動的均衡配分問題における解の特性に関する研究解説*

Reviews of studies on characteristics of solutions in dynamic use equilibrium assignments*

井料隆雅**
By Takamasa IRYO**

1．はじめに

Wardropによる均衡配分の概念の提唱以来多くの研究が交通ネットワークの均衡配分問題について行われ，解の性質についても多くの知見が得られている．均衡状態は（例えば確定的均衡配分問題であれば）「利用者は一般化交通費用が最小の経路しか使用しない」と表現されるように，解が「結果として」満たすべき条件を記述するものであり，この解の実現を保障する手順を示すものではない．このことは，均衡状態を実際のネットワーク上における交通流の状態とみなそうとする際には

均衡解の存在:所与の条件下で均衡解は存在するのか？
∵ 存在しないものを利用することは出来ない．
均衡解の一意性:均衡解は１個か多数か？
∵ 均衡解の数が複数ならば全部見つける必要がある．
均衡解の安定性:Day-to-dayの配分プロセスを指定したとき，均衡解は外的ノイズに対して安定か？
∵ 均衡解が外的ノイズに対して不安定ならば，その均衡解が長期間保持されることは期待できない．

の３つの性質を確認しなければならないことを意味する．

本研究では，動的均衡配分問題におけるこれら３つの解の性質について，既存研究をベースに，その数学的特徴に着目して解説することを行う．なお，本論文ではポイントキューのボトルネックモデルのみを集中して紹介する．ボトルネックモデルでは，リンク旅行時間は「リンク自由流旅行時間」と「リンク上のボトルネックにおける待ち時間」の和で示される．ボトルネックは一定の容量を持ち，その容量を超えた交通流が流入するとボトルネックの直前で待ち行列が発生する．なお，この待ち行列がリンクの最上流部を超えて延伸することは考慮されない（これをポイントキューと呼ぶ）．リンクの遅れ時間モデルとしてはWhole-Linkモデルと呼称されるモデル群もあるが[1]，紙面の都合上本稿では省略する．

また，本稿では主に「各車両の出発時刻は所与であり，各車両が行える選択行動は経路選択のみである」場合のみを考える．出発時刻選択を考慮した場合の分析については第４章で言及する．

2．動的均衡配分問題における解の存在の証明

動的均衡配分における解の存在の証明は，Smith and Winstenにより示されている[2]．彼らは，ネットワークに流入する交通流を $\mathbf{X}$ で示したときに

$$T(\mathbf{X}) = \mathbf{X} \tag{1}$$

の関係が均衡状態と等価になる写像T を利用し（当該論文では，この写像は Day-to-day の配分プロセスを示すものとして定義されている），この写像が不動点を必ず持つことを Schauder の不動点定理を用いて示している．ただしSmith and Winstenの証明は経路費用関数の連続性を前提としている．この連続性の厳密な証明はMounceにより示されている[3]．

3．動的均衡配分問題の解の一意性と安定性の証明

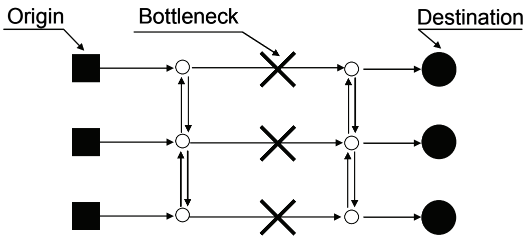
動的均衡配分問題における解の一意性と安定性の証明に関する既存研究での分析を紹介する．なお，動的均衡配分問題におけるこれらの特性の分析はネットワーク構造に制約を設けて行われることが多い．本稿でもこの制約に沿って既存研究を分類して紹介する．

（1）１経路１ボトルネックネットワーク(O/R-Net)での分析

１経路１ボトルネックネットワークとは，１経路にボトルネックが２個以上含まれることがないネットワークのことを指す．このときどの車両も目的地に到着するまでに２個以上のボトルネックを通過することはない．以降ではこの制約をO/R(One bottleneck per route)制約，またO/R制約を持つネットワークをO/R-Netと呼ぶことにする（図―１）．なお，O/R-Netでは多起点および多終点の存在も許容されることに注意したい．

O/R-Netにおける動的均衡配分問題の解の一意性の証明は，静的均衡配分問題においてSmithが示した方法[4]と同様の方法で示せる．Smithは，リンク交通量がリン

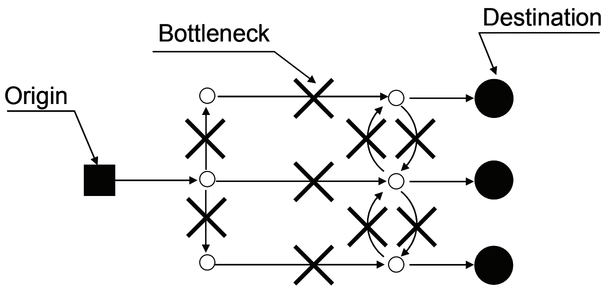
*キーワード：動的均衡配分
**正員,博士(工学),神戸大学大学院工学研究科市民工学専攻（神戸市灘区六甲台町1-1），TEL 078-803-6360



図—１　O/R-Netの一例

ク旅行時間に対して狭義単調増加であれば均衡状態におけるリンク交通流が一意に定まることを，Variational Inequality(VI)を用いて示している． 動的な問題の場合でも，出発時刻を固定した動的均衡配分問題では，利用者の経路選択行動は出発時刻ごとに静的配分の場合と同様に記述すればよいため，上記で示した静的配分問題における式展開がそのまま使用可能なことが期待できる．実際，動的な均衡状態を示す式として，静的配分の VI の式と同等な式が利用できる（ただし，リンク交通量ではなく経路交通量を用いた式である）ことが Smith and Winsten[2]により示されている．問題は経路費用関数の単調増加性である．ボトルネックモデルでは，「O/R-Net に限って」経路費用関数の単調増加が成立することが知られている[5]．これは狭義単調増加性ではないために，均衡状態で経路交通量が唯一に定まることは保証できないが，経路交通量が必ず唯一の凸集合を形成することが Mounce により示されている[3]．

O/R-Net における均衡解の安定性については，Smith が静的配分で行った Lyapunov 関数における方法[6]と同様に証明可能ではないかという見通しが Smith and Winsten から示されていた[2]．数学的厳密性（特に微分可能性の問題）も含めての証明は，最近になって Mounce により示されている[7]．この証明では，「利用者はより費用が高い経路から低い経路に順次移動する．その移動速度は『経路費用の差』×『高い経路の利用者数』に比例する」というメカニズムを Day-to-day の配分プロセスとして使用している（この配分プロセスは Smith が静的配分で用いたもの[6]と同様である）．Mounce は，Smith が静的配分で用いた Lyapunov 関数と同様の関数を Lyapunov 関数として定義した．そして，Lyapunov 関数を日数によって（ここでは日数は連続変数として扱われている）微分すると，「均衡解以外では常に負になる項」と「経路費用関数が単調増加であれば正になることはない」項の２つが得られることを示している．これにより，Lyapunov 関数は日数経過によってつねに減少し，その結果，いかなる状態を初期状態としても系は均衡状態に収束することが示されている．以上のことは，O/R-Net でさえあれば，動的均衡配分問題は静的均衡配分問題と同様の安定性を確保できることを示している．



図—２　One-to-many ネットワークの一例

（２）起点が１個の場合（One-to-many ネットワーク）

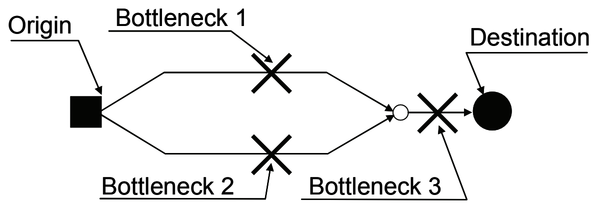
One-to-many ネットワークとは，起点を１個しかもたないネットワークのことを指す（図—２）．このようなネットワークにおける解法は Kuwahara and Akamatsu[8]および赤松・桑原[9]により示されている．解の一意性や安定性はまだ一般的には示されていない．全リンク上のボトルネックに常に待ち行列が存在している，という特殊な条件下でのみ，問題を線形方程式に置換でき，一意な解が得られることが示されている[10]．

（３）１経路に複数ボトルネックを含む場合.

O/R-Net において一意性（厳密には解が唯一の凸集合を形成することを含む．以下同じ）と安定性が成立するのは，O/R-Net では経路費用関数が経路交通量に対して必ず単調増加になるからであった．経路費用関数の単調増加性は一意性と安定性の十分条件であるため，１経路に複数のボトルネックがある場合でも単調増加性が言えれば，均衡解の一意性と安定性が言える．

しかし，１経路に複数のボトルネックがある場合には経路費用関数の単調増加性は一般には成立しない．１経路に２つのボトルネックが存在する場合には，単調増加ではない経路費用関数が存在する，という反例がすでに桑原[11]と Mounce[12]により示されている．

経路費用関数が単調増加にならない例を，桑原が示した例[11]と同様の方法で示す．ネットワークを図—３に示す．ここで，ボトルネック１を使う経路を経路１，ボトルネック２を使う経路を経路２とし，両経路の自由流旅行時間はたがいに等しいとする．また，「ボトルネックの容量はすべて等しい」「各ボトルネックの容量の５倍の交通量が起点から継続して流入する」とする．いま，経路１に容量の$\left(5-\alpha\right)$倍の交通量を，経路２に容量のα倍の交通量を継続して流入させる（$0 \le \alpha \le 1$）と，ボトルネック１とボトルネック３にのみ待ち行列が発生する．一般に，容量のx倍（$x > 1$）の交通量が定常的に流入し続けるボトルネックでの遅れ時間は，最初の車両が流入した時刻をsとすれば$\left(x-1\right)s$と示せるので，両経路の遅れ時間は，起点出発時刻tを用いて



図―３　費用関数が単調増加にならないネットワーク

経路１：　$\left(4-\alpha\right)t+\alpha\left(t+\left(4-\alpha\right)t\right)$　(2)

経路２：　αt　(3)

と示せる．式(2)の第１項はボトルネック１での遅れ時間，第２項はボトルネック２での遅れ時間を示しているが，ボトルネック２への流入時刻がボトルネック１での遅れ時間に依存することに注意したい．ここで，単調増加性を議論するために，両式をαで微分すると

経路１：　$\left(4-2\alpha\right)t$　(4)

経路２：　t　(5)

となる．αが１以下であることを考えれば，この結果は「経路１から経路２に車両を移動しても，経路１の遅れ時間は増加する」ことを意味する．またその増加量は経路２の費用の増加量より大きい．このために，経路費用関数の単調増加性が成立しなくなる．

このような現象の原因は「上流と下流のボトルネック間の依存関係」にある，より具体的には，

i) 下流へのボトルネックへの流入交通量は，上流のボトルネック容量で制限される．

ii) 下流へのボトルネックへの流入時刻は，上流のボトルネックでの遅れ時間に依存する．

と書ける．上記の例では，これらの要因が

1. ボトルネック１からの流出交通量はαに関係なく容量と等しいため，経路１の車両が減ると，経路２の車両が増え，ボトルネック３の遅れ時間は増大する．
2. ボトルネック１での遅れ時間はαに関係なく相当量あるため，経路１の車両は遅い時刻（＝混雑がより激しい時刻）にボトルネック３へ流入する．
3. 結果として，ボトルネック１での遅れ時間の減少よりもボトルネック３での遅れ時間の増大が大きくなり，経路１の遅れ時間が増大する．

のように働くことにより単調増加性が失われている．

なお，経路費用関数が単調増加にならないということは，均衡解の一意性や安定性そのものを否定することではないことに注意したい．単に，第２章で紹介したような，静的均衡配分のときと同様な方法で一意性や安定性を証明する手法が使用できない，ということである．

４．出発時刻選択問題における解の特性

本章では，Vickrey モデル[13]による動的均衡配分問題（出発時刻選択問題）の解の特性について触れる．出発時刻選択問題では，利用者は到着地でのスケジュール制約とボトルネックでの遅れ時間を考慮して出発時刻を選択する．この問題における解の存在と一意性については単一 OD では Smith[14]，Daganzo[15]，Lindsey[16]の証明がある．また，O/R-Net における出発時刻選択問題については井料ら[17]の分析がある．これらの研究のポイントは，利用者の時刻選択行動を，出発地出発時刻ではなくボトルネック出発時刻を基準に問題を記述し，スケジュール制約と容量制約を同時に数式に組み込んでいることである（井料らの研究[17]では，このことを利用して均衡問題を最適化問題（線形計画法）に置換している）．

しかし O/R-Net でないネットワークでは問題をボトルネック出発時刻で記述することは不可能であり，解析は極めて複雑となる．このようなネットワークの分析例限定的な状況のみで分析されており[18,19]，一般的な解の存在や一意性を証明するにはいたっていない．

出発時刻選択問題では解が安定になるとは限らないことが井料により数値的に示されている[20]．また，越による報告[21]の中にも安定性に関する問題の存在を示唆する記述がある．均衡解の不安定性に関する理論的な分析は Iryo によるものがある[22]．

５．おわりに

本稿では，動的均衡配分の解の性質について，存在，一意性，安定性について既存研究のレビューを中心とした議論を行った．それにより，均衡解の存在は一般的に言える一方，一意性と安定性については限定的なケースでしか既存研究では証明されていないことを示した．

本稿での議論の中でもっとも重要な点となったのは「１つの経路の中にボトルネックが存在する数」であった．この数が１個である O/R-Net では一意性（厳密には一意な凸集合）および安定性が静的均衡配分と同様の方法で証明できる一方で，２個以上のボトルネックが経路に存在するとそのような方法が使用できなくなることを示した．また，出発時刻選択問題においても O/R-Net の制約が重要であることも指摘した．

O/R-Net の制約を外したときに問題が発生する理由としては「上流と下流のボトルネック間の依存関係」を挙げることができよう．この依存関係により経路費用関数の単調増加性が崩れることは第３章で記したとおりである．また，この依存関係には経路交通量とリンク交通量の関係を複雑にするという側面もある．静的均衡配分では経路ベースの問題を容易にリンクベースに置換可能で

あり，その結果として一般のネットワークにおける一意性や安定性を保証することが可能となっている．しかし動的な交通流では，上流と下流のボトルネック間の依存関係のために，経路ベースの問題をリンクベースに置き換えることは容易ではない[5]．実際，この依存関係を確実に解きほぐす方法論は第３章（２）で示した One-to-many ネットワークで提示されたもの[8,9]しか今のところ見当たらない．

本稿で記した既存研究の成果と課題を考えれば，今後は１経路に複数ボトルネックがありうる一般的なネットワークにおける研究をより進めるべきであると考える．その結果として，もしかしたら複数の均衡解や安定しない均衡解の存在が報告されるかもしれない．いずれにしても動的均衡配分問題にはまだまだ未知の部分が多いのが現状のようである．

参考文献

1) Carey, M. and Ge, Y.E.: Comparing whole-link travel time models. *Transportation Research Part B: Methodological*, **37**(10), 905-926, 2003.

2) Smith, M.J. and Wisten, M.B.: A continuous day-to-day traffic assignment model and the existence of a continuous dynamic user equilibrium. *Annals of Operations Research*, **60**, 59-79, 1995.

3) Mounce, R.: Dynamics and equilibrium in a continuous queueing model for traffic networks. *Paper presented at the 4th IMA International Conference on Mathematics in Transport, University College London*, 2005.

4) Smith, M.J.: The existence, uniqueness and stability of traffic equilibria. *Transportation Research Part B: Methodological*, **13**(4), 295-304, 1979.

5) Smith, M.J. and Ghali, M.: *Dynamic traffic assignment and dynamic traffic control*, in *Transportation and Traffic Theory: Proceedings of the Eleventh International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, M. Koshi, Editor, Elsevier Science Publishing: New York. 273-290, 1990.

6) Smith, M.J.: The stability of a dynamic model of traffic assignment - an application of a method of Lyapunov. *Transportation Science*, **18**(3), 245-252, 1984.

7) Mounce, R.: Convergence in a continuous dynamic queueing model for traffic networks. *Transportation Research Part B: Methodological*, **40**(9), 779-791, 2006.

8) Kuwahara, M. and Akamatsu, T.: *Dynamic equilibrium assignment with queues for a one-to-many OD pattern*, in *Transportation and Traffic Theory: Proceedings of the 12th International Symposium on the Theory of Traffic Flow and Transportation*, C.F. Daganzo, Editor, Elsevier: New York. 185-204, 1993.

9) 赤松隆, 桑原雅夫: 渋滞ネットワークにおける動的利用者均衡配分. 土木学会論文集, No. 488/IV-23, 21-30, 1994.

10) Akamatsu, T. and Heydecker, B.: Detecting dynamic traffic assignment capacity paradoxes in saturated networks. *Transportation Science*, **37**(2), 123, 2003.

11) 桑原雅夫: 渋滞したネットワークにおける動的均衡配分に関する考察. 土木学会論文集, No. 419/IV-13, 123-126, 1990.

12) Mounce, R.: Non-monotonicity in dynamic traffic assignment networks. *Proceedings of the 33rd Universities Transport Study Group annual conference, University of Oxford, UK*, 2001.

13) Vickrey, W.S.: Congestion theory and transport investment. *The American Economic Review*, **59**(2), 251-260, 1969.

14) Smith, M.J.: The existence of a time-dependent equilibrium distribution of arrivals at a single bottleneck. *Transportation Science*, **18**(4), 385-394, 1984.

15) Daganzo, C.F.: The uniqueness of a time-dependent equilibrium distribution of arrivals at a single bottleneck. *Transportation Science*, **19**(1), 29-37, 1985.

16) Lindsey, R.: Existence, uniqueness, and trip cost function properties of user equilibrium in the bottleneck model with multiple user classes. *Transportation Science*, **38**(3), 293-314, 2004.

17) 井料隆雅, 吉井稔雄, 朝倉康夫: 出発時刻選択問題の均衡状態に関する数理的分析. 土木学会論文集, 779/IV-66, 105-118, 2005.

18) Kuwahara, M.: Equilibrium queueing pattern at a two-tandem bottleneck during the morning peak. *Transportation Science*, **24**(3), 217-229, 1990.

19) Arnott, R., De Palma, A., and Lindsey, R.: Properties of dynamic traffic equilibrium involving bottlenecks, including a paradox and metering. *Transportation Science*, **27**(148-160), 1993.

20) 井料隆雅: 出発時刻選択問題の理論的解析とその適用に関する考察. 東京大学博士論文, 2002.

21) 越正毅: 動的課金による渋滞解消のシミュレーション. 高速道路と自動車, **50**(2), 14-22, 2007.

22) Iryo, T.: An analysis of instability in a departure time choice problem. *Paper submitted to Proceedings of 3nd International Symposium on Transport Network Reliability* 2007.