資本減耗の制御とマクロ経済成長*

Depreciation Control and Economic Growth*

石倉智樹**
By Tomoki ISHIKURA**

1．はじめに

生産活動の本源的生産要素である資本ストックは，時間の経過とともに減耗する．一般的な経済成長モデルである新古典派成長モデルにおいても，その発展形としての内生的成長理論においても，しばしば減耗率一定の仮定により動的な資本蓄積過程が表現される [1)]．しかし，現実の固定資本は，適切な維持管理が行われなければ，機能の劣化が早まり，生産要素資本としての減耗が大きくなると考えられる．

マクロ経済学における経済成長理論は，生産過程における技術や外部性に注目しており，生産要素ストックの蓄積過程が極めて単純に扱われている．こうした従来の成長モデルに対して，上田・横松 [2)]は，資本ストックの蓄積過程に着目したモデルを構築した．上田・横松 [2)]は，建設技術を資本ストックの調整費用と資本減耗に影響する要因として捉え，持続的成長のための建設技術進歩の役割と必要性について論じている．そこでは，資本蓄積過程における技術の重要性が理論的に考察されており，新たな示唆として評価できるものである．

資本蓄積過程においては，ストックを新たに形成する総投資だけではなく，既存ストックの減耗も影響する．会計的には，資本の減耗は，減価償却により費用化され，各期に一定量の資産減少が計上される．しかし，現実の固定資本は，維持管理を適切に行うことで，機能劣化を抑制し，長寿命化させることが可能である．すなわち，各時点でのメンテナンスによって，ストックの減耗（正確には減少）を制御することができると考えることができる．

古くから，社会資本ストックの維持修繕において，ライフサイクルコストの抑制等を目的とした計画手法は検討されているが，ストックの蓄積過程への影響を通じた，動的な経済効果については，未だ研究途上の段階と言えよう．本研究は，投資により資本減耗が制御可能な状況における経済成長モデルを構築し，その特徴を解析することにより，ストックの維持管理による経済成長への貢献について考察する．

2．資本減耗を経済指標の関数とした簡易な成長モデル

標準的な動学的経済モデルにおいて，資本蓄積過程は，総投資から期首資本の減耗分を差し引いた形で表される．企業会計的な意味において，資本減耗は一定の償却ルールに基づき，当期の経済フローとは独立に決定される．

一方，生産資産の物理的側面から捉えると，当期の維持更新が適切に行われない場合や，生産活動が活発に行われた場合には，そうでない場合に比べて生産要素としての機能劣化度合いが大きくなると考えられる．本研究は，この機能劣化を広義の資本減耗と定義する．すなわち，資本ストックの量的な減耗が当期フローに依存して変化する可能性を考慮する．

しかし，このように定義した資本減耗について，減耗率がいかなる経済指標の関数となるか，強力な根拠をもつ定説は存在しないと言えよう．本研究と同様に減耗率を可変とした既存研究事例において，上田・横松 [2)]は，減耗率を資本ストックの関数として扱っており，桑島・織田澤(2005)[3)]は，公的資本ストックと民間資本ストックの比およびメンテナンス投資の関数として定式化している．上田・横松 [2)]は，減耗は「建設される資本設備の耐久性」と「建設後の維持管理・更新の効率性」に依存するとしており，主に前者に着目したモデル化を行っている．桑島・織田澤 [3)]は，混雑によって減耗率が増加し，メンテナンス投資によって減耗率は低下するという前提に基づいている．

本研究では，減耗率が当期の投資フローおよび期首ストックの関数であるという仮定を設けて，経済成長モデルの特性について考察する．

閉鎖経済を仮定し，代表的家計の無限視野動的効用最大化を考える．また，代表的家計の時間選好率は一定と仮定する．議論の焦点を絞るため，

*キーワード：資本減耗，経済成長，動的計画法，計画基礎論
**正員，博（情報科学），国土技術政策総合研究所
（横須賀市長瀬 3-1-1，TEL: 046-844-5032,
E-mail: ishikura-t92y2@ysk.nilim.go.jp）

生産関数は資本ストックのみの関数として定義し，かつ稲田条件を満たすと仮定する．すなわち，

$$f'(k)>0, f''(k)<0, \lim_{k\to\infty} f'(k)=0, \lim_{k\to 0} f'(k)=\infty$$

を仮定する．

通時的な効用最大化問題は，以下のように定義される．

$$\max_{\{c_t\}_0^\infty} \int_0^\infty u(c_t) e^{-\rho t} dt \tag{1}$$

s.t.

$$c_t + I_t = f(k_t) \tag{2}$$

$$\dot{k} = I_t + g\left(I_t(c_t,k_t),k_t\right) \tag{3}$$

$$k_0 = K \text{ (given)} \tag{4}$$

c_t: t 期の消費

I_t: t 期の投資

k_t: t 期の期首資本ストック

ρ: 代表的家計の時間選好率

ただし，ここでの投資は，新規資本ストック形成と維持更新のための支出の両方を含むものである．(3)式の蓄積方程式では，第一項が新たに形成される資本ストックを表し，第二項が資本ストックの残存（期首ストック－減耗）量を表している．より正確な記述のためには，新規投資と維持更新支出を分離し，維持更新支出を除いた投資のみが新規資本形成に寄与する定式化が望ましいが，今後の改善課題としたい．

動的効用最大化のための現在価値ハミルトニアンは次のように定義される（時点 t は省略）．

$$H = ue^{-\rho t} + \lambda\left[f(k) - c + g\left(I(c,k),k\right)\right] \tag{5}$$

最大値原理および横断性条件より，

$$H\left(t,k_t,c_t^*,\lambda\right) \ge H\left(t,k_t,c_t,\lambda\right) \tag{6}$$

$$\frac{\partial H}{\partial k_t} + \dot{\lambda} = 0 \tag{7}$$

$$\lim_{t\to\infty} \lambda_t k_t = 0 \tag{8}$$

が，最適経路の一階の条件として得られる．各期の消費に特殊な制約がなければ，最初の条件は，

$$\frac{\partial H}{\partial c_t} = 0 \tag{9}$$

と表すことができる．相対的危険回避度一定の効用関数

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} \tag{10}$$

σ: 異時点間弾力性

を仮定して，これらの条件を整理すると，最適消費経路は以下のように導出される．なお，以降では，時点のスクリプト t を省略する．

$$\begin{aligned}\frac{\dot{c}}{c} = &\left\{\rho - \frac{\partial f}{\partial k} - \frac{\partial g}{\partial k} - \left(1-\frac{\partial g}{\partial c}\right)^{-1}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial c \partial k}\dot{k}\right)\right\} \\ &\cdot\left[-\sigma + \left(1-\frac{\partial g}{\partial c}\right)^{-1} c\frac{\partial^2 g}{\partial c^2}\right]^{-1}\end{aligned} \tag{11}$$

すなわち，減耗率が当期の投資フロー（およびストック）の関数となることで，消費の成長経路も，当期フローに依存して変化することが理解できる．なお，減耗率を定数とすると，

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial f(k)}{\partial k} + 1 - \delta - \rho\right) \tag{12}$$

となり，標準的な Ramsey 型成長モデルの帰結と同一形になることは容易に確認され，式(11)の特殊形として解釈することが可能である．

３．最適成長経路の特性分析

（1）モデルの再定式化

前章で示した，ハミルトニアンダイナミクスによる手法では，比較動学などの解析的な解の特性分析が主なアプローチとなる．この方法は経済の動学特性考察においては有効であるが，各期における政策を論じる際には，政策自体がアウトプットとなる動的計画法（DP）が，より直感的なアプローチと言えよう．また，DP では不確実性を明示的に扱うことが可能であり，今後のモデル展開の幅が広い．そこで，以下では DP の形式へモデルを書き換え，数値実験を通じて議論を展開する．言うまでもなく，動学的最適化のアプローチが異なるのみであり，解の帰結に本質的な違いはない．

まず，時間を離散的に扱い，通時的な効用最大化を以下のように定義する．

$$\max_{\{c_t\}_0^\infty} U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \tag{13}$$

β: 割引因子

制約条件のうち，需給バランスについては，前章と同様に，式(2)により表される．初期条件も式(4)を用いる．

資本減耗（残存）についても，式(3)と同様に期首ストックと投資フローの関数とする．ただし，状態方程式は，時間を離散化したことに伴い，以下のように書き換えられる．

$$\begin{aligned} k_{t+1} &= f\left(k_t\right)-c_t+\left[k_t-g\left(k_t,I\left(c_t\right)\right)\right] \\ &= h\left(k_t,c_t\right) \end{aligned} \quad (14)$$

以上の前提に基づき，DP の考え方に準じて，最適成長問題を議論する．最適経路の部分問題として Value Function は，以下のように定義される．

$$V\left(k_t\right)=\max_{\{c_t\}_0^\infty}\sum_{t=i}^{\infty}\beta^{t-i}u\left(c_t\right) \quad (15)$$

最適性の原理より，最適経路は，以下の Bellman Equation

$$V\left(k_t\right)=\max_{\{c_t\}_0^\infty}\left\{\beta u\left(c_t\right)+V\left(h\left(k_t,c_t\right)\right)\right\} \quad (16)$$

の解として得られる．最適経路での意思決定は，当期の状態変数に対応する操作変数，あるいは操作変数を通じて制御される次期の状態変数の関係を示す Policy Function として表される[4)5)]．

しかし，Policy Function を解析的に求めることは，特殊な関数形の場合にのみ可能であり，一般には解析的な解が得られないことが知られている．このため，実際には数値解によるアプローチが中心となる．無限視野の DP 問題において Policy Function の定常的数値解を求める手法としては，主に Value Function Iteration，Guess and Verify 法，Howard Improvement Algorithm などがある[5)6)]が，本研究では，これらの内，最も扱いが容易であり適用幅の広い Value Function Iteration を用いる．

（2）最適戦略の比較

本節では，減耗率が一定である典型的成長モデルと，減耗率が当期フローによって制御されうるモデルについて，数値実験を通じてそれらの特性に関する考察を行う．数値実験にあたり，各モデルに共通するパラメータを以下のように設定した．

表-1　パラメータの設定値

パラメータ名	設定値
α ：資本の限界生産性	0.7
β ：割引因子	0.95
σ ：異時点間弾力性	1.1

減耗率一定のモデルにおいては，減耗率を 0.1 に固定した．減耗率（残存率）を可変とするモデルとして，以下のように複数の関数形を仮定して試行した．

$$g\left(I,k\right)=\left(\frac{I}{k}\right)^{\gamma}k \quad (17)$$

$$g\left(I,k\right)=\left(\frac{1}{1+\exp\left(-\gamma\cdot I\right)}\right)\cdot k \quad (18)$$

減耗率一定のモデルにおけるオイラー方程式は，

$$\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\sigma}=\beta\left[\left(1-\delta\right)+f'\left(k_{t+1}\right)\right] \quad (19)$$

であるので，ストック水準が

$$k^*=\left[\frac{1}{\alpha\beta}-\frac{\left(1-\delta\right)}{\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad (20)$$

のときに，消費が一定となる定常状態が最適経路となる．分析においては，この周辺のストック水準に関する Policy Function を求め，その時に実現されるフロー指標と合わせて議論する．（式(20)と設定パラメータより，k^*は 160.3 となる．）

まず，式(17)に示す，ストック残存率が投資対ストック比の指数関数と仮定した場合を検討する．

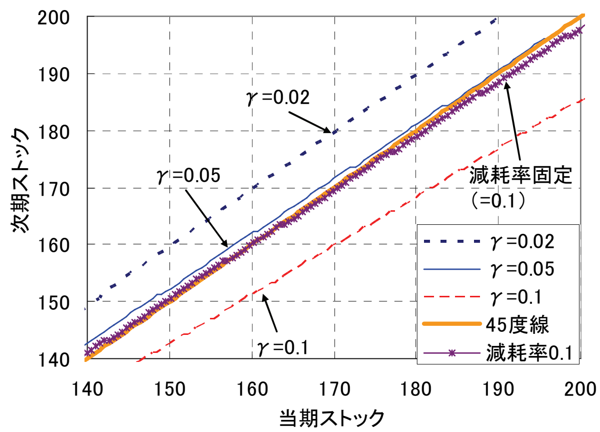

図-1　式(17)に対応したPolicy Function

図-1 は，式(17)のストック残存率関数において，いくつかのパラメータに対応した Policy Function の数値解を示している．γの値，すなわちストック対投資比率に対する残存率の感度が高くなると，最適戦略としての次期のストック水準が低くなる傾向が確認される．γが 0.05 の場合には，減耗率を 0.1 に固定したケースと近い挙動を示している．

投資の対総生産比率を**図-2** に示す．解の挙動が不連続的に見られるが，これは，本研究が状態空間を離散化して求解しているためであり，本質的な解特性とは異なる．解の挙動は，減耗率が固定されている場合と類似しているが，γの値が大き

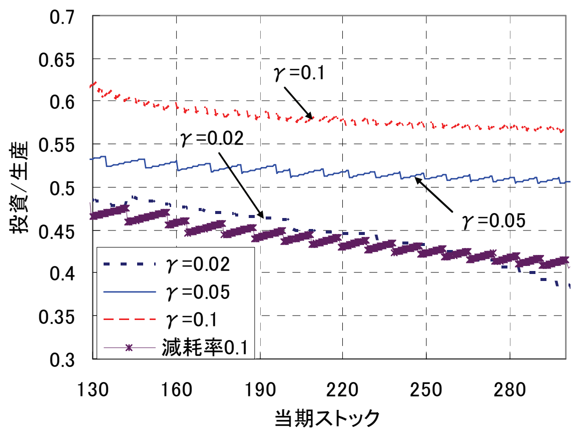

図-2　式(17)に対応した最適経路(投資/生産)の挙動

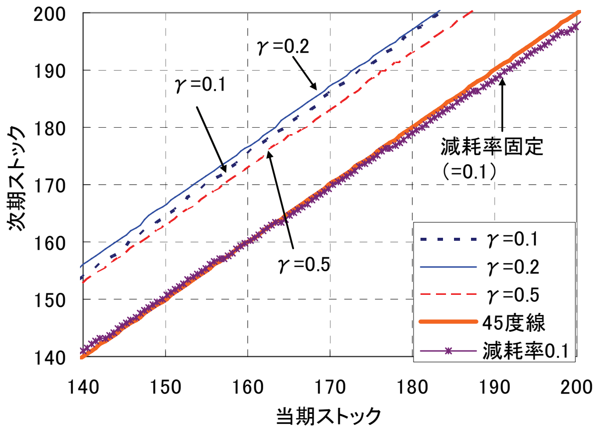

図-3　式(18)に対応したPolicy Function

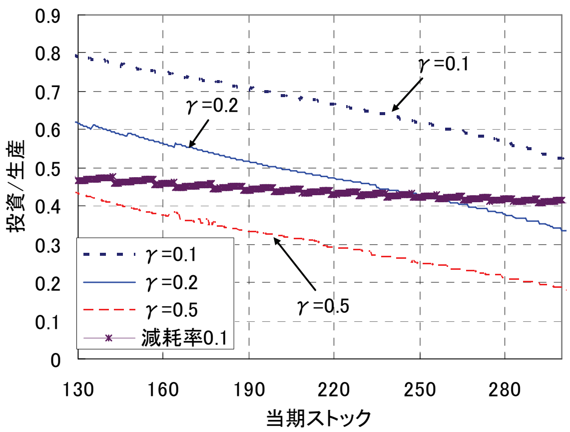

図-4　式(18)に対応した最適経路(投資/生産)の挙動

くなると，より投資フロー比率を高める最適戦略が解となる．これらの結果は，γが大きくなり，減耗抑制のために大きな投資フローが強いられるようになると，最適経路の投資量が大きくなること，また，投資を大きくしても次期ストック規模の維持が困難になることを意味している．

減耗率がストックに依存せず，投資フローのみの関数となる式(18)のケースについて，同様の結果を**図-3**，**図-4** に示す．式(18)は，投資規模が無限になると残存率が 1 に漸近するロジスティック関数である．いずれの場合の Policy Function も，減耗率を 0.1 に固定した場合よりも，次期ストックを大きくする経路が最適解であるという結果が示された．投資対生産比率の挙動は，減耗率を固定した場合と大きく異なり，当期ストック規模が大きくなると，投資への最適配分がより小さくなっている．減耗率がストック量に依存しないため，経済規模が拡大することにより減耗率が抑制されることが，こうした結果の要因と推測されるが，このような前提は，式(17)に比べると非現実的と考えられよう．

4．おわりに

本研究は，ストックの減耗がフローにより制御可能な経済を想定して，最適成長経路との関係を分析した．分析結果より，減耗が制御される場合には，最適成長のための戦略が大きく変わりうることが示された．しかし，前提のリアリティの検証を含め，実経済への示唆として意味を持たせるためには，考慮すべき点が数多く残されている．今後は，蓄積技術の検討をさらに深めるとともに，実状態と最適経路との関係などについても検討を加えたい．

参考文献

1) Aghion, P. and Howitt, P.: Endogenous Growth Theory, The MIT Press, 1998
2) 上田孝行, 横松宗太: 建設技術進歩の経済成長への貢献 –理論的分析-, 土木計画学研究・講演集, vol.34, CD-ROM, 2006
3) 桑島氏直, 織田澤利守: インフラの競合性と減耗の経済成長経路に与える影響分析, 土木計画学研究・講演集 Vol: 32, CD-ROM, 2005
4) Stokey, N. L. and Lucas, R. E. Jr. with Prescott, E. C.: Recursive Methods in Economic Dynamics, Harvard University Press, 1989
5) Ljungqvist, L. and Sargent, T.: Recursive Macroeconomic Theory, The MIT Press, 2000
6) Judd, K. L.: Numerical Methods in Economics, The MIT Press, 1998