AHPにおける一斉法の評価原則*

Evaluation Rule of Concurrent Convergence Method on AHP*

木下栄蔵**・杉浦伸***

By Eizo KINOSHITA** • Shin SUGIURA***

1．はじめに

本論文では，AHP における一斉法の評価原則について述べ，Dominant model とその発展モデルである一斉法の数学的構造を明らかにしている．なぜなら，一斉法の評価原則を理解するためは一斉法と関連する Dominant model と一斉法の数学的構造を明らかにする必要があるからである．そこで，2 章では一斉法の評価原則について述べ，3 章では Dominant model の数学的構造，4 章では一斉法の数学的構造を明らかにしている．

2．一斉法の評価原則

本章では一斉法の評価原則について述べる．一斉法は以下の評価原則により導かれる．

評価原則 1（支配代替案の存在）

評価空間において，複数の評価基準と複数の代替案が存在する．そして，評価する際，評価の規範となる支配代替案が存在する．

評価原則 2（一対比較の優位性）

代替案の評価値は対象とする評価基準に関する一対比較により導出できる．ただし，支配代替案の評価値 1 とする．

評価原則 3（評価基準の重みの申告性）

評価基準の重みは意志決定者が申告する．

評価原則 4（総合評価値）

総合評価値 E は評価マトリックス M，評価基準の重み V により以下の式で求められる．ただし，支配代替案の評価値はすべて 1 とする．　E=MV

評価原則 5（総合評価値一致の原則）

あらゆる支配代替案を規範とした総合評価値は一致する．

評価原則 6（評価基準の重みの調整原理）

評価原則 3 と評価原則 5 により評価基準の重みの調整原理が存在する．

3．Dominant model の数学的構造

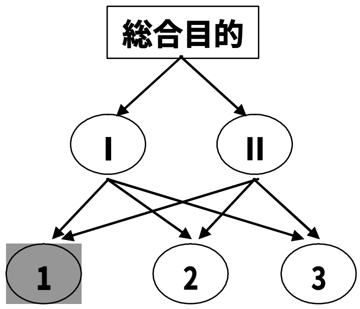
本章では，Dominant model の数学的構造を評価基準が 2 つ(Ⅰ，Ⅱ)，代替案が 3 つ(1，2，3)で，支配代替案 1 の場合で説明する．まず，支配代替案 1 からみた評価基準の重みベクトル b^1 を

$$b^1 = \begin{bmatrix} b_{\mathrm{I}} \\ b_{\mathrm{II}} \end{bmatrix}$$

として，評価マトリックス A を

$$\mathrm{A} = \begin{array}{c} \\ 代替案1 \\ 代替案2 \\ 代替案3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 評価基準\mathrm{I} & 評価基準\mathrm{II} \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{1\mathrm{I}} & a_{1\mathrm{II}} \\ a_{2\mathrm{I}} & a_{2\mathrm{II}} \\ a_{3\mathrm{I}} & a_{3\mathrm{II}} \end{bmatrix} \end{array}$$

とする(図ー1 参照).



図－１　階層構造

このとき，総合評価値ベクトル E の導出は次のようになる．

---

*キーワーズ：AHP

**正員，工博，名城大学都市情報学部都市情報学科

（E-mail:kinoshit@urban.meijo-u.ac.jp）

***学生員，名城大学大学院都市情報学研究科

（E-mail:p0681501@urban.meijo-u.ac.jp）

$$E = \begin{bmatrix} \text{代替案1の総合評価値} \\ \text{代替案2の総合評価値} \\ \text{代替案3の総合評価値} \end{bmatrix} \equiv Ab^1$$

すなわち，ベクトル E は評価マトリックス A と重みベクトルb^1にのみ依存する．

また，ベクトル E は次のように表現できる．

$$E \equiv Ab^1 = AA_1^{-1}A_1A_1^{-1}b^1$$

ただし，A_1とは，支配代替案１の評価値$(a_{1\mathrm{I},}a_{1\mathrm{II}})$を対角要素に有するマトリックスとする．すなわち，

$$\mathrm{A}_1 \equiv \begin{bmatrix} a_{1\mathrm{I}} & 0 \\ 0 & a_{1\mathrm{II}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となり，単位行列となる．

また，$\mathrm{A}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$も単位行列である．

次に，支配代替案以外のすべての代替案からみた評価基準の重みベクトルを評価マトリックスの推定ルールから説明する．このとき，A_iは，

$$A_i \equiv \begin{bmatrix} a_{i\mathrm{I}} & 0 \\ 0 & a_{i\mathrm{II}} \end{bmatrix} \qquad i = 1,2,3$$

とする．ところで，Dominant model に関するルールは次の
2 つである．

ルール１

$A_iA_1^{-1}b^1$ ：代替案$i(i \neq 1)$)からみた評価基準の重みベクトルの推定原理

ルール２

AA_i^{-1} ：代替案iからみた評価マトリックスの推定原理

まずルール１の推定原理は次のように表現できる．

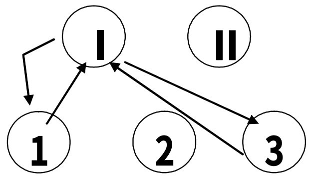
b_j^i(代替案iからみた評価基準 j の重み)とb_j(支配代替案１からみた評価基準jの重み)の比は，a_{ij}(評価基準jからみた代替案iの評価値)とa_{1j}(代替案 j からみた支配代替案１の評価値)の比に一致する．

上記の内容を式で証明すると(i=3 の場合)，次のように表せる．

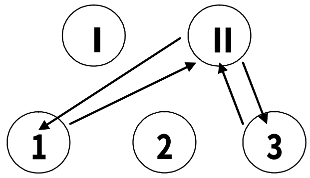
$$b^3 = \begin{bmatrix} b_{\mathrm{I}}^3 \\ b_{\mathrm{II}}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{3\mathrm{I}} & 0 \\ 0 & a_{3\mathrm{II}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/a_{1\mathrm{I}} & 0 \\ 0 & 1/a_{1\mathrm{II}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{b}_{\mathrm{I}} \\ b_{\mathrm{II}} \end{bmatrix} = A_3A_1^{-1}b^1$$

これは，以下の比例式から導かれる．(図３参照)

$$\frac{b_{\mathrm{I}}^3}{b_{\mathrm{I}}} = \frac{a_{3\mathrm{I}}}{a_{1\mathrm{I}}}, \frac{b_{\mathrm{II}}^3}{b_{\mathrm{II}}} = \frac{a_{3\mathrm{II}}}{a_{1\mathrm{II}}}$$



$$\frac{b_{\mathrm{I}}}{a_{1\mathrm{II}}} = \frac{b_{\mathrm{I}}^3}{a_{3\mathrm{I}}}$$



$$\frac{b_{\mathrm{II}}}{a_{1\mathrm{II}}} = \frac{b_{\mathrm{II}}^3}{a_{3\mathrm{II}}}$$

図―3

次に，ルール２の推定原理は次のように表現できる．

すべての評価基準 j に対して，代替案kに対する代替案 i の相対評価は次のように示すことができる． $\frac{\text{代替案 } i \text{の評価値}}{\text{代替案 } k \text{の評価値}} = \frac{\text{代替案 } i \text{の評価値}}{\text{代替案 1の評価値}} \times \frac{\text{代替案 1の評価値}}{\text{代替案 } k \text{の評価値}}$ $= a_{ij} \times \frac{1}{a_{kj}}$

たとえば，代替案３からみた評価マトリックスは，

$$A^3 = \begin{bmatrix} a_{1\mathrm{I}}/a_{3\mathrm{I}} & a_{1\mathrm{II}}/a_{3\mathrm{II}} \\ a_{2\mathrm{I}}/a_{3\mathrm{I}} & a_{2\mathrm{II}}/a_{3\mathrm{II}} \\ a_{3\mathrm{I}}/a_{3\mathrm{I}} & a_{3\mathrm{II}}/a_{3\mathrm{II}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1\mathrm{I}} & a_{1\mathrm{II}} \\ a_{2\mathrm{I}} & a_{2\mathrm{II}} \\ a_{31} & a_{3\mathrm{II}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{3\mathrm{I}} & 0 \\ 0 & a_{3\mathrm{II}} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= AA_3^{-1}$$

となる．

最後に，代替案$i(i \neq 1)$からみた総合評価値ベクトルは，

$$\underbrace{AA_i^{-1}b^i=(AA_i^{-1})}_{\text{ルール2}}\underbrace{(A_iA_1^{-1}b^1)}_{\text{ルール1}}$$

となる．このことより，次の定理を導くことができる．

定理：ルール 1,2 の下では，支配代替案からみた総合評価値ベクトルは，他の代替案から見た総合評価値ベクトルと一致する．

代替案 1 が支配代替案のときは，

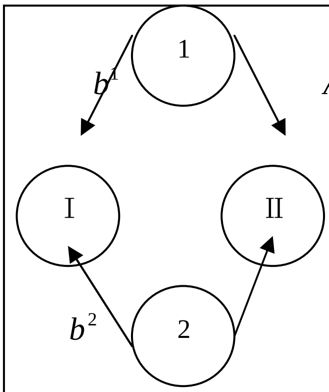
$$Ab^1=AA_1^{-1}b^1=AA_i^{-1}A_iA_1^{-1}b^1$$

$$=\underbrace{(AA_i^{-1})}_{\text{ルール2}}\underbrace{(A_iA_1^{-1}b^1)}_{\text{ルール1}}$$

となる．

３． 一斉法の数学的構造 3)

Dominant model において，複数の支配代替案が存在する場合を考える．たとえば，前述の例において，代替案 1 と代替案 2 が支配代替案と仮定する．このとき，代替案 1 からみた重みベクトル b^1，代替案 2 からみた重みベクトル b^2，さらに評価マトリックス A が与えられる．すなわち，入力データは，以下に示すようになる．



$$A=\begin{bmatrix} a_{1\mathrm{I}} & a_{1\mathrm{II}} \\ a_{2\mathrm{I}} & a_{2\mathrm{II}} \\ a_{3\mathrm{I}} & a_{3\mathrm{II}} \end{bmatrix}$$

このとき，支配代替案 1 から支配代替案 2 への推定は，ルール 1，ルール 2 から次のようになる．

重みベクトルの推定：ルール 1 により，

$$b^1 \longrightarrow A_2A_1^{-1}b^1$$

となる．

評価マトリックスの推定：ルール 2 により，

$$AA_1^{-1} \longrightarrow AA_2^{-1}$$

となる．

一方，支配代替案 2 から支配代替案 1 への推定も同様にして求めることが出来る．

重みベクトルの推定：ルール 1 により，

$$b^2 \longrightarrow A_1A_2^{-1}b^2$$

となる．

評価マトリックスの推定：ルール 2 により，

$$AA_2^{-1} \longrightarrow AA_1^{-1}$$

となる．

ここで，重みベクトル b^1 と重みベクトルの推定値 $A_1A_2^{-1}b^2$ に「ずれ」が生じる場合を考える．重みベクトル b^2 と重みベクトルの推定値 $A_2A_1^{-1}b^1$ との「ずれ」も同様である．このような「ずれ」が生じない場合は，「支配代替案間の互換性」と呼んでいる．しかし，現実には互換性が保たれることは稀で，「ずれ(ギャップ)」が生じることが多い．そこで，このような「ずれ」を調整する方法を，木下・中西は「一斉法」として提案している．

そこで，次に，「一斉法」について，すべての代替案が支配代替案の場合(前述した例では，代替案の数は 3 つ)を例として説明する．

まず，支配代替案 1 からみた重みベクトルの調整値 b^1 は，オリジナルデータ b^{11}，支配代替案 2 からの推定値 b^{12}，支配代替案 3 からの推定値 b^{13} の平均値とする．すなわち，

$$b^1=\frac{1}{3}\left\{b^{11}+b^{12}+b^{13}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\frac{A_1A_1^{-1}b^1}{e^TA_1A_1^{-1}b^1}+\frac{A_1A_2^{-1}b^2}{e^TA_1A_2^{-1}b_2}+\frac{A_1A_3^{-1}b^3}{e^TA_1A_3^{-1}b_3}\right\}$$

となる．同様にして，支配代替案 2，3 からみた重みベクトル調整値 b^2，b^3 はそれぞれ次のようになる．

$$b^2=\frac{1}{3}\left\{b^{21}+b^{22}+b^{23}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\frac{A_2A_1^{-1}b^1}{e^TA_2A_1^{-1}b^1}+\frac{A_2A_2^{-1}b^2}{e^TA_2A_2^{-1}b^2}+\frac{A_2A_3^{-1}b^3}{e^TA_2A_3^{-1}b^3}\right\}$$

$$b^3 = \frac{1}{3}\left\{b^{31} + b^{32} + b^{33}\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\frac{A_3 A_1^{-1} b^1}{e^T A_3 A_1^{-1} b^1} + \frac{A_3 A_2^{-1} b^2}{e^T A_3 A_2^{-1} b^2} + \frac{A_3 A_3^{-1} b^3}{e^T A_3 A_3^{-1} b^3}\right\}$$

そして，新しい重みベクトルb^iと古い重みベクトル$b^i\ (i=1,2,3)$との間に「ずれ(ギャップ)」がなくなるまでこの手順を繰り返すことにする．なお，この手順により，重みベクトルb^iが収束を有することは，参考文献[4]に詳述している．

また，「一斉法」の例として，

$$b^{11} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix} \quad b^{22} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{bmatrix} \quad b^{33} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.8 \end{bmatrix}$$

の場合を表−1 に示す．

表−1　「一斉法」の例

1	I	II
1	1	1
2	2	1/2
3	3	1/6

2	I	II
1	1/2	2
2	1	1
3	3/2	1/3

3	I	II
1	1/3	6
2	2/3	3
3	1	1

	1		2		3	
	I	II	I	II	I	II
①	0.4	0.6	0.7	0.3	0.2	0.8
			0.727	0.273	0.923	0.077
	0.363	0.632			0.913	0.087
	0.014	0.986	0.053	0.947		
②	0.261	0.739	0.493	0.507	0.679	0.321
			0.585	0.145	0.864	0.136
	0.196	0.804			0.814	0.136
	0.105	0.895	0.319	0.681		
③	0.187	0.813	0.466	0.534	0.784	0.214
			0.479	0.521	0.806	0.194
	0.179	0.821			0.794	0.194
	0.169	0.831	0.449	0.551		
	0.178	0.822	0.465	0.535	0.796	0.204

この結果，収束値は，

$$b^1 = \begin{bmatrix} 0.178 \\ 0.822 \end{bmatrix} \quad b^2 = \begin{bmatrix} 0.465 \\ 0.535 \end{bmatrix} \quad b^3 = \begin{bmatrix} 0.796 \\ 0.204 \end{bmatrix}$$

となる．

したがって，総合評価値はそれぞれ，

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1/2 \\ 3 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.178 \\ 0.822 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.767 \\ 0.671 \end{bmatrix} \quad \text{(支配代替案 1)}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3/2 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.465 \\ 0.535 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3025 \\ 1 \\ 0.8725 \end{bmatrix} \quad \text{(支配代替案 2)}$$

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 6 \\ 2/3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.796 \\ 0.204 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4893 \\ 1.1427 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{(支配代替案 3)}$$

となる．しかし，上記 3 つの総合評価値は，正規化すると，すべて

$$E = \begin{bmatrix} 0.410 \\ 0.314 \\ 0.276 \end{bmatrix}$$

となり一致する．

参考文献

1) 木下栄蔵，中西昌武：AHP における新しい視点の案，土木学会論文集，No.569/4-36,pp1-8,1997.
2) E.Kinoshita and M.nakanishi: Proposal of New AHP Model in Light of Dominant Relationship among Alternatives, Journal of Operations Research Society of Japan, Vol.42, NO.2, pp13-19, 1999.
3) 木下栄蔵，中西昌武：Dominant model における追加データの処理手法「一斉法」の提案，土木学会論文集 No.611/IV-42，pp.13-19，1999.
4) E.Kinoshita，K.Sekitani，J.SHI：Mathematical Properties of Dominant AHP and Concurrent Convergence Method, Journal of Operations Research Society of Japan,Vol.45,No2,pp198-213,2002.

AHPにおける一斉法の評価原則*

木下栄蔵**・杉浦伸***

本論文では，AHP における一斉法の評価原則について述べ，一斉法に関連する Dominant model と一斉法の数学的構造を明らかにしている．

Evaluation Rule of Concurrent Convergence Method on AHP*

By Eizo KINOSHITA** • Shin SUGIURA***

This paper explains evaluation principle of Concurrent Convergence Method and show mathematical structure of Dominant AHP and Concurrent Convergence Method.