流出事故の "低頻度・大損害" 特性を考慮したリスク回避的危険物輸送問題[*1]

Mixed Strategies for Catastrophe Averse Routing of Hazardous Materials [*1]

長江 剛志[*2] ・赤松 隆[*3]

By Takeshi NAGAE[*2] and Takashi Akamatsu[*3]

1　はじめに

先進工業国において，可燃性液体や放射性物質などの危険物の日常的な輸送は欠かせない．一方，これらの危険物が (交通事故などによって) 輸送中に流出した場合，周辺の住民・環境・経済に甚大な損害を及ぼす．本研究では，こうした流出事故が持つ低頻度・大損害特性 (後述) を考慮しつつ，そのリスクを最小限に抑える輸送計画問題に対する定量的分析手法を開発する．

このような危険物輸送経路選択問題に関しては，数多くの研究蓄積が存在し，商用の意思決定支援システムも開発されている．しかし，これらの従来研究の多くは，危険物流出事故に特有の，"滅多に起こらないが，生起すれば大惨事を招く" という LPHC (*Low Probability with High Consequence*: 低頻度・大損害) 特性を適切に考慮できていない．具体的には，従来のモデルでは，(本来，推計することが極めて困難なはずの) 各経路での流出事故の生起確率が，当該経路長を単調変換したものに置き換えられてしまっている．そして，それ故に，これらのモデルが不適切な経路を導き得ることが指摘されている [1, 2]．

Bell[2] は，こうした LPHC 特性を考慮する場合，単一の経路に全ての危険物輸送車両を集中させるよりも，複数の経路に輸送車両を分散させる方が，よりロバストであることを示した．そして，その各経路への輸送量を決定する問題 (以下，"混合戦略輸送問題") を，maximin 問題として定式化し，数値解法を提案した．しかし，この手法は，Bell[2] 自身が認めるように，現実の交通ネットワークを対象とした定量的評価の観点からは，以下の 2 つの問題点を残している：i) 最適戦略の一意性が保証されない；ii) 提案解法が heuristic であり，その大域的収束や効率性が保証されていない．

そこで，本研究では，LPHC 特性を考慮した危険物の混合戦略輸送問題に対して，現実的な規模のネットワークにも適用可能な定量的分析手法を開発する．具体的には，まず，Bell[2] の混合戦略輸送モデルを，より一般的な枠組へと拡張する．次に，こうして一般化された輸送計画問題が凸計画問題に帰着することを示す．そして，この凸計画問題が，交通計画の分野でよく知られる logit 型確率的均衡交通配分モデルと共通の数理構造を持つことを明らかにする．最後に，この数理特性を活用することで，サイクルを含む大規模な一般ネットワークに対しても効率的で大域的収束の保証された解法アルゴリズムを開発する．

2　モデルの枠組

ある (サイクルを含む) 一般的な有向グラフで表わされるネットワーク $\mathcal{G}$ を考え，そのノード集合を $N \equiv \{1, \cdots, \mathrm{N}\}$，リンク集合を $L \equiv \{1, \cdots, \mathrm{L}\}$ と記述する．ネットワーク上に 1 つの起終点ペア (o, d) を考え，その経路集合を K と記述する．

このネットワーク上で，1 単位の危険物輸送車両が何らかの事故に巻き込まれ，周辺地域に被害をもたらす事象を "流出事故" と呼び，あるリンク $ij \in L$ 上で流出事故が発生する事象を "リンク ij 上の流出事故" と呼ぶ．複数のリンク上で同時に流出事故が発生することはないものと仮定する．本研究では，リンク ij 上の流出事故によって発生する社会的損失 (潜在的暴露) を，当該リンクから一定距離内の居住者人口 c_{ij} として定義する．

ネットワーク $\mathcal{G}$ 上のいずれかのリンクで流出事故が発生する事象を "ネットワーク上の流出事故" と呼ぶ．ネットワーク上の事故を与件としたリンク ij 上の流出事故の条件付生起確率 (以下，単にリンク ij の事故確率) を q_{ij} で表わし，$\boldsymbol{q} \equiv \{q_{ij} | ij \in L\}$ とベクトル表現する．あるリンク事故確率 $\boldsymbol{q}$ の下で，1 単位の危険物が

[*1] キーワーズ：危険物輸送，カタストロフ回避，低頻度・大損害事象，確率的均衡交通配分

[*2] 正会員　博士（情報科学）　神戸大学大学院自然科学研究科 (〒657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1)

[*3] 正会員　工博　東北大学大学院　情報科学研究科 (〒980-8579　仙台市青葉区荒巻字青葉 06)

経路 $k \in K$ を輸送されるときの条件付期待損害を，“経路 k の (期待) 損害” と呼び，

$$C_k(\boldsymbol{q}) \equiv \sum_{ij \in L} c_{ij} q_{ij} \delta_{ij,k}, \quad \forall k \in K. \tag{1}$$

で表わす．ここで，$\delta_{ij,k}$ は，Kronecker のデルタを一般化したもので，経路 k がリンク ij を n 回通過するときに n，経路 k がリンク ij を通過しないとき 0 となる．

輸送計画者は，起終点間の危険物輸送需要を与件として，各経路への輸送量を決定する．経路 k への輸送配分比率を h_k で表し，$\boldsymbol{h} \equiv \{h_k | k \in K\}$ とベクトル表現する．本研究では，ある経路輸送量 $\boldsymbol{h}$ の下でのリンク ij の輸送量に潜在的暴露を乗じたもの：

$$\pi_{ij}(\boldsymbol{h}) \equiv c_{ij} \sum_{k} h_k \delta_{ij,k}, \quad \forall ij \in L. \tag{2}$$

を，リンク ij の暴露 (exposure) と呼ぶ．ここで，$\delta_{ij,k}$ は，式 (1) で用いられているのと同じ，一般化された Kronecker のデルタである．

あるリンク事故確率 $\boldsymbol{q}$ および経路輸送量 $\boldsymbol{h}$ が選択されたときの，(ネットワーク上の流出事故を与件とした) 条件付期待損害を，以下の式で定義する．

$$Z_0(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{q}) \equiv \sum_{k \in K} \sum_{ij \in L} h_k c_{ij} \delta_{ij,k} = \sum_{k \in K} h_k C_k(\boldsymbol{q}) = \sum_{ij \in L} q_{ij} \pi_{ij}(\boldsymbol{h}) \tag{3}$$

以下，$Z_0(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{q})$ を，“($\boldsymbol{h}, \boldsymbol{q}$ の下での) 期待損害” と呼ぶ．

3　基本モデル [2)]

本章では，Bell[2)] の危険物輸送戦略モデル (以下，基本モデル) を概観し，その問題点を示す．

前章に示した枠組の下で，Bell[2)] のモデルは，以下の maximin 問題として定式化される．

$$\begin{aligned} &\text{[P0]} \quad \max_{\boldsymbol{q}}.\ \min_{\boldsymbol{h}}.\ Z_0(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{q}), \\ &\text{s.t.} \quad (\boldsymbol{h}, \boldsymbol{q}) \in \Omega_{\boldsymbol{h}} \times \Omega_{\boldsymbol{q}}. \end{aligned}$$

ここで，$\Omega_{\boldsymbol{h}}$ は経路輸送量 $\boldsymbol{h}$ の許容領域であり，以下の等式制約および非負制約：

$$\sum_{k \in K} h_k = 1, \tag{4}$$

$$h_k \geq 0, \quad \forall k \in K. \tag{5}$$

を満足する領域として定義される；$\Omega_{\boldsymbol{q}}$ は，リンク事故確率 $\boldsymbol{q}$ が満足すべき以下の保存則および非負制約：

$$\sum_{ij \in L} q_{ij} = 1, \tag{6}$$

$$q_{ij} \geq 0, \quad \forall ij \in L \tag{7}$$

から構成される領域である．

基本モデル [P0] は，輸送計画者 (あるいは社会) のカタストロフ回避的な振舞い [1)] を，リンク事故確率について最悪のケースを想定する (i.e. 期待損害を最大にするリンク事故確率を選択する) ことで表現していると解釈できる．

問題 [P0] は，定量的分析を目的とする本研究の立場からは，以下の 2 つの問題点を残している．第 1 に，最適な経路輸送量 $\boldsymbol{h}$ およびリンク事故確率 $\boldsymbol{q}$ の一意性が，一般に，保証されない．第 2 に，問題 [P0] を解くための大域的収束性の保証された効率的アルゴリズムが存在しない．Bell[2)] は，問題 [P0] の数値解法として，最短経路探索と逐次平均法 (MSA: *Method of Successive Averages*) を組合せたアルゴリズムを提案した．この解法は，しかし， heuristic であり，一般的な規模のネットワークに対する大域的収束および効率性は全く保証されていない [2)]．

4　拡張モデル

本章では，前章で述べた maximin 混合戦略輸送モデル [P0] を，より一般的な枠組へと拡張する．この一般化は，混合戦略輸送モデルに対して豊かな経済的解釈を与えるのみならず，現実的な規模のネットワークに対しても効率的な求解アルゴリズムの開発を可能とする．具体的には，まず，問題 [P0] を，輸送計画者が，(期待損失だけでなく) 経路選択の多様性 (variation) に関する選好を持つ枠組へと一般化する．次に，こうして一般化された混合戦略輸送問題の最適性条件より，最適経路選択確率が解析的に求められることを明らかにする．これにより，一般化された混合戦略輸送モデルと等価な 2 つの凸計画問題を導出する．これらは，いずれも，次章において，大域的収束の保証された効率的解法を開発する鍵となる．

本研究では，問題 [P0] の目的関数に経路選択エントロピーを加えた以下の問題を考える．

$$\begin{aligned} &\text{[P1]} \quad \max_{\boldsymbol{q}}.\ \min_{\boldsymbol{h}}.\ Z_1(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{q}) \equiv Z_0(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{q}) - \frac{1}{\theta} H_K(\boldsymbol{h}), \\ &\text{s.t.} \quad (\boldsymbol{h}, \boldsymbol{q}) \in \Omega_{\boldsymbol{h}} \times \Omega_{\boldsymbol{q}}. \end{aligned}$$

ここで，問題 [P1] の目的関数第 2 項に表われる $H_K(\boldsymbol{h})$ は以下の式で定義される経路選択エントロピーである．

$$H_K(\boldsymbol{h}) \equiv -\sum_{k\in K} h_k \ln h_k. \tag{8}$$

問題 [P1] は，その最適性条件の性質を利用することで，双対関係にある 2 つの凸計画問題—— それぞれが，リンク事故確率 $\boldsymbol{q}$ あるいは経路輸送量 $\boldsymbol{h}$ のみを明示的な未知変数とする——に帰着させせられる．まず，問題 [P1] の最小化部分は，$\boldsymbol{q}$ を与件とすれば，

$$Z_1(\boldsymbol{q}) \equiv \min_{\boldsymbol{h}}.\, Z_0(\boldsymbol{h},\boldsymbol{q}) - \frac{1}{\theta}H_K(\boldsymbol{h}), \quad \text{s.t.} \quad \boldsymbol{h}\in\Omega_{\boldsymbol{h}}.$$

と定式化できる．この問題は，経路損害 $\{C_k(\boldsymbol{q})\}$ を経路走行費用と見なした logit 型確率的交通配分問題として解釈できる．これを利用すれば，最適な経路輸送量は，以下の式で解析的に求められる．

$$h_k(\boldsymbol{q}) \equiv \frac{\exp\left[-\theta C_k(\boldsymbol{q})\right]}{\sum_{k'\in K}\exp\left[-\theta C_{k'}(\boldsymbol{q})\right]}, \quad \forall k\in K. \tag{9}$$

これを元の問題 [P1] に代入して整理すれば，リンク事故確率 $\boldsymbol{q}$ のみを未知変数とした以下の凸計画問題：

$$\text{[CP1-Dual]} \quad \max_{\boldsymbol{q}}.\, S_1(\boldsymbol{q}),$$
$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{q}\in\Omega_{\boldsymbol{q}},$$
$$S_1(\boldsymbol{q}) \equiv -\frac{1}{\theta}\ln\sum_{k\in K}\exp\left[-\theta C_k(\boldsymbol{q})\right]. \tag{10}$$

に帰着する．ここで，$S_1(\boldsymbol{q})$ は，$\boldsymbol{q}$ を与件とした期待最小経路損害と解釈できる．問題 [CP1-Dual] の双対問題は，経路輸送量 $\boldsymbol{h}$ のみを未知変数とした以下の凸計画問題として定式化される．

$$\text{[CP1-Primal]} \quad \min_{\boldsymbol{h}}.\, Q_1(\boldsymbol{h}) - \frac{1}{\theta}H_K(\boldsymbol{h}),$$
$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{h}\in\Omega_{\boldsymbol{h}},$$
$$Q_1(\boldsymbol{h}) \equiv \max_{ij\in L}.\, \pi_{ij}(\boldsymbol{h}). \tag{11}$$

凸計画問題 [CP1-Primal] は，その logit 型確率的交通配分モデルと等価な数理構造を活用することで，さらに，リンク輸送量のみを明示的な未知変数とする凸計画問題としても表現できる：まず，式 (9) で表わされる logit 型の経路選択確率は Markov 的な性質を持つため，その経路選択エントロピー $H_K(\boldsymbol{h})$ が以下のようにリンク輸送量のみを用いた表現：

$$H_K(\boldsymbol{h}) = H_L[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{h})] - H_N[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{h})]. \tag{12}$$

に分解できることが知られている [3]．ここで，$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{h})$ は，以下の式で定義されるリンク輸送量のベクトル表現，

$$x_{ij}(\boldsymbol{h}) \equiv \sum_{k\in K} h_k\delta_{ij,k}, \quad \forall ij\in L. \tag{13}$$

$H_L(\boldsymbol{x})$ および $H_N(\boldsymbol{x})$ は，以下の式：

$$H_L(\boldsymbol{x}) \equiv -\sum_{ij\in L} x_{ij}\ln x_{ij}$$
$$H_N(\boldsymbol{x}) \equiv -\sum_{i\in N}\left\{\left(\sum_{j\in O(i)} x_{ij}\right)\ln\left(\sum_{j\in O(i)} x_{ij}\right)\right\}$$

で定義される．ただし，$O(i) \equiv \{j|ij\in L\}$ は，ノード i を起点とするリンクの終点ノード集合である．

これを利用すれば，問題 [P1-Primal] は，リンク選択確率 $\boldsymbol{x} \equiv \{x_{ij}|ij\in L\}$ のみを明示的な未知変数とした，以下の凸計画問題として表現し直せる．

[CP1-Primal-Link]

$$\min_{\boldsymbol{x}}.\, Q_1(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{\theta}\left\{H_L(\boldsymbol{x}) - H_N(\boldsymbol{x})\right\},$$
$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{x}\in\Omega_{\boldsymbol{x}}$$

ここで，$Q_1(\boldsymbol{x})$ は，式 (11) で定義される最大リンク暴露を，リンク輸送量 $\boldsymbol{x}$ を用いて表現しなおしたものである．$\Omega_{\boldsymbol{x}}$ は，リンク輸送量 $\boldsymbol{x}$ の許容領域であり，各ノードにおけるリンク輸送量の保存則および非負制約：

$$\sum_{n\in I(i)} p_{ni} - \sum_{m\in O(i)} x_{im} + b_i = 0, \quad \forall i\in N. \tag{14}$$
$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall ij\in L. \tag{15}$$

を満たす領域として定義される．ここで，b_i は，i が起点のとき 1，i が終点のとき -1 となり，それ以外では 0 となる．

こうして得られた凸計画問題 [CP1-Primal] および [CP1-Primal-Link] に対しては，経路選択エントロピーについて知られている 2 つの性質——$H_K(\boldsymbol{h})$ が $\boldsymbol{h}$ についての狭義凸関数であり，$H_L(\boldsymbol{x}) - H_N(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x}$ についての狭義凸関数である [3]——を活用することで，目的関数 Z_1 の最適解における値，最適解における経路輸送量 $\boldsymbol{h}$ およびリンク輸送量 $\boldsymbol{x}$ について一意性が保証される．一方，双対問題 [CP1-Dual] に対しては，期待最小経路損害 $S_1(\boldsymbol{q})$ がリンク事故確率 $\boldsymbol{q}$ についての凹関数 (経路期待損害 $\{C_k|k\in K\}$ については狭義凹関数) であることから，最適解における目的関数値および経路損害 $\{C_k\}$ は一意に決定されるが，最適なリンク事故確率

$\boldsymbol{q}$ については一意性が保証されない (ただし，$\boldsymbol{q}$ が一意に決まらないことは，次章で述べる数値解法の大域的収束や効率性には何らの影響も及ぼさない).

5　数値計算

本章では，一般化された maximin 混合戦略輸送問題 [P1] と等価な凸計画問題 [CP1-Dual] に対する大域的収束が保証された効率的求解法として，logit 型確率的交通配分アルゴリズムと勾配法を組み合わせた数値計算方法を示す．紙面の制約上，本稿では，ある実行可能解 $\boldsymbol{q}$ に対して，降下方向および目的関数値を効率的に評価する方法を示す．具体的には，あるリンク事故確率 $\boldsymbol{q}$ における目的関数の値 $Z_1(\boldsymbol{q})$ およびその勾配 $\nabla Z_1(\boldsymbol{q})$ が，logit 型確率交通配分アルゴリズムを用いて効率的に計算できることを示す．

まず，ある実行可能解 $\boldsymbol{q}$ における目的関数の勾配を $\nabla Z_1(\boldsymbol{q})$ とするとき，その ij 番目要素は，以下の式：

$$[\nabla Z_1(\boldsymbol{q})]_{ij} \equiv \frac{\partial S_1(\boldsymbol{q})}{\partial q_{ij}} = \pi_{ij}(\boldsymbol{q}), \quad \forall ij \in L. \tag{16}$$

で表わされる．ここで，$\pi_{ij}(\boldsymbol{q})$ は，リンク事故確率を $\boldsymbol{q}$ としたときのリンク ij の暴露であり，任意の $ij \in L$ について，以下の式で定義される．

$$\pi_{ij}(\boldsymbol{q}) \equiv c_{ij}x_{ij}(\boldsymbol{q}) \equiv c_{ij}x_{ij}(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{q})), \tag{17}$$

ここで，$h_k(\boldsymbol{q})$ は，式 (9) で定義される，リンク事故確率 $\boldsymbol{q}$ に対する最適な経路輸送量である．

式 (16)~(17) は，$\boldsymbol{q}$ における目的関数の勾配 $\nabla Z_1(\boldsymbol{q})$ が，各経路 $k \in K$ の (輸送 1 単位あたりの) 期待損害 $C_k(\boldsymbol{q})$ を当該経路の “走行費用” と見なしたときの logit 型の確率交通配分 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}) \equiv \{x_{ij}(\boldsymbol{q}) | ij \in L\}$ を用いて求められることを意味している．以下では，対象ネットワークがサイクルを含む場合，あるいはシステマティックな経路の限定が困難な場合に対しても適用可能な，Bell[4) および Akamatsu[5) の方法を概説しよう．

Bell-Akamatsu アルゴリズム [4, 5) は，リンク輸送量 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{q})$ および期待最小経路損害 $S_1(\boldsymbol{q})$ の評価を，ある線形方程式を解くことに帰着させるものであり，サイクルを含む一般ネットワークに対してもその評価が効率的であることが知られている．その手続きは，以下のようにまとめられる：まず，任意の 2 ノード $i, j \in N$ 間の “重み” を以下のように設定する．

$$W_{ij}(\boldsymbol{q}) \equiv \begin{cases} \exp\left[-\theta c_{ij} q_{ij}\right] & \text{if } ij \in L, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{18}$$

このとき，期待最小損害 $S_1(\boldsymbol{q})$ は，

$$S_1(\boldsymbol{q}) = -\frac{1}{\theta} \ln V_{od}(\boldsymbol{q}). \tag{19}$$

と求められ，リンク輸送量 $x_{ij}(\boldsymbol{q})$ は，以下の式：

$$x_{ij}(\boldsymbol{q}) = \frac{V_{oi}(\boldsymbol{q}) W_{ij}(\boldsymbol{q}) V_{jd}(\boldsymbol{q})}{V_{od}(\boldsymbol{q})}, \quad \forall ij \in L. \tag{20}$$

で求められる．ここで，$V_{ij}(\boldsymbol{q})$ は，以下に定義される行列の i 行 j 列要素である．

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{q}) \equiv [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{W}(\boldsymbol{q})]^{-1} - \boldsymbol{I}. \tag{21}$$

$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{q})$ は $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$ 行列で，その i 行 j 列要素が式 (18) で定義される．$\boldsymbol{I}$ は $\mathrm{N} \times \mathrm{N}$ 単位行列である．

なお，目的関数の勾配 $\nabla Z_1(\boldsymbol{q})$ は，そのままでは，問題 [CP1-Dual] の許容降下方向とはならないため，各繰り返し計算において，この勾配を許容領域 $\Omega_{\boldsymbol{q}}$ に射影する必要がある．この操作は，$\Omega_{\boldsymbol{q}}$ が 1 本の線形制約と非負制約のみから構成されるため，簡単な線形変換によって効率的に実現できる．その詳細および数値計算結果については，講演会において報告する予定である．

6　おわりに

本研究では，低頻度・大損害特性を明示的に考慮した危険物輸送問題に対する定量的分析のための枠組を提案した．そして，現実的な規模の (サイクルを含んだ) 一般ネットワークに対しても効率的に輸送戦略を評価できる数値計算法を開発した．

参考文献

1) Erkut, E. and Ingolfsson, A.: Catastrophe avoidance models for hazardous materials route planning, *Transportation Science*, Vol. 34, No. 2, pp. 165–179, 2000.
2) Bell, M. G. H.: Mixed route strategies for the risk-averse shipment of hazardous materials, *Networks and Spatial Economics*, Vol. 6, pp. 253–265, 2006.
3) Akamatsu, T.: Decomposition of path choice entropy in general transport networks, *Transportation Science*, Vol. 31, No. 4, pp. 349–362, 1997.
4) Bell, M. G. H.: Alternative to Dial’s logit assignment algorithm, *Transportation Research B*, Vol. 29B, No. 4, pp. 287–295, 1995.
5) Akamatsu, T.: Cyclic flows, Markov process and stochastic traffic assignment, *Transportation Research B*, Vol. 30, No. 5, pp. 369–386, 1996.