ラベリングアルゴリズムを用いた
時間枠制約付き配車配送計画問題の解法に関する研究*

Solution techniques for vehicle routing and scheduling problem with time windows using labelling algorithms *

山内将平**・谷口栄一***・山田忠史****・中村有克*****

By Shohei YAMAUCHI**・Eiichi TANIGUCHI***・Tadashi YAMADA****・Yuuki NAKAMURA*****

１．研究の背景と目的

都市内集配送の高度化により，都心部ではトラック交通量が非常に多く，都市内における道路混雑の影響によって，環境に与える影響を無視できなくなってきている．

そこで，本研究では，効率的な物流システムを検討する上で有用であることが示されている，時間枠制約付き配車配送計画問題の厳密解を求めるための基礎的研究を行う．配車配送計画問題とは，デポから複数の顧客への集配送車両による集配送費用が最小となるルートを求める問題のことである．

配車配送計画問題の厳密解を求めることは，顧客を訪問する組み合わせが指数関数的に増加するため，解くことが非常に困難な NP-hard な問題とされてきた．また，顧客のサービス時間帯が，早着遅刻を禁止する hard time window であるものは，現実には道路の混雑状況等により達成することが困難であるので，本研究では顧客のサービス時間帯の一部が soft time window になっている配車配送計画問題を解くための基礎的な研究を行う．

従来は，hard time window の配車配送計画問題の厳密解が求められており，より柔軟な配送が可能となる soft time window の配車配送計画問題では近似解が求められていた．そこで，本研究では，soft time window の配車配送計画の厳密解を求めるための基礎的な研究を行う．

*キーワーズ： 物流計画，配車配送計画

**学生員、京都大学大学院工学研究科
（京都府京都市西京区京都大学桂C1、
TEL075-383-3231、FAX075-950-3800）
***フェロー、工博、京都大学大学院工学研究科
（京都府京都市西京区京都大学桂C1、
TEL075-383-3229，FAX075-950-3800）
****正会員，工博、京都大学大学院工学研究科
（京都府京都市西京区京都大学桂C1、
TEL075-383-3230、FAX075-950-3800）
*****学生員、修士(工)、京都大学大学院工学研究科
（京都府京都市西京区京都大学桂C1、
TEL075-383-3231、FAX075-950-3800）

２．定式化

本研究で解くことになる soft time window の配車配送計画問題の定式化 [1]は以下のようになる．

$$Min \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ijk} + \sum_{i \in N} p_i(s_{ik}) \tag{1}$$

$Subject\ \ to$

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in V} x_{ijk} = 1 \qquad \forall i \in N \tag{2}$$

$$\sum_{j \in V} x_{0jk} = 1 \qquad \forall k \in K \tag{3}$$

$$\sum_{i \in V} x_{ihk} - \sum_{j \in V} x_{hjk} = 0 \quad \forall h \in N \quad \forall k \in K \tag{4}$$

$$\sum_{i \in V} x_{i,n+1,k} = 1 \qquad \forall k \in K \tag{5}$$

$$\sum_{i \in N} d_i \sum_{j \in V} x_{ijk} < q \quad \forall k \in K \tag{6}$$

$$p_i(t) = \begin{cases} \infty : t < a_i \text{のとき} \\ 0 : a_i \le t \le b_i \text{のとき} \\ \alpha_1 (t - l_i) : l_i < t \le lb_i \text{のとき} \\ \infty : ub_i < t \end{cases} \tag{7}$$

$$x_{ijk} = \{0,1\} \qquad \forall i,j \in N \quad \forall k \in K \tag{8}$$

ここに，

K :トラックの集合
N :顧客の集合
k :トラック番号
i,j,h :顧客番号
A :制約条件を満たす顧客の集合
c_{ij} :顧客 $i-j$ 間の距離(コスト)
x_{ijk} :トラック k が顧客 $i-j$ をサービスするときは 1,それ以外のときは 0
$0,\ n+1$:デポ
d_i :顧客 i における需要量
q :トラックの車両容量
p_i :遅刻の際に支払うペナルティ
s_{ik} :トラック k の顧客 i に対するサービス開始時刻
a_i :顧客 i での最早作業時刻

ub_i　:最遅作業時刻

b_i　:顧客iにおける作業終了時刻

式(2)は，トラックが顧客を一度だけ訪問する条件，式(3)はトラックがデポから出発する条件，式(4)はトラックのフローの連続条件，式(5)はトラックがデポに到着する条件，式(6)は需要に関する条件，式(7)はトラックが顧客に到着する際に発生するペナルティに関する条件を表している．

上記の問題は，組み合わせ最適化問題であり，顧客数が増加すると組み合わせが指数関数的に増加するNP-hard な問題である．よって，計算時間を短縮し，この問題のよりよい下界値を得るために式(2)を目的関数に組み込んだ Lagrange 緩和を考える．Lagrange 緩和を行った式[1)]は以下のようになる．

$$Min$$
$$\sum_{k\in K}\sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ijk} - \sum_{i\in N}\lambda_i\Big(\sum_{k\in K}\sum_{j\in V} x_{ijk} - 1\Big) + \sum_{i\in N} p_i(s_{ik}) \quad (9)$$

$Subject \quad to$　式(3)-式(8)

上式によって定義される Lagrange 緩和問題に対する実行可能解の集合はP_λで示される．P_λは互いに素な部分集合である車両台数|K|に分割される．式(9)は各車両一台ごとに関する子問題(sub　problem)に分割することができる．k 番目の子問題は次のように定式化できる．$\tilde{c}_{ij}$は reduced cost である．

$$Min \sum_{(i,j)\in A}\tilde{c}_{ij}x_{ij} + \sum_{i\in N} p_i(s_i) \qquad (10)$$

ただし，$\tilde{c}_{ij} = c_{ij} - \lambda_i$

$Subject\ to$

$$\sum_{j\in V} x_{0j} = 1 \qquad (11)$$

$$\sum_{i\in V} x_{ih} - \sum_{j\in V} x_{hj} = 0 \quad \forall h \in N \qquad (12)$$

$$\sum_{i\in V} x_{i,n+1} = 1 \qquad (13)$$

$$\sum_{i\in N} d_i \sum_{j\in V} x_{ij} \le q \qquad (14)$$

$$p_i(t) = \begin{cases} \infty : t < a_i \text{のとき} \\ 0 : a_i \le t \le b_i \text{のとき} \\ \alpha_1(t - l_i) : l_i < t \le lb_i \text{のとき} \\ \infty : ub_i < t \end{cases} \qquad (15)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i, j \in N \qquad (16)$$

上で述べられた子問題は，Elementary Shortest Path Problem with Time Window and Capacity Constraints（ESPPTWCC）と呼ばれる．ESPPTWCC においてはあるノードはパス p_k 上で多くとも一回しかサービスを受けない．ESPPTWCC は，強い意味で NP-hard であるので，ESPPTWCC の代わりに Shortest Path Problem with Time Window and Capacity Constraints (SPTWCC)を解くことを考える．SPPTWCC は，ESPPTWCC と異なり，同じ顧客を何度もサービスすることを許すものである．

３．ラベリングアルゴリズム

本研究では，SPPTWCC を解くためにラベリングアルゴリズムを用いる．ラベリングアルゴリズムは，hard time window の配車配送計画問題の子問題を解く際に用いられてきたが，本研究ではペナルティの項を組み込むことによって soft time window の配車配送計画問題にも適用できるようにアルゴリズムを拡張した．

ラベリングアルゴリズムは，顧客 i，時刻 t，総需要量 d をラベル（i，t，d）として表し，それをコスト評価することによって c（i，t，d）の値を求める．そして，reduced cost を算出することによって，最短経路を求める手法である．図 1 にラベリングアルゴリズムの概要について示す．

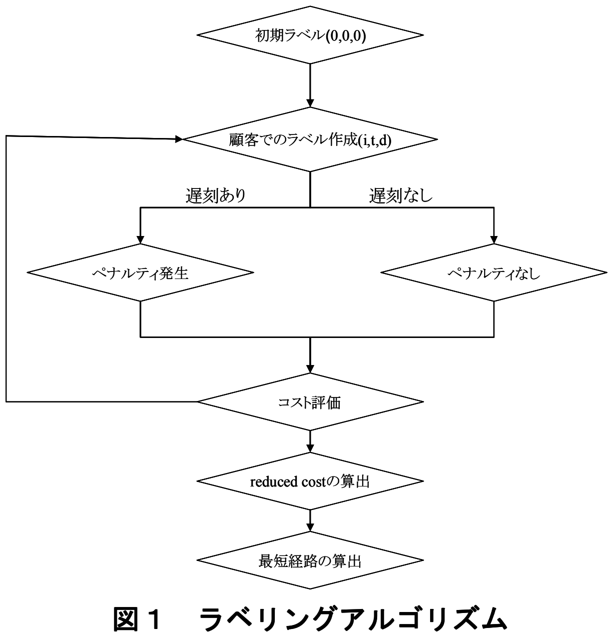

図１　ラベリングアルゴリズム

４．劣勾配法

劣勾配法とは，微分不可能な連続凸関数を閉凸領域で最小化する際に用いられる数学的解法であり，また離散最適化問題の Lagrange 双対問題を解く際に用いられる方法である．

そこで，本研究ではラベリングアルゴリズムを用いて，子問題を解いた後に，主問題(master problem)の求解を劣勾配法[2)]によって求める．

子問題の解の値をz^*とする．つまり，$z^* = \sum_{(i,j)\in A} \tilde{c}_{ij} x_{ijk}$ とする．使用されるトラック台数を$|K|$とすると，Lagrange 緩和によって定式化された目的関数は，以下のようになる．

$$f(\underline{\lambda}) = \min |K| \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ijk} + \sum_{i\in N} \lambda_i (1 - |K| \sum_{j\in V} x_{ijk})$$

$$= |K| \min \sum_{(i,j)\in A} \tilde{c}_{ij} x_{ijk} + \sum_{i\in N} \lambda_i$$

$$= |K| \min z^* + \sum_{i\in N} \lambda_i \qquad (17)$$

Lagrange 緩和によって，最適解に対する下界値が求められているので，$\underline{\lambda}$を調整することによって，$f(\underline{\lambda})$を最大にすることを考える．その方法として$\underline{\lambda}$を調整し，$f(\underline{\lambda})$を最大化するために本研究では劣勾配法を用いる．以下に本研究で用いる劣勾配法の手順について述べる．

$-f(\underline{\lambda}_u)$ の劣勾配を$-\underline{g}_u = -(g_1, g_2, ..., g_n)$とする．ただし，$g_i = 1 - |K| \sum_{j\in V} x_{ijk}$ とする．ステップサイズをt_uとすると，ラグランジュ乗数ベクトルλ_uは，以下のように更新される．

$$\underline{\lambda}_{u+1} = \underline{\lambda}_u - t_u \frac{\underline{g}_u}{\| \underline{g}_u \|} \qquad (18)$$

ただし，$\| \underline{g}_u \| = \sqrt{g_1{}^2 + g_2{}^2 + g_3{}^2 + ... + g_n{}^2}$

また，ステップサイズt_uは以下のように設定する[3)]．

$$t_u = \alpha \beta^u \quad (0 < \alpha \le 2 \ , \ 0.9 \le \beta < 1) \qquad (19)$$

$u = u + 1$とおき，$\underline{\lambda}_{u+1}$を用いて，$\tilde{c}_{ij} = c_{ij} - \lambda_i$を計算し，ラベリングアルゴリズムを用いて$f(\underline{\lambda})$を計算する．この手順を繰り返す．

最適解を得ることができたかどうかの判定条件は，$\lambda_i (1 - |K| \sum_{j\in V} x_{ijk}) = 0$ を満たしたときとなる．$\sum_{j\in V} x_{ijk}$ は，顧客 i が，ネットワーク上に存在するトラックによって何度サービスを受けたかを表す回数を示す．また，顧客数が多くなった場合には，$\lambda_i (1 - |K| \sum_{j\in V} x_{ijk}) = 0$ に多項式時間で到達できないことが考えられるので，その場合は繰り返し回数を予め設定し，何らかのアルゴリズムを加えていく必要がある．

５．ケーススタディ

本研究では，soft time window と hard time window によって，最短経路がどのように変化するのか，また車両台数の変化についても考察を行う．

本研究では，二つのケーススタディを行った．表 1，2 にケーススタディのデータとして，顧客の存在する座標位置，需要および顧客の指定する到着時刻制約について示す．また，各ケーススタディのうち，配車配送計画問題の顧客の時間枠制約が soft time window と hard time window である場合のケースについて比較考察を行う．

ケース 2 は，ケース 1 よりも，顧客の到着指定時刻をそれぞれ少しずつ早め，それに対する影響が車両台数および reduced cost にどれぐらいの影響を及ぼすのか考察を行うことにする．

顧客 1 はデポを表す．顧客の指定する到着時刻制約について，soft time window と hard time window ともにトラックが時刻 a_i 以前に到着した場合，トラックはペナルティを支払うことなく顧客上で待つものとする．また，soft time window の場合，トラックが時刻 b_i から ub_i の間に到着した場合について，遅刻に対するペナルティを支払うものとする．ub_i 以降に到着したトラックについては，顧客に対してサービスをすることはできない．hard time window の場合は，トラックの遅刻は許されず，b_i 以降に到着したトラックについては，顧客に対してサービスをすることはできないものとする

リンクコストは，顧客間の距離に相当するものとし，車両容量は 80 とする．

顧客の重複訪問が，soft time window ，hard time window の両方で発生する結果が得られたが，一回訪問となるように，劣勾配法で処理を行う．その結果については，当日示すことにする．

表１ ケース１

顧客No.	Xcoord	Ycoord	demand	a_i	b_i	ub_i
1	35	35	0	0	300	300
2	41	49	10	50	58	70
3	35	17	7	20	33	45
4	55	45	13	20	27	43
5	55	20	19	41	55	64
6	15	30	26	16	29	38
7	25	30	3	5	26	40
8	20	50	5	47	56	70
9	10	43	9	37	43	58
10	55	60	16	41	50	61
11	30	60	16	51	61	70
12	20	65	12	65	72	78
13	50	35	19	58	66	79
14	30	25	23	35	53	65

表2 ケース2

顧客No.	Xcoord	Ycoord	demand	a_i	b_i	ub_i
1	35	35	0	0	300	300
2	41	49	10	46	55	65
3	35	17	7	15	22	30
4	55	45	13	20	27	38
5	55	20	19	41	50	61
6	15	30	26	16	26	38
7	25	30	3	5	23	35
8	20	50	5	43	51	63
9	10	43	9	37	43	52
10	55	60	16	41	50	61
11	30	60	16	48	55	70
12	20	65	12	55	63	78
13	50	35	19	58	66	72
14	30	25	23	28	47	65

上の各ケースに対して，ラベリングアルゴリズムを用いて最短経路を求めた結果を表 3 に示す．

表3 ケースごとの最短経路

		最短経路
ケース1	HTW	デポ→7→6→9→8→12→デポ
		デポ→4→10→2→デポ
		デポ→3→5→13→デポ
		デポ→7→6→14→13→デポ
		デポ→6→8→11→12→デポ
	STW	デポ→7→6→9→8→11→12→デポ
		デポ→4→10→2→デポ
		デポ→3→5→13→デポ
		デポ→7→6→14→13→デポ
ケース2	HTW	デポ→7→6→9→12→デポ
		デポ→7→6→14→13→デポ
		デポ→7→6→9→8→デポ
		デポ→4→11→2→デポ
		デポ→3→5→13→デポ
		デポ→4→10→13→デポ
		デポ→4→2→13→デポ
	STW	デポ→7→6→9→8→12→デポ
		デポ→7→6→8→11→12→デポ
		デポ→4→10→2→デポ
		デポ→3→5→13→デポ
		デポ→7→6→14→13→デポ

ケース 1 では，hard time window の場合，必要な車両台数は，5 台となることが分かる．このときの reduced cost は，-386 と求められる．一方，soft time window の場合は，必要な車両台数は 4 台となることが分かり，このときの reduced cost は，-306 と求められる．soft time window は遅刻を許すために，hard time window に比べて，よりトラック台数の少ない最短経路ができることが分かった．

ケース 1 より顧客の到着指定時刻を早めたケース 2 において，hard time window の場合，必要な車両台数は 7 台であり，このときの reduced cost は，-430 と求められる．一方，soft time window の場合は，必要な車両台数は 5 台となることが分かり，このときの reduced cost は，-352 と求められる．

ケース 2 の soft time window では，顧客上で多くの遅刻が発生するために，遅刻を許さない hard time window ではトラックが 2 台余分に必要となる最短経路を得た．

以上のケースから，soft time window の方が hard time window よりも車両台数が少なくすむ最短経路が得られた．また，トラックの固定コストを考えれば，soft time window の方が，より費用のかからない最短経路を得ることができ，またトラックの台数が少ないため環境負荷の低減を図ることができる可能性があるということが分かった．

６．まとめと今後の課題

本研究では，soft time window の配車配送計画問題について定式化をし，Lagrange 緩和を行った．そして，soft time window および hard time window の SPPTWCC をラベリングアルゴリズムを用いることにより最短経路を求めた．

今後の課題は，最短経路を Lagrange 緩和を行った式に代入し，劣勾配法を用いて下界値を改善していく予定である．ある程度ラベリングアルゴリズムと劣勾配法の繰り返し計算を行い，それでも厳密解が得られていない場合は，分枝切除価格法を用いて厳密解を求めることにする．

配車配送計画問題の soft time window と hard time window の厳密解を比較することによって，どちらがどれぐらい効率的な配送をすることができるのか比較検討する予定である．

また，顧客数が増えた場合にも組み合わせが指数関数的に増加するが，上記のアルゴリズムに改良を加えて，多項式時間で解くことができるように，工夫を加えていく必要がある．

さらに，トラックを管理するには維持費がかかるので，トラックの固定コストについて考慮し，より現実に近い場合に対応させてコスト評価をしていく必要がある．

参考文献

1) Kallehauge.B, Larsen.J, O.B.G.Madsen, Lagrangean duality applied to the vehicle routing with time windows ,Computers&Operations Research , 2006

2) Kohl N, Exact methods for time constrained routing and related scheduling problems LYNGBY1995

3) Kohl N, O.B.G.Madsen, An optimization algorithm for the vehicle routing problem with time windows based on lagrangian relaxation,Operations Research,Vol.45,No.3,pp395-406