下水処理施設の最適点検・補修モデル*

An Optimal Inspection / Rehabilitation Model For Sewage Work Facilities*

堀倫裕**・小濱健吾***・貝戸清之****・小林潔司*****
by Michihiro HORI**, Kengo OBAMA***, Kiyoyuki KAITO****and Kiyoshi KOBAYASHI*****

1. はじめに

下水処理施設の点検業務においては，外部からの目視検査が不可能な施設が数多く存在する．また，下水処理施設では，下水処理槽が直列に配置され，処理システムのリダンダンシーが確保されていない場合も少なくない．このような下水処理施設では，下水処理槽の点検・補修を行う際，排水を実施するために下水処理施設の操作・運用を一時的に停止せざるを得ない．したがって，下水処理施設の点検・補修業務を，限られた時間の範囲の中で，集中的に実施することが必要となる．

現時点において，下水処理施設の劣化過程に関するデータは，ほとんど蓄積されていない．その理由としては，１）限られた時間の中で，点検と補修作業が同時に実施されるため，点検結果を記録する時間的余裕が少ないこと，２）１つのコンクリート版の中に劣化の程度が異なる損傷が複数個存在し，それぞれの損傷に対して処置が施されること，等があげられる．したがって，今後においても，下水処理施設の劣化状態に関するデータを獲得することは必ずしも容易ではない．本研究では，以上の状況を鑑み，下水処理槽の補修工事記録として入手可能である補修タイプ別の補修工事量（補修面積）に関する情報に基づいて，コンクリート版の劣化過程に関する情報を獲得することを目的とする．

下水処理施設では，点検と補修を同時に実施せざるを得ず，施設の劣化過程のみを観測することは困難である．さらに，施設の劣化過程に，多くの不確実性が介在する．このために，劣化過程の不確実性を考慮しながら，施設の点検・補修工事間隔を適切に決定することが課題となる．本研究では，補修タイプ別の補修工事量という集計的劣化情報を用いて，コンクリート版のマルコフ劣化モデルを作成する．その上で，コンクリート版の最適点検・補修間隔を決定するためのマルコフ決定モデルを定式化する．

*キーワーズ：土木施設維持管理　集計的ハザードモデル
**正会員　大成建設株式会社原子力本部原燃サイクル部
（〒163-0606 東京都新宿区西新宿1-25-1)
***学生会員　京都大学大学院工学研究科都市社会工学専攻
（〒615-8540 京都市西京区京都大学桂)
****正会員　博(工)大阪大学大学院工学研究科　特任講師
(〒565-0871 大阪府吹田市山田丘2-1)
*****フェロー会員　工博　京都大学経営管理大学院　教授
(〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

なお，本研究では，コンクリートの非硫酸系腐食を念頭においている．硫酸系腐食の場合，腐食速度が経過時間に依存するため，非斉時型マルコフモデルが必要となる．この問題に関しては，今後の課題としたい．

2. 最適点検・補修モデル

(1) モデル化の前提条件

コンクリート版の劣化・補修過程をモデル化しよう．劣化・補修過程の全体的な見通しをよくするため，３．では補修政策の内容を特定化せずに議論を進める．本研究では，対象とする下水処理槽を構成するすべてのコンクリート版を，時間軸上における同一時刻において同時に点検・補修するような問題を考える．いま，カレンダー時間軸上に等間隔に設けられた離散的な時刻において点検を実施し，必要な場合にはコンクリート版の補修を同時に実施するような管理業務を考える．以下，カレンダー時刻のことを「時刻」と呼ぶ．初期時刻t_0に，対象とする下水処理槽が新規に建設されたと考える．さらに，初期時刻t_0を起点とし，無限遠に続く離散的時間軸

$$t_r^d = t_0 + rd \ (r = 0, 1, \cdots) \tag{1}$$

を導入しよう．ここに，添え字r $(r = 0, 1, \cdots)$は点検・補修間隔dの離散的時間軸における時刻番号を表す．点検・補修間隔dは政策変数である．いま，対象とするコンクリート版の中から，ある代表的なコンクリート版にのみ着目し，S個の同一面積のメッシュに分割しよう．コンクリート版が異なれば，メッシュ数Sが異なってもいい．現実には，メッシュごとではなく，損傷度別の延べ面積に関するデータのみが記録される．本研究では，損傷度別面積という集計化された情報を用いて，コンクリート版の劣化・補修過程をモデル化する．このような集計化操作に関しては，のちに２.（３）で議論することとし，当面の間，メッシュごとの損傷度データが入手可能として議論を進める．

メッシュs $(s = 1, \cdots, S)$の損傷度をM個の離散的なレーティング指標i $(i = 1, \cdots, M)$で表現する．ただし，レーティング指標iの値が大きくなるほど，劣化が進展していることを表す．時刻t_r^dにおけるメッシュs $(s = 1, \cdots, S)$の損傷度を状態変数

$$h_s(t_r^d) = i \ (s = 1, \cdots, S; r = 1, \cdots) \tag{2}$$

を用いて表現する．あるメッシュの劣化過程は，状態空間$\mathcal{S}_M=\{1,\cdots,M\}$上で定義されるマルコフ過程に従うと仮定する．さらに，すべてのメッシュの推移確率が同一であると考える．コンクリート版が異なれば，推移確率は異なる．時刻$t_r^d = t_0 + rd$において，メッシュsの劣化状態が$h_s(t_r^d)$であり，かつ時刻t_{r+1}^dにおいて劣化状態$h_s(t_{r+1}^d)$に推移する条件付確率をp_{ij}で表そう．p_{ij}は，2つの状態変数iとjの間の推移確率である．推移確率p_{ij}は点検・補修間隔dに依存するが，記述の簡便化のために点検・補修間隔dを省略している．損傷度Mは吸収状態であり，補修をしない限り損傷度Mの状態に留まると考える．すなわち，$p_{MM}=1$が成立する．ここで，コンクリート版の推移確率行列を定義しよう．推移確率行列$\boldsymbol{p}$を

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1M} \\ 0 & p_{22} & \cdots & p_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{MM} \end{pmatrix} \tag{3}$$

と定義する．

(2) 点検・補修過程

補修政策$\xi \in \Xi$を補修前の各損傷度j $(j = 1,\cdots,M)$に対して，その時点で実施する補修アクションルールを定義しよう．ただし，Ξは補修政策の集合である．補修アクション$\eta^\xi(j)$は，損傷度jに対して補修を実施し，損傷度が$\eta^\xi(j)$に推移することを意味している．たとえば，補修アクション$\eta^\xi(j)=j'$は損傷度がjの時に補修を実施し，損傷度がj'に回復することを意味している．補修アクションの中には「補修をしない」というアクションも含まれる．損傷度がjの時に補修をしないというアクションが選択される場合には，$\eta^\xi(j)=j$と表される．いま，時刻t_r^dにおいて点検・補修が実施された直後のメッシュsの損傷度を状態変数$\tilde{h}_s(t_r^d)$を用いて表そう．つぎに，時刻t_{r+1}^dに点検が実施される．点検後（補修アクションが実施される前）の施設状態を$h_s(t_{r+1}^d)$と表す．つぎに，補修政策$\xi\in\Xi$に従って，補修アクションが実施された後の状態変数は$\tilde{h}_s(t_{r+1}^d) = \eta^\xi(h_s(t_{r+1}^d))$と表される．この時，コンクリート版の劣化・補修過程は，1）時刻t_r^dの補修後の状態変数ベクトル$\tilde{\boldsymbol{h}}(t_r^d) = \{\tilde{h}_s(t_r^d) : s = 1,\cdots,S\}$，2）時刻$t_{r+1}^d$の点検後に観測される状態変数ベクトル$\boldsymbol{h}(t_{r+1}^d) = \{h_s(t_{r+1}^d) : s = 1,\cdots,S\}$，3）時刻$t_{r+1}^d$の補修後に定義される状態変数ベクトル$\tilde{\boldsymbol{h}}(t_{r+1}^d) = \{\tilde{h}_s(t_{r+1}^d) : s = 1,\cdots,S\}$を用いて記述できる．

補修政策$\xi \in \Xi$に基づく補修アクション内容は，メッシュsの損傷度$h_s(t_{r+1}^d)$に対して，上述した補修アクションルールによって記述される．いま，点検後のメッシュsのコンクリート版の状態を$h_s(t_{r+1}^d) = j$としよう．さらに，補修政策ξを適用することにより，補修前後の当該メッシュの損傷状態は変化するが，このような損傷状態の推移関係は

$$q_{jj'}^\xi = \begin{cases} 1 & \eta^\xi(j) = j' \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases}$$
$$(j = 1,\cdots,M; j' = 1,\cdots,j) \tag{4}$$

と表すことができる．ここで，補修政策ξの下で，時刻t_r^dの補修アクション実施後の構造部の状態$\tilde{h}_s(t_r^d) = i$から，時刻t_{r+1}^dにおける補修アクション実施後におけるメッシュの状態$\tilde{h}_s(t_{r+1}^d) = j'$へ推移する確率$P_{ij'}^\xi$は，

$$P_{ij'}^\xi = \sum_{j=1}^{M} p_{ij} q_{jj'}^\xi \tag{5}$$

と表される．したがって，補修政策ξの下におけるコンクリート版の推移確率行列は

$$\boldsymbol{P}(\xi) = \begin{pmatrix} P_{11}^\xi & P_{12}^\xi & \cdots & P_{1M}^\xi \\ P_{21}^\xi & P_{22}^\xi & \cdots & P_{2M}^\xi \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{M1}^\xi & P_{M2}^\xi & \cdots & P_{MM}^\xi \end{pmatrix} \tag{6}$$

と定義される．

(3) 劣化・補修過程の集計化

現実には，メッシュごとの損傷度に関するデータを獲得することは困難である．そこで，２.（２）で定義したメッシュ単位の劣化・補修過程を集計化し，対象とするコンクリート版全体の劣化・補修過程をモデル化しよう．1メッシュ当たりの単位面積を$1\mathrm{m}^2$に基準化すると，損傷度iのメッシュ数がm_i個存在すれば，損傷度iの損傷面積は$m_i\mathrm{m}^2$となる．補修政策$\xi\in\Xi$の下で，時刻t_r^dにおけるコンクリート版の劣化状態は，各損傷度別の延べ面積を表す状態変数を用いて

$$a_i^\xi(t_r^d) = m_i \ (i = 1,\cdots,M) \tag{7}$$

と表せる．ただし，m_iは，損傷度がiであるようなメッシュの個数を表す．各状態の延べ面積の総和をとると，コンクリート版の総面積Sに一致するため

$$\sum_{i=1}^{M} m_i = S \tag{8}$$

が成立する．さらに，損傷度別の延べ面積ベクトルを

$$\boldsymbol{a}^\xi(t_r^d) = \left\{a_1^\xi(t_r^d),\cdots,a_M^\xi(t_r^d)\right\} \tag{9}$$

と表現する．さらに，損傷別延べ面積$a_i^\xi(t_r^d)$を総面積Sを用いて基準化し，損傷度iの相対頻度$\pi_i^\xi(t_r^d) = a_i^\xi(t_r^d)/S$を要素とする相対頻度ベクトル

$$\boldsymbol{\pi}^\xi(t_r^d) = \left\{\pi_1^\xi(t_r^d),\cdots,\pi_M^\xi(t_r^d)\right\} \tag{10}$$

を定義する．なお，相対頻度は，時刻t_r^dにおける補修アクションが実施された後の状態で定義されている．さらに，時刻t_r^dから時刻t_{r+1}^dまで，推移確率(6)に従って状態が推移する．この時，時刻t_r^dと時刻t_{r+1}^dの相対頻度の間には

$$\pi_j^\xi(t_{r+1}^d) = \sum_{i=1}^{M} P_{ij}^\xi \pi_i^\xi(t_r^d) \tag{11}$$

が成立する．上式をベクトル表記すれば，

$$\boldsymbol{\pi}^{\xi}(t^d_{r+1}) = \boldsymbol{\pi}^{\xi}(t^d_r)\boldsymbol{P}(\xi) \tag{12}$$

と表すことができる．さらに，初期時刻における相対頻度$\boldsymbol{\pi}^{\xi}(t_0)$を与件とすれば，任意の定期点検時刻$t^d_r = t_0 + rd$における期待相対頻度$\boldsymbol{\pi}^{\xi}(t^d_r)$は

$$\boldsymbol{\pi}^{\xi}(t^d_r) = \boldsymbol{\pi}^{\xi}(t_0)\{\boldsymbol{P}(\xi)\}^r \tag{13}$$

と表される．ここに，$\{\boldsymbol{P}(\xi)\}^r$は推移確率行列$\boldsymbol{P}(\xi)$を$r$回乗じた行列を意味する．点検・補修政策$\xi$に対する推移確率行列$\boldsymbol{P}(\xi)$を与えれば，式(13)を用いてシステムの平均的な劣化・補修過程を記述できる．

(4) 最適点検補修モデルの定式化

最適点検・補修モデルを定式化するために，下水処理槽のライフサイクル費用を定義しよう．いま，コンクリート版の損傷度をjからj' $(1 \leq j' \leq j \leq M)$へ修復するための補修費用を$c^{j'}_j$と表そう．ただし，補修費用は条件

$$c^{j'}_j \leq \cdots \leq c^{j'}_l \leq \cdots \leq c^{j'}_M \tag{14}$$
$$(j \leq l \leq M;\ j' = 1, \cdots, j)$$

を満足すると仮定する．また，$c^j_j = 0$を仮定する．条件(14)は補修前の劣化水準が悪い方が，同一の劣化水準に回復するための費用が大きくなることを意味する．これまでは，代表的なコンクリート版を対象として議論してきたが，以下ではK個のコンクリート版全体をとりあげる．コンクリート版k $(k = 1, \cdots, K)$の総面積をS^kと表そう．

いま，カレンダー時刻t_0を現在時刻としよう．カレンダー時刻t_0は，下水処理施設の供用が開始された時刻，あるいはアセットマネジメントシステムの導入が開始された時刻を意味する．現在時刻t_0を起点とする離散時間軸を考える．初期時点におけるコンクリート版kの劣化状態を

$$\boldsymbol{\pi}^{k\xi}(t_0) = \left\{\pi^{k\xi}_1(t_0), \cdots, \pi^{k\xi}_M(t_0)\right\} \tag{15}$$

と表す．ライフサイクル費用を計算する期間長をJdと表そう．コンクリート版全体を同一の点検・補修政策$\xi \in \Xi$を用いて管理した場合，時刻$t^d_{r-1} = t_0 + (r-1)d$における点検・補修後の劣化状態を$\boldsymbol{\pi}(t^d_{r-1})$としよう．この時，次の点検・補修時刻$t^d_r$に発生する期待補修費用は

$$EC^{\xi}_k(\boldsymbol{\pi}(t^d_{r-1})) = \sum_{i=1}^{M-1}\sum_{j=1}^{M}\sum_{j'=1}^{j} p^k_{ij}(d) q^{\xi}_{jj'} c^{j'}_j S^k \pi^k_i(t^d_{r-1}) \tag{16}$$

と表される．これより，政策ξの下で，終端時刻t^d_{r+J}までに発生する期待補修費用は

$$W(d,\xi) \quad = \quad \sum_{k=1}^{K}\sum_{r=1}^{J+1} EC^{\xi}_k(\boldsymbol{\pi}(t^d_{r-1})) \tag{17}$$

となる．補修政策ξを適用し，点検・補修間隔Jdごとに一括更新した場合における１施設，１単位期間当たりライフサイクル費用の平均値$C(d,J,\xi)$は

$$C(d,J,\xi) = \frac{NW(d,J,\xi) + eJ}{dJN} \tag{18}$$

と表される．ただし，eは全ての施設を１回点検するための費用であり，Nは施設個数である．

点検間隔dが変化すれば，各点検時刻における損傷度Mの相対頻度が変化する．そこで，施設のリスク管理のために，補修政策ξの下で実現する損傷度Mの定常確率を$\Pi_M(d,\xi)$，施設のリスク管理水準を$\bar{U}$と表そう．この時，損傷度Mの定常確率を，リスク管理水準$\bar{U}$以下に抑えることが可能な補修政策の集合$\Omega(\bar{U})$を，

$$\Omega(\bar{U}) = \{(d,\xi)|\Pi_M(d,\xi) \leq \bar{U}\} \tag{19}$$

と定義しよう．この時，リスク管理水準$\bar{U}$を所与とした時に，ライフサイクル費用を最小とするような補修政策を求める最適点検・補修政策モデルは，

$$\min_{d,\xi}\{C(d,J,\xi)\} \tag{20a}$$
$$\text{subject to } (d,\xi) \in \Omega(\bar{U}) \tag{20b}$$

と定式化できる．

3. モデルの作成

(1) データベースの作成

本研究では，津田らが開発したマルコフ劣化ハザードモデル[1)]を用いて、コンクリート版の劣化予測を試みる．マルコフ劣化ハザードモデルの推計方法に関する既存の研究は，すべて個別の部材や施設に関する損傷度の履歴データに基づいて，マルコフ劣化ハザードモデルを構成する多段階指数ハザードモデルのパラメータを推計する方法論が採用されている．しかしながら，多くの下水処理槽の点検･補修過程では，損傷が発生した面積に関するデータのみが利用可能な場合が少なくない．しかも，個々のコンクリート版は面積が異なる場合が少なくない．そこで，このような異質なコンクリートの損傷度別面積データに基づいて，マルコフ推計確率を推計することが必要となる．いま，コンクリート版k $(k = 1, \cdots, K)$に関して，初期時刻$\bar{t}_0$を含めた時刻$\bar{t}_{r_k}$ $(r_k = 0, \cdots, T^k)$で点検・補修工事が実施され，合計T^k回の工事実績データが残存しているとしよう．ここに、記号「 ¯ 」は、実績値であることを意味する。点検・補修時刻$\bar{t}_{r_k}$においては，前回の点検時刻$\bar{t}_{r_k-1}$からの経過時間$\bar{z}_{r_k}$と，時刻$\bar{t}_{r_k}$における損傷度別面積$\bar{\boldsymbol{a}}_{r_k}$，及び補修後の損傷度面積$\tilde{\boldsymbol{a}}_{r_k}$に関するデータ$\boldsymbol{\theta}_{r_k} = \{\bar{z}_{r_k}, \bar{\boldsymbol{a}}(t_{r_k}), \tilde{\boldsymbol{a}}(t_{r_k})\}$が入手可能である．さらに，すべての点検履歴データの集合を$\Theta = \{\boldsymbol{\theta}_{r_k} : r_k = 0, \cdots, T^k; k = 1, \cdots, K\}$と表そう．劣化予測をおこなうためには，これらの過去の点検履歴情報から，マルコフ推移確率を推計することが必要となる．

(2) マルコフ劣化モデル

マルコフ推移確率は，マルコフ劣化ハザードモデルを用いて推定できる．マルコフ劣化ハザードモデルの詳細は参考文献[1)]に譲り，ここではモデルの概要のみを説明する．いま，説明の便宜上，再びコンクリート版kのあるメ

ッシュの劣化過程に着目しよう．メッシュの添え字sの記述を省略する．コンクリート版kの損傷度i $(i=1,\cdots,M-1)$が変化した時刻t_i^k $(i=0,\cdots,M-1)$を起点とする時間軸（以下，サンプル時間軸と呼ぶ）を考えよう．損傷度iのサンプル時間軸上で，カレンダー時刻t_{i-1}^kからの経過時間をy_i^kと表記する．時刻t_{r_k}において損傷度がiと判定され，次の検査時刻$t_{r_k+1}=t_{r_k}+z_{r_k}$においても損傷度が$i$と判定される確率は，指数ハザード関数$\lambda_i^k(y_i^k)=\lambda_i^k$を用いて，

$$p_{ii}^k=\exp(-\lambda_i^k z_{r_k}) \tag{21}$$

となる．ただし，z_{r_k}は２つの点検•補修時刻の間隔を表す．さらに，検査時刻t_{r_k}とt_{r_k+1}の間で損傷度がiから$j\ (>i)$に推移するマルコフ推移確率$p_{ij}^k(z_{r_k})$ $(i=1,\cdots,M-1;j=i,\cdots,M)$は，

$$\begin{aligned}p_{ij}^k(z_{r_k})&=\mathrm{Prob}[h(t_{r_k})=j|h(t_{r_k-1})=i]\\&=\sum_{m=i}^{j}\prod_{s=i}^{m-1}\frac{\lambda_s^k}{\lambda_s^k-\lambda_m^k}\prod_{s=m}^{j-1}\frac{\lambda_s^k}{\lambda_{s+1}^k-\lambda_m^k}\exp(-\lambda_m^k z_{r_k})\\&(i=1,\cdots,M-1;j=i+1,\cdots,M)\end{aligned} \tag{22}$$

と表すことができる[1)]．また，$p_{iM}^k(z_{t_k})$に関しては，マルコフ推移確率の条件より次式で表せる．

$$p_{iM}^k(z_{r_k})=1-\sum_{j=i}^{M-1}p_{ij}^k(z_{r_k}) \tag{23}$$
$$(i=1,\cdots,M-1)$$

(3) モデルの推計方法

マルコフ劣化ハザードモデル(21),(22)を，点検履歴情報Θを用いて推計する方法を提案する．いま，あるコンクリート版k $(k=1,\cdots,K)$に着目しよう．コンクリート版kの劣化過程を特徴づけるハザード率λ_i^k $(i=1,\cdots,I-1;k=1,\cdots,K)$は施設の特性ベクトルに依存して変化すると考え，ハザード率λ_i^kを特性ベクトル$\boldsymbol{x}^k$を用いて

$$\lambda_i^k=\boldsymbol{x}^k\boldsymbol{\beta}_i' \tag{24}$$

と表そう．ただし，$\boldsymbol{\beta}_i=(\beta_{i,1},\cdots,\beta_{i,H})$は未知パラメータ$\beta_{i,h}$ $(h=1,\cdots,H)$による行ベクトル，記号「$'$」は転置操作を表す．また，$x_1^k=1$より，$\beta_{i,1}$は定数項を表す．ここで，前回の点検時刻$\bar{t}_{r_k-1}$における損傷度別相対頻度分布を

$$\boldsymbol{\pi}^{r_k-1}=\left(\overline{\pi}_1^{r_k-1},\cdots,\overline{\pi}_M^{r_k-1}\right) \tag{25}$$

と表そう．ただし，$\overline{\pi}_i^{r_k-1}$ $(i=1,\cdots,M)$は、点検時刻$\bar{t}_{r_k-1}$において，コンクリート版kの総面積に損傷度iの損傷箇所の面積が占める割合を表す．時刻$\bar{t}_{r_k-1}$と時刻$\bar{t}_{r_k}=\bar{t}_{r_k-1}+\bar{z}_{r_k}$において点検・補修間隔$\bar{z}_{r_k}$における推移確率行列を

$$\boldsymbol{p}^k(\bar{z}_{r_k})=\begin{pmatrix}p_{11}^k(\bar{z}_{r_k}) & \cdots & p_{M1}^k(\bar{z}_{r_k})\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ p_{M1}^k(\bar{z}_{r_k}) & \cdots & p_{MM}^k(\bar{z}_{r_k})\end{pmatrix} \tag{26}$$

と表せば，時刻$\bar{t}_{r_k-1}$で評価した時刻$\bar{t}_{r_k}$における損傷度別相対頻度の予測値$\boldsymbol{\pi}_i^{r_k}$は

$$\boldsymbol{\pi}_i^{r_k}=\boldsymbol{\pi}^{r_k-1}\boldsymbol{p}^k(\bar{z}_{r_k}) \tag{27}$$

と表される．式(27)を具体的に書けば,

$$\pi_j^{r_k}=\sum_{i=1}^{j}\overline{\pi}_i^{r_k-1}p_{ij}^k(\bar{z}_{r_k})\quad(r=1,\cdots,I) \tag{28}$$

と表される．行和と列和の順序を入れ替えれば、相対頻度$\pi_j^{r_k}$に関して

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{I}\pi_j^{r_k}&=\sum_{j=1}^{I}\sum_{i=1}^{j}\overline{\pi}_i^{r_k-1}p_{ij}^k(z_{r_k})\\&=\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=i}^{I}\overline{\pi}_i^{r_k-1}p_{ij}^k(z_{r_k})=\sum_{i=1}^{I}\overline{\pi}_i^{r_k-1}=1\end{aligned}$$

が成立する．ここで，時刻$\bar{t}_{r_k}$において観測された損傷度別頻度分布の観測値を$\bar{e}_j^{r_k}$と表そう．この時，観測値ベクトル

$$\boldsymbol{e}_{r_k}=(\bar{e}_1^{r_k},\cdots,\bar{e}_M^{r_k}) \tag{29}$$

が生起する確率密度（尤度）$\mathcal{L}_{r_k}(\boldsymbol{\theta}_{rk}:\boldsymbol{\beta})$は，多項分布

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{r_k}(\boldsymbol{\theta}_{r_k})&=f(\bar{\boldsymbol{e}}_{r_k})\\&=\frac{S^k!}{\bar{e}_1^{r_k}!\cdots\bar{e}_M^{r_k}!}\prod_{j=1}^{M}(\pi_j^{r_k})^{\bar{e}_j^{r_k}}\end{aligned} \tag{30}$$

と表される．したがって，観測値が生起する同時生起分布は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\boldsymbol{\Theta})&=\prod_{k=1}^{K}\prod_{r_k=1}^{T^k}f(\bar{\boldsymbol{e}}_{r_k})\\&\propto\prod_{k=1}^{K}\prod_{r_k=1}^{T^k}\prod_{j=1}^{M}(\pi_j^{r_k})^{\bar{e}_j^{r_k}}\\&=\prod_{k=1}^{K}\prod_{r_k=1}^{T^k}\prod_{j=1}^{M}\left\{\sum_{i=1}^{j}\overline{\pi}_i^{r_k-1}p_{ij}^k(\bar{z}_{r_k}:\boldsymbol{\beta})\right\}^{\bar{e}_j^{r_k}}\end{aligned} \tag{31}$$

と表される．式(31)の対数尤度関数を最大にするようなパラメータ値$\boldsymbol{\beta}$の最尤推定量は

$$\frac{\partial\ln\mathcal{L}(\boldsymbol{\Theta}:\hat{\boldsymbol{\beta}})}{\partial\beta_{ih}}=0 \tag{32}$$
$$(i=1,\cdots,M-1;h=1,\cdots,H)$$

を同時に満足する$\hat{\boldsymbol{\beta}}=(\hat{\beta}_{1,1},\cdots,\hat{\beta}_{i,h},\cdots,\hat{\beta}_{M-1,H})$として与えられる．

4. おわりに

本研究では，補修タイプ別の補修工事量という集計的劣化情報を用いて，下水処理施設のマルコフ劣化モデルを作成した．その上で，期待ライフサイクル費用を最小にするような点検・補修間隔を求めるための最適点検・補修モデルを提案した．下水処理施設の最適点検・補修モデルを用いた実証分析の結果については発表時に報告させていただきたい．

参考文献

1) 津田尚胤，貝戸清之，青木一也，小林潔司：橋梁劣化予測のためのマルコフ推移確率の推定，土木学会論文集，No.801/I-73，pp.68-82, 2005.