})\equiv x_2/\sqrt{x_1^2+x_2^2}$$

式(24)の左辺は財輸送の方向微分を表す。右辺第１項は地点 x での財生産量，第２項は家計消費量，第３項は輸送で消費される財の量と拡散効果を表す。ここで拡散効果とは財輸送が遠方になるほど財輸送量の変化が小さくなることを表している。これは財輸送ルートを空間的に密にしたことによる特有の現象である。

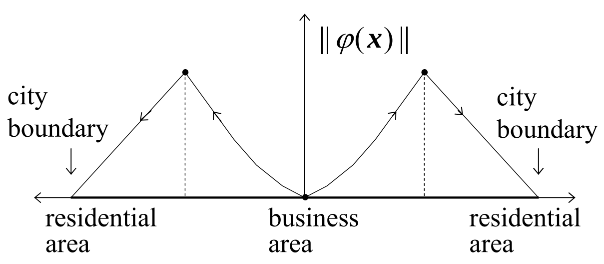
さて式(24)を都心部からの距離をパラメータとして解くと式(25)を得る。

$$\|\varphi(\boldsymbol{x}(s))\|=\int_0^s[q(\boldsymbol{x}(\tau))b(\boldsymbol{x}(\tau))-c^{*}h(\boldsymbol{x}(\tau))] \tag{25}$$
$$\times(\tau/s)exp\,a(\tau-s)\,d\tau$$

また財輸送ベクトルは以下で表される。

$$\varphi(\boldsymbol{x})=(\|\varphi(\boldsymbol{x})\|x_1/\sqrt{x_1^2+x_1^2},\|\varphi(\boldsymbol{x})\|x_2 \tag{26}$$
$$/\sqrt{x_1^2+x_1^2})$$

式(25)の解曲面は図－３のように表される。



図－３　最適財輸送の様子

６．最適通勤輸送

最適通勤輸送を表現する微分方程式は，式(27)のようである。

$$U(\boldsymbol{x})\frac{\partial\|\psi(\boldsymbol{x})\|}{\partial x_1}+V(\boldsymbol{x})\frac{\partial\|\psi(\boldsymbol{x})\|}{\partial x_2} \tag{27}$$
$$=l_s h(\boldsymbol{x})-l_d(\boldsymbol{x})b(\boldsymbol{x})-\|\psi(\boldsymbol{x})\|(b-1/\sqrt{x_1^2+x_2^2})$$

ここで

$$U(\boldsymbol{x})\equiv -x_1/\sqrt{x_1^2+x_2^2}\ ,\quad V(\boldsymbol{x})\equiv -x_2/\sqrt{x_1^2+x_2^2}$$

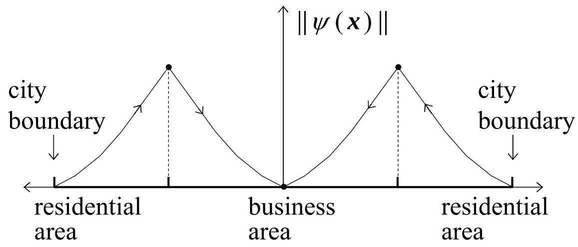
式(27)については，都市境界上からの距離をパラメータとして，最適通勤輸送量が以下のように求まる。

$$\|\psi(\boldsymbol{x}(s))\|=\int_0^s[l_s h(\boldsymbol{x}(\tau))-l_d(\boldsymbol{x}(\tau))b(\boldsymbol{x}(\tau))] \tag{28}$$
$$\times[(S-\tau)/(S-s)]exp\,b(\tau-s)\,d\tau$$

ここでSは都市境界を与えるパラメータであり，通勤輸送ベクトルは以下となる。

$$\psi(\boldsymbol{x})=(-\|\psi(\boldsymbol{x})\|x_1/\sqrt{x_1^2+x_1^2}, \tag{29}$$
$$-\|\psi(\boldsymbol{x})\|x_2/\sqrt{x_1^2+x_1^2})$$

式(28)の解曲面は図－４のように表される。



図－４　最適通勤輸送の様子

７．おわりに

本研究はBeckmann[1)]によって導入された連続型空間経済モデルにおいて，具体的に偏微分方程式を解くことにより，単一中心都市における財輸送と通勤の様子を調べたものである。本研究では立地ポテンシャル関数に強い仮定を置き，都市の形状を簡略化しているが，立地ポテンシャル関数のパラメータωを変化させることにより，複数都心モデルや土地の混合利用なども導き出せる。この点についてはFujita and Ogawa[6)]のように数値シミュレーションに頼らなければならない。またGISを用いることにより，より実証研究に近づけることも可能と考えている。これらを将来の課題としたい。

参考文献

1)Beckmann, M.J.: A Continuous Model of Transportation, *Econometrica*, Vol.20, pp.642-660, 1952
2)Beckmann, M.J. and Puu, T.: *Spatial Economics*: *Density*, *Potential*, *and Flow*, North-Holland, 1985
3)Puu, T.: *Mathematical Location and Land Use Theory*, Springer, 2003
4)Fujita, M.: *Urban Economic Theory*: *Land Use and City Size*, Cambridge, 1989
5)Duistermaat, J.J.: *Fourier Integral Operators*, Birkhäuser, 1996
6)Fujita, M. and Ogawa, H.: Multiple Equilibria and Structural Transition of Non-Monocentric Urban Configurations, *Regional Science and Urban Economics*, Vol.12, pp.161-196, 1982
7)Courant, R. and Hilbert, D.: *Methods of Mathematical Physics*, Vol.2, Interscience Publishers, 1962