経済環境の不確実性を伴うCore-Peripheryモデルにおける社会的最適資源配分*
Socially Optimal Dynamic Allocation in Core-Periphery Model with Economic Uncertainty*

山崎周一**・赤松隆***・織田澤利守***

By Shuichi YAMAZAKI**・Takashi AKAMATSU***・Toshimori OTAZAWA***

1．はじめに

KrugmanのCore-Periphery（CP）モデルは，労働力（生産要素）の地域間移動，及び，それに伴う経済活動の空間的な集積・分散現象を一般均衡理論的に扱った先駆的な研究である[1]．このCPモデルでは，集積の外部性に起因して複数の均衡解が存在しうることが示された．しかし，複数解が存在する場合，どのような要因によっていずれの均衡解が実現するか示すことができず，均衡選択が課題として残されていた．

この課題に対し，織田澤・赤松[2]は，均衡解が選択される要因として経済環境の不確実性を考慮することで，均衡選択経路の一意性を示した．織田澤・赤松が提案した動的均衡モデルとは，将来起こりうる全ての状況を確率的に織り込んだ労働者を仮定し，将来にわたって獲得する総効用を最大化するような地域間移住を行う予見的ダイナミクス（Perfect-foresight Dynamics）である．このモデルの分析より，どの労働者も，自分だけが移住しても，自分の総効用を改善できない状態（動的均衡状態）では，移住フローが一意に決まることを示し，人口移動の均衡経路が確率的に実現する経済環境のサンプルパスに応じて，一意に決定されることを示した．さらに，動的均衡状態において長期的に実現する人口配分（の確率分布）の性質を明らかにした．

本研究は，厚生分析でベンチマークとなる社会的最適資源（DSO: Dynamic Social Optimal）配分状態を求めることを目的とする．ここで，DSO配分状態は，経済全体の効用の総和が最大化された状態を意味する．本研究では，このDSO配分状態から求まる最適制御ルールを導き，経済状態に応じた最適な移住政策の性質について明らかにする．その上で，動的均衡状態と比較を行い，移住政策のあり方とその有効性について検討を行う．

*キーワーズ：CPモデル,不確実性,社会的最適資源配分

**学生正員、東北大学大学院情報科学研究科（宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-06, TEL022-795-7507、FAX022-795-7505）

***正員、東北大学大学院情報科学研究科（宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-06, TEL022-795-7507、FAX022-795-7505）

2．短期均衡

短期均衡の分析では，Krugman[1]のCPモデルを扱いやすくしたForslid and Ottabiano[3]の定式化を採用する．以降では，一般均衡の枠組みから間接効用関数を導出する．

a) 地域

経済は対称な2地域（m=1,2; 1≠2）で構成される．この経済には，生産要素として，高技能労働者（skilled）がHと，低技能労働者（unskilled）がL存在する．ただし，基準化によりH=L=1とする．

b) 部門

この経済には，完全競争的な部門Aと独占競争的な部門Mが存在する．部門Aは，収穫不変の技術により，unskilledを生産要素として同質な財Aを生産する．一方，部門Mは収穫逓増の技術により，財Mをx_m単位生産する場合，skilled αとunskilled βx_mを生産要素として，広範囲の差別化された財を生産する．

c) 財の輸送

財Mの輸送費用には，氷解費用の形をとる．すなわち，1単位の財が輸送されると，$\phi \equiv 1/\tau$ だけ到達する．一方，財Aには輸送費用はかからないと仮定する．

d) 生産要素の行動

unskilledは両地域に均等に居住し，移動不可能である．一方，skilledは地域間を自由に移動可能である．ただし，skilledは居住した地域において労働を供給するものとする．また,この両要素は消費者として振舞う際，Cobb-Douglas型効用関数：

$$U_m = M_m^{\lambda} A_m^{1-\lambda} \tag{1}$$

$$M_m \equiv \left[\int_{s\in N} d_m(s)^{(\xi-1)/\xi} ds \right]^{(\xi-1)/\xi} \tag{2}$$

で表される選好を持つ．ただし，M_mは式(2.2)で定義される財Mの消費，A_mは財Aの消費を表す．また，$\lambda \in (0,1)$は財Mの支出割合を表す定数，$d_m(s)$は各財$s \in N$の消費量とする．パラメータ$\xi < 1$は任意の差別化された2財間の弾力性を表す．skilledは自身の総効用を最大化するように地域間を自由に移動する．一方，unskilledは移動不可能である．以上の仮定より，一般均衡の枠組みから，

skilled，及びunskilledの間接効用関数W_m，W_m^Lが，地域mのskilled数H_mの陽関数として次のように決定される：

$$\begin{cases} W_m(H_m, H_n) = \eta w_m(H_m, H_n) P_m^{-\lambda}(H_m, H_n) \\ W_m^L(H_m, H_n) = \eta P_m^{-\lambda}(H_m, H_n) \end{cases}, \tag{3}$$

ここで，

$$w_m(H_m, H_n) = \frac{\nu}{1-\nu}\frac{L}{2}\frac{2\phi H_m + [1-\nu+(1+\nu)\phi^2]H_n}{\phi(H_m^2+H_n^2)+[1-\nu+(1+\nu)\phi^2]H_m H_n}, \tag{4}$$

$$P_m(H_m, H_n) = \frac{\beta\xi}{\xi-1}\left(\frac{H}{\alpha}\right)^{1/(1-\xi)}[H_m+\phi H_n]^{1/(1-\xi)}, \tag{5}$$

である．ただし，$\eta \equiv \lambda^{\lambda}(1-\lambda)^{1-\lambda}$，$\nu \equiv \lambda/\xi$とした．ここで，$H_1+H_2=1$であることから，$H_1=h$，$H_2=1-h$という表現が可能である．従って，本章以降では，間接効用関数を，地域1の人口hの陽関数として扱う．

３．社会的最適資源配分モデル

（１）インパルス制御問題[4]として定式化

skilledの移住フローを制御することで，DSO配分状態を実現する．ここで，移住は無限の移動期間[0,+∞)で行われる．また，時刻$t\in[0,+\infty)$における輸送費用 が，以下の幾何ブラウン運動に従うと仮定する：

$$dX(t)/X(t) = \mu\, dt + \sigma\, dz. \tag{6}$$

ただし，μはドリフト，σはボラティリティ，dzは標準Wiener過程の増分である．

状況$(\cdot)\equiv(h, X)$下で，経済全体（skilled，及びunskilled）の間接効用の総和を社会的効用$SW(\cdot)$と定義する：

$$SW(\cdot) = hW_1(\cdot) + (1-h)W_2(\cdot) + \frac{1}{2}(W_1^L(\cdot) + W_2^L(\cdot)). \tag{7}$$

第1・2項は，各地域のskilledの間接効用の総和，第3・4項は各地域のunskilledの間接効用の総和である．unskilledは移動不可能で，均衡に居住するため，地域mのunskilled数$L_m = 1/2$である．社会的効用は，Xの関数であるため，それ自身も確率過程である．DSO配分モデルでは，時刻θにskilledの移住フロー$\Delta h(\theta)$を制御することで，期間[0,+∞)に発生する総社会的効用フローの現在正味価値の期待値を最大化する．ここで，移住フロー$\Delta h(\theta)$は時間に対して離散的に変化し，かつ，制御には時間がかからないため，制御変数である移住フローはインパルス的な性質を持つ．制御には費用：

$$C(\theta) = \Delta h(\theta)/\gamma \tag{8}$$

を要する[5]．ここで，γは移住費用パラメータである．従って，任意の状況(t, h, X)で，期間[0,+∞)に発生する総社会的効用フローの時刻tでの現在正味価値SJは，以下の式で表される：

$$SJ(t, X, h) \equiv \int_t^{\infty} e^{-rs} SW(s, X, h) ds - \sum_i^{\infty} e^{-r\theta_i} C(\theta_i). \tag{9}$$

ここで，rは割引率を表す．式(9)において，第1項は対象期間中の総社会的効用フローの現在正味価値を，第2項は制御に必要とされる費用の総和を表す．以上より，DSO配分状態を求める問題は，次のようにインパルス制御問題として定式化できる：

$$\max_{\{\Delta h(t) | t\in[0,\infty)\}} .E_0[SJ(0, X_0, h_0 \mid X(0) = X_0, h(0) = h_0)]. \tag{10}$$

s.t.　Eq.(6)

（２）最適制御条件の導出

ここでは，各瞬間においてDSO配分状態が満たすべき最適制御条件を示す．任意の状況(t, h, X)において，以後最適な制御を行った場合に得られる総社会的効用フローの現在正味価値の期待値を，最適値関数として以下のように定義する：

$$SV(t, X, h) \equiv \sup_{\{\theta_i, \Delta h\}} .E_t[SJ(t, X, h \mid X(t) = X, h(t) = h)]. \tag{11}$$

ただし，SJは式(9)で定義される期間[0,+∞)に得られる総効用フローの現在正味価値である．式(3.6)は期待値のネストを用いて，以下のように記述できる．

$$SV(t, X, h) \equiv \int_t^{\theta_i} e^{-rs} SW(s, X(s), h(s)) ds + e^{-rs}\{SV(\theta_i, X(\theta_i), h(\theta_i)) - C(\theta_i) \mid X(t) = X, h(t) = h\} \tag{12}$$

ただし，θ_iは時刻t以降で最初に制御が行われる時刻である．また，$SV(\theta_i, X(\theta_i), h(\theta_i))$は，制御が実行された後の状況での最適値関数を表す．ここで，無限の移動期間[0,+∞)を定義しており，かつ毎期の間接効用フローが時間に依存しないため，最適値関数$SV(\cdot)$は時間に依存しない形で書き直すことができる．

式(11)で表される最適値関数$SV(X, h)$は，状況(X, h)における最適な制御は，a) skilledをΔhだけ移住させるか，b) 微小時間dtだけ移住を延期する，のいずれかを離散的に選択する問題と同値である．従って，時刻における制御パターンは以下のように場合わけできる．

a) 移住を実行する場合：

$\Delta h > 0$　状況(X, h)でskilledをΔhだけ移住させることが望ましい場合，移住費用Cを支払うことで，$SV(X, h-\Delta h)$を得る．従って，移住の価値$MSV(X, h)$は，

$$MSV(X, h) \equiv \sup_{\{\Delta h\}}[SV(X, h-\Delta h) - C(\Delta h)] \tag{13}$$

と表される．移住価値(13)は，移住の実行が望ましい場合は最適値関数(12)と等しくなり，移住の延期が望ましい場合は最適値関数(12)より小さくなるため，以下の不等式：

$$SV(X, h) \geq MSV(X, h). \tag{14}$$

が成立する．

b)　移住を延期する場合：

$\Delta h = 0$　状況$(\cdot) \equiv (h, X)$で微小時間dtだけ移住の延期が望ましい場合，最適値関数の定義より，以下の定義式：

$$SV(t, X, h) = SW(t, X(t), h(t))dt + e^{-rdt} E_t\left[SV(t+dt, X(t+dt), h(t+dt))\right] \tag{15}$$

が成立する．DP分解，伊藤の補題を用いて式(15)の期待値演算内を展開・整理すれば，以下の等式：

$$-LSV(\cdot) - SW(\cdot) = 0 \tag{16}$$

を得る．ここで，Lは偏微分作用素で，以下の式：

$$L \equiv \mu X \frac{\partial}{\partial X} + \frac{1}{2}(\sigma X)^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} - r \tag{17}$$

で定義される．一方，移住の実行が望ましい場合，式(15)の左辺が右辺より大きいため，式(16)も左辺が右辺より大きくなる．従って，以下の不等式を得る．

$$-LSV(\cdot) - SW(\cdot) \geq 0 \ . \tag{17}$$

を得る．

以上，a)，b) をまとめると，不確実性を考慮したDSO配分問題は，任意の状況$(\cdot) \equiv (h, X)$において，下記のような連続空間の一般化非線形相補性問題(GNCP)として表現できる．

$$[\mathrm{GNCP}] \begin{cases} \{SV(\cdot) - MSV(\cdot)\}\{-LSV(\cdot) - SW(\cdot)\} = 0 \\ SV(\cdot) - MSV(\cdot) \geq 0, \ -LSV(\cdot) - SW(\cdot) \geq 0 \end{cases} \tag{18}$$

式(18)は無限次元の問題であり，そのまま数値計算によって解くことは難しい．そこで，連続空間を離散化し，有限次元の問題へ帰着する．本研究では，有限次元の問題として表現し，Peng and Lin[6]の解法を活用することで，DSO配分問題を解くアルゴリズムを開発した．

4．数値実験

開発したアルゴリズムを用いて数値実験を行うことで，状態空間(h, X)における最適制御パターン（DSO配分ルール）が求まる．図-1に典型的なDSO配分ルールを示す．DSO配分ルールには，移住を延期する領域（延期領域）と，移住を実行する領域があり，移住を実行する領域では，地域1の人口hが矢印の方向に変化する．織田澤・赤松が示した動的均衡状態と違う点は，移住が全く行われない領域が存在する点である．

図-1より，輸送費用が大きい場合には分散状態，輸送費用が小さい場合には集積状態が望ましいことがわかる．一方，中間的な場合は，集積状態が望ましい領域と分散状態が望ましい領域が同時に存在し，集積・分散のどちらが望ましいかは初期の人口配分に応じて決定される．また，輸送費用が非常に小さくなる（0に近づく）と，地域間の期待効用に差がなくなるため，総移住費用を上回る期待効用の増加が見込めない．従って，移住を延期

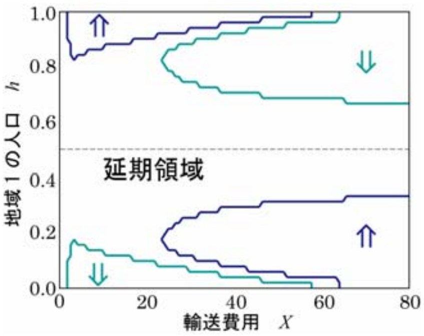


図-1　典型的なDSO配分ルール（σ=0.2，ρ=0.08）

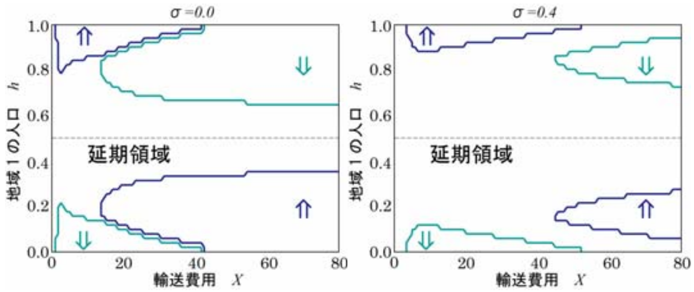


図-2　ボラティリティに対する性質

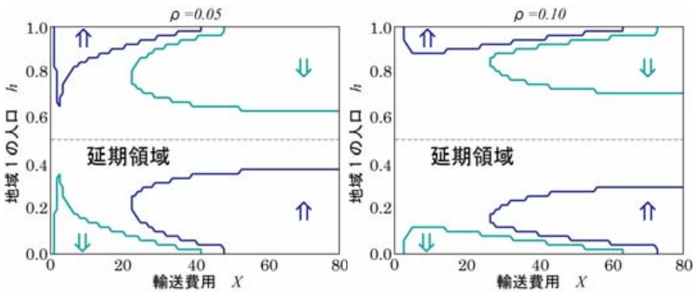


図-3　割引率に対する性質

することが望ましくなる．これらの領域は各パラメータ（ボラティリティ：σ，割引率：r，移住費用：γ）によって変化する．以下に各パラメータに対するDSO配分ルールの性質を示す．

a)　不確実性の度合い（ボラティリティσ）に関する性質

図-1にボラティリティσがDSO配分ルールに与える影響を示す．σの増加は，輸送費用が変動するリスクの増加を意味する．図より，分散状態が望ましい領域は右へシフトし，集積状態が望ましい領域と分散状態が望ましい領域が同時に存在する，輸送費用の範囲が縮小していることがわかる．また，変動するリスクの増加により，待ちオプション価値が高くなるため，延期領域が拡大する．すなわち，リスクの増加により，初期の人口配分がDSO配分状態に及ぼす影響が小さくなっている．

命題 1

不確実性の度合いが増加すると，初期の人口配分がDSO配分状態に及ぼす影響が小さくなる．

b) 割引率rに関する性質

図−3に割引率rがDSO配分ルールに与える影響を示す．rの増加に伴い，延期領域が拡大する．これは，rの増加により，将来得られる期待効用の正味現在価値が減少し，総移住費用を上回る期待効用の増加が見込めないためである．σが増加する場合と違い，rの増加は輸送費用が変動するリスクに影響を与えないため，分散状態が望ましい領域が右へシフトしない．また，DSO配分ルールは，制御によって将来得られる期待効用の増分と移住費用γの大小関係から決定されるため，γの増加とrの増加は同じ性質を持つ．従って，γのDSO配分ルールへの影響は，**図−3**と同じような結果が得られる．なお，紙面の都合上，DSO配分ルールを示した図は省略する．

命題 2

割引率が増加，もしくは，移住費用が増加すると，DSO配分ルールにおける延期領域が拡大する．

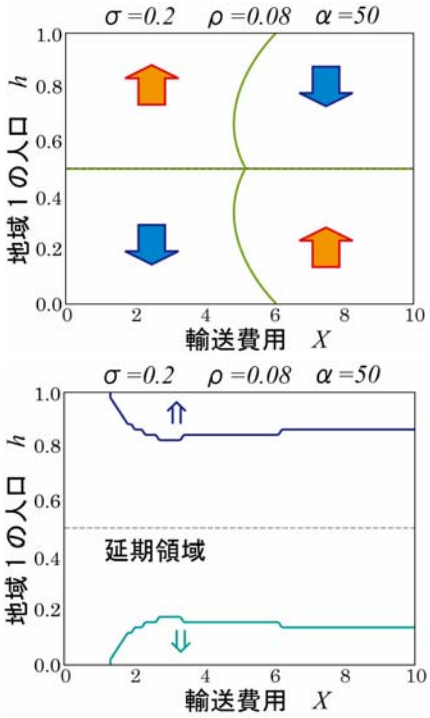
5．社会的最適資源配分状態と動的均衡状態の比較

DSO配分状態と動的均衡状態の移住フローの違いを明らかにする．まず，**図−4**の左図に示す動的均衡状態を見ると，輸送費用が低い場合は移動フローが集積状態に，輸送費用が中程度（i.e. x=5）の場合は分散状態に向かうことがわかる．一方，右図に示すDSO配分状態と比較すると，まず大きな違いとして移住を延期領域の有無が挙げられる．移住を実行する領域でのフローの流れは，輸送費用が低いか中程度の場合は集積状態に向かう．移住フローが分散状態へ向かうのは，**図−1**より，輸送費用が非常に高い（i.e. x=20）場合である．従って，DSO配分状態の延期領域を除く両状態の移住フローの性質は次の**命題3**ようにまとめられる．

命題 3

DSO配分状態と動的均衡状態の移住フローは，輸送費用が低い場合は共に集積方向へ，中程度の場合はDSO配分状態は集積方向，動的均衡状態は分散方向と逆の方向へ，高い場合は共に分散方向へ変化する．

命題3より，最適な政策は輸送費用に応じて変化する．まず，輸送費用が低い場合，集積状態へ移住を促進するか，延期させる政策が望ましい．次に，輸送費用が中程度の場合，移住フローは逆方向に向かうため，skilledの意思に反する方向へ移住を促す政策が必要になる．最後に，輸送費用が高い場合，分散状態へ移住を促進させるか，延期させる政策が望ましい．しかし，織田澤・赤松は，動的均衡状態において長期的に実現する人口配分の確率分布に定常状態が存在し，それが人口の初期値に依存しないことを明らかにし，短期的な移住促進政策の効果は長期的には消失してしまうことを指摘している．長期的な視点から次善の政策を検討するためには，DSO配分状態の長期的な性質を明らかにする必要がある．



図−4 動的均衡状態（上）とDSO配分状態（下）

6．おわりに

本研究では，経済環境の不確実性を考慮したCPモデルの社会的最適資源（DSO）配分状態を導出し，経済状態に応じた最適な移住政策の性質を明らかにした．

参考文献

1) P.Krugman, “Increasing Return and Economic Geography,” Journal of Political Economy 99, pp.483-499, 1991a.
2) 織田澤利守,赤松隆: 集積経済下における移住タイミング選択の均衡ダイナミクス,土木学会論文集D,(投稿中).
3) R. Forslid, G.I.P. Ottaviano, “An Analyticaly Solvable Core-Periphery Model,” Journal of Economic Geography 3, pp.229-240, 2003.
4) Ralf Korn, “Some applications of impulse control in mathematical finance,” Mathematical Methods of Operations Research, pp.493-518, 1999.
5) P.Krugman, “History versus Expectations,” The Quarterly Journal of Economics 106, pp.651-667, 1991b.
6) Ji-Ming Peng, Zhenghua Lin,“A Non-interior Continuation Method for Generalized Linear Complementarity Problems,” Mathematical Programming, Vol.86, pp.533-563, 1999.