

階層型指数劣化ハザードモデルによる舗装ひび割れ過程のモデル化*

Modelling Pavement Cavement Progression Processes by Hierarchical Exponential Hazard Models*

林秀和**・貝戸清之***・熊田一彦****・佐藤正和*****・小林潔司*
by Hidekazu HAYASHI**, Kiyoyuki KAITO***, Kazuhiko KUMADA****,
Masakazu SATO*****and Kiyoshi KOBAYASHI*****

1. はじめに

道路舗装の劣化現象の中でも、ひび割れの進行過程は複雑である。一般に、道路舗装の劣化メカニズムの相違により、縦ひび割れ、横ひび割れ、面ひび割れ、ポットホール等に代表されるように、ひび割れは多様な形態で発生する。さらに、ひび割れ形態により、道路舗装の劣化メカニズムが異なる場合が多い。道路舗装の維持補修政策を検討する上で、ひび割れの発生形態に着目した道路舗装の劣化過程の時間管理を行うことが重要である。近年劣化過程を統計モデルにより表現する手法、とりわけハザードモデルを用いた劣化予測に関する研究の発展が著しいが、著者らの知る限り、このようなひび割れ発生形態の多様性に着目して、ひび割れ進行過程を分析した研究事例は見当たらない。

本研究では、道路舗装に発生するひび割れによる損傷度とひび割れ形態という2種類の離散的状態変数を用いて表現する。さらに、舗装のひび割れ進行過程を記述するための階層的劣化指数ハザードモデルを定式化し、ひび割れ進行過程をマルコフ推移確率で表現する方法を提案する。その上で、舗装特性、道路の構造特性や交通環境がひび割れの進行過程に及ぼす影響を分析する。

2. 本研究の基本的な考え方

(1) 従来の研究概要

統計的な劣化予測モデルは、多くの劣化サンプルから、劣化過程の背後に存在する規則性をモデル化することを目的とする。アセットマネジメントの分野でも、例えばShin and Madanat¹⁾は、道路舗装のひび割れ開始時刻を予測するためのワイブル劣化ハザードモデルを提

案している。また、劣化過程による健全度間の垂直的な推移関係を多段階ハザードモデルにより記述し、劣化過程を記述するマルコフ推移確率を推計する方法がいくつか提案されている²⁾。しかし、これらのモデルはいずれも単一の健全度指標を用いて劣化過程を記述することを目的としており、複数の状態変数で記述されるような劣化過程を対象としていない。

ひび割れ過程は、ひび割れの損傷度とひび割れの形態という2つの異なる状態変数を用いて記述できる。この内、ひび割れの損傷度は、劣化とともに損傷度が進行するという垂直的な推移関係に従う。一方、ひび割れの形態に関しては、複数のひび割れタイプの中で、どのタイプに推移するかという水平的な推移関係が問題になる。このように、ひび割れ進行過程は、垂直的・水平的な推移関係を同時に有する確率過程としてモデル化できる。津田らが開発した多段階劣化ハザードモデルは、健全度間の垂直的な推移関係をモデル化することを目的としている。一方、水平的な推移関係に関しては、推移後の状態が複数個存在するようなmulti destination型のハザードモデル³⁾を用いて記述することができる。したがって、ひび割れ進行過程は、2.(2)で説明するように、複数のひび割れタイプにわたり多段階に損傷度が進行していくような階層的ネットワーク型劣化過程として記述することができる。本研究では、このような問題意識に基づいて、多段階指数劣化ハザードモデルに、multi destination型ハザードモデルを組み込んだような階層型指数劣化ハザードモデルを提案する点に新規性がある。

(2) ひび割れ進行過程

いま、道路舗装のひび割れ状態を、ひび割れの程度の大きさを表す損傷度と、舗装のひび割れ形態を表すひび割れタイプという2種類の離散変数を用いて表現しよう。状態変数 i ($i = 0, 1, \dots, L$)を用いて損傷度を表現しよう。 $i = 0$ はひび割れが発生していない状況を、 $i = L$ はひび割れがもつとも進行した状態を表す。損傷度が $i = L$ に到達した場合には、直ちに道路舗装の補修が実施される。一方、ひび割れのタイプを状態変数 j ($j = 1, \dots, R$)で表現する。たとえば、本研究の適用

*キーワード: 道路舗装, ひび割れ過程, 階層型指数ハザードモデル, マルコフ過程

** 学生員 京都大学大学院工学研究科都市社会工学専攻
(〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

*** 正会員 博(工)株式会社BMC
(〒261-7125 千葉市美浜区中瀬2-6 WBG 25階)

**** 正会員 中日本高速道路株式会社 中央研究所 舗装研究室
(〒194-8508 東京都町田市忠生1-4-1)

***** 正会員 中日本高速道路株式会社 中央研究所 舗装研究室
(〒194-8508 東京都町田市忠生1-4-1)

*6 フェロー会員 工博 京都大学教授 経営管理大学院
(〒606-8501 京都市左京区吉田本町)

表-1 ひび割れ状態の表現方法

損傷度	ひび割れタイプ		
	縦割れ	横割れ	面割れ
$i = 0$	(0, 0)		
$i = 1$	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)
$i = 2$	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)
$i = 3$	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)

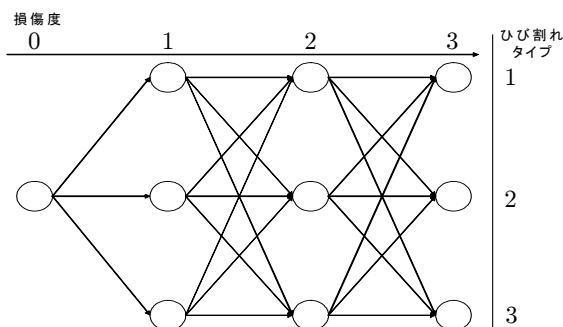


図-1 ひび割れ進行過程

事例では、ひび割れタイプとして、縦ひび割れ、横ひび割れ、面ひび割れという3つのタイプを取り上げている。以上の2種類の状態変数を用いて、舗装のひび割れ状態を、損傷度 i ($i = 1, \dots, L$) と、ひび割れタイプ j ($j = 1, \dots, R$) のペア (i, j) で表そう。以下、状態変数のペア (i, j) を劣化状態と呼ぶ。表-1には、本研究の適用事例で用いる劣化状態をリストアップしている。本適用事例では、状態変数 i, j の上限値は、それぞれ $L = 3, R = 3$ に設定されている。

舗装が補修された直後には、舗装にひび割れが発生しておらず、劣化状態は $(0, 0)$ で表される。補修時刻から時間が経過し、舗装に初期のひび割れが発生する。ひび割れ状態が軽微であれば、損傷度 $i = 1$ の状態に推移する。そのとき、ひび割れの形態が、縦ひび割れ、横ひび割れ、面ひび割れかにより、劣化状態は $(1, 1), (1, 2), (1, 3)$ のいずれか1つに推移する。舗装表面を一定の区画に分割するとともに、各区画ごとに、ひび割れの損傷度とひび割れタイプを定義する。その場合、1つの区画の中に複数のひび割れが存在する可能性も少なくない。その際、最も損傷度の大きいひび割れに着目し、その区画の劣化状態を定義する。ここで、たとえば損傷度 $i = 1$ 、横ひび割れ $j = 2$ (すなわち、劣化状態 $(1, 2)$) と判定されたある道路区画に着目しよう。この道路区画において、新たに縦ひび割れや面ひび割れが発生しても、損傷度が1に留まる限り、その区画の劣化状態の判定結果は $(1, 2)$ の状態に留まると考える。すなわち、損傷度が最初に判定されたひび割れを対象として、ひび割れタイプが定義され、損傷度が進行しない限りひび割れタイプは変更されないと考える。したがって、劣化状態 $(1, 2)$ と判定された

区間でも、時間の経過とともに縦ひび割れ、面ひび割れが発生し、その中で縦ひび割れ ($i = 1$) が進行し損傷度 $i = 2$ の状態に到達し、劣化状態が $(2, 1)$ に推移することも起こりえる。すなわち、劣化状態の推移は、常に損傷度が増加する方向で、ひび割れタイプの中の1つの状態に推移することになる。図-1は劣化状態の進行過程を表現している。同図に示すように、同一損傷度を有する劣化状態間の推移は考えない。同図において、道路舗装が劣化状態 $(3, 1), (3, 2), (3, 3)$ に到達した場合、舗装の補修が直ちに実施される。したがって、これら3つの劣化状態は、ひび割れ進行過程における終局状態(吸収状態)と位置づけることができる。この時、ひび割れ過程は、図-1に示すような階層的なツリー状ネットワークとして表現することができる。本研究では、このようにツリー状ネットワークで表現されるひび割れ進行過程を、階層的指数劣化ハザードモデルを用いて表現する。

(3) 定期測定とひびわれ進行過程

ひび割れ進行過程は、予防補修が実施されない限り、初期劣化状態 $(0, 0)$ から、図-1で表されるネットワーク中の1つの経路をたどり、最終的に吸収状態 $(L, 1), (L, 2), (L, 3)$ の中の1つに到達する。しかし、時間軸上の限られた時刻においてのみ道路舗装の劣化状態を測定する場合、測定できるのはその時刻における劣化状態 (i, j) のみである。いま、時間軸上の2つの時刻 τ_A と τ_B ($\tau_A < \tau_B$) においてひび割れ測定が実施され、ひび割れの劣化状態がそれぞれ $h(\tau_A) = (i, j)$, $h(\tau_B) = (l, r)$ であることが判明したとしよう。たとえば、図-1の例で、 $h(\tau_A) = (1, 2)$, $h(\tau_B) = (3, 1)$ であると仮定する。この場合、劣化状態 $(1, 2)$ から $(3, 1)$ に推移する経路として、図示する3つの経路が存在する。しかし、定期測定の結果からは、実際のひび割れがどのような経路をたどったのかを知ることはできない。また、ひび割れの損傷度も時刻 τ_A と τ_B の間で、 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ と2回推移しているが、損傷度が推移した時刻に関する情報を獲得することができない。このように、定期測定では、2つの定期測定時刻における劣化状態を測定できるが、劣化状態が変化した時刻とひび割れが進行した経路に関する情報を獲得することは不可能である。したがって、階層的指数劣化ハザードモデルを推定するためには、損傷度の推移時刻とひび割れ進行経路に関する情報が入手できないことを前提とした推定方法の開発が必要となる。

3. 階層型指数ハザードモデル

(1) マルコフ推移確率

舗装の劣化過程をマルコフ推移確率を用いて表現しよう。2つの時刻間における舗装状態の不確実な推移状

態をマルコフ推移確率で表現する．時刻 τ_A で測定したひび割れ状態を状態変数 $h(\tau_A) = (i, j)$ を用いて表そう．マルコフ推移確率は，時刻 τ_A で測定された劣化状態 $h(\tau_A) = (i, j)$ を与件とし，将来時刻（たとえば τ_B において劣化状態 $h(\tau_B) = (l, r)$ が生起する条件付推移確率として定義される．すなわち，

$$\text{Prob}[h(\tau_B) = (l, r)|h(\tau_A) = (i, j)] = \pi_{ij,lr} \quad (1)$$

と表せる．このような推移確率を劣化状態ペア (ij, lr) に対して求めれば，マルコフ推移確率行列

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} \pi_{00} & \cdots & \pi_{0L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{o} & \cdots & \pi_{LL} \end{pmatrix} \quad (2)$$

を定義できる．ただし， \mathbf{o} は0要素行列， π_{il} ($i, l = 1, \dots, L$)はブロック行列であり，

$$\begin{aligned} \pi_{00} &= \pi_{00,00} \\ \pi_{0l} &= (\pi_{00,l1} \quad \cdots \quad \pi_{00,lR}) \\ \pi_{il} &= \begin{pmatrix} \pi_{i1,l1} & \cdots & \pi_{i1,lR} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{iR,l1} & \cdots & \pi_{iR,lR} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表される．マルコフ推移確率(2)は所与の2つの時刻 τ_A, τ_B の間において生じる劣化状態間の推移確率を示したものである．補修がない限り常に劣化が進行するので， $\pi_{ij,lr} = 0$ ($i > l$)が成立する．また，推移確率の定義より $\sum_{l=i}^L \sum_{r=1}^R \pi_{ij,lr} = 1$ が成立する．すなわち，マルコフ推移確率に関して

$$\left. \begin{aligned} \pi_{ij,lr} &\geq 0 \\ \pi_{ij,lr} &= 0 \quad (i > l \text{の時}) \\ \sum_{l=i}^L \sum_{r=1}^R \pi_{ij,lr} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

が成立しなければならない．状態 (L, r) ($r = 1, \dots, R$)は，補修のない限りマルコフ連鎖における吸収状態であり， $\pi_{Lr,Lr} = 1$ が成立すると考える．なお，マルコフ推移確率は過去の劣化履歴とは独立して定義される．マルコフ推移確率モデルでは，劣化状態が (i, j) に到達した時刻に関わらず，測定時刻 τ_A から測定時刻 τ_B の間に推移する確率は時刻 τ_A における劣化状態のみに依存するという性質（マルコフ性）を満足する．

(2) 指数ハザードモデル

いま，劣化状態 (i, j) から，劣化状態 $(i+1, r)$ に推移する推移強度を $\rho_{ij,i+1r}$ と表そう．この時，劣化状態 (i, j) から劣化状態 $(i+1, r)$ ($r = 1, \dots, R$)のいずれか1つに推移することにより，劣化状態 (i, j) は終了する．したがって，劣化状態 (i, j) が終了する推移強度は

$$\theta_{ij} = \sum_{r=1}^R \rho_{ij,i+1r} \quad (4)$$

と表せる．いま，劣化状態 (i, j) ($i = 0, \dots, L; j = 0, \dots, R$)の寿命を確率変数 ζ_{ij} で表す．劣化状態 (i, j) の寿命 ζ_{ij} が，確率密度関数 $f_{ij}(\zeta_{ij})$ ，分布関数 $F_{ij}(\zeta_{ij})$ に従うと仮定する．時刻 τ_A における劣化状態が (i, j) であ

り，そこから時間 z_{ij} が経過した時刻で劣化状態 (i, j) が終了する確率密度をハザード関数 $\lambda_{ij}(z_{ij})$ を用いて表現する．この時，ハザード関数は，供用時間 z_{ij} まで劣化状態が (i, j) のまま継続する生存確率 $\tilde{F}_{ij}(z_{ij})$ を用いて，

$$\lambda_{ij}(z_{ij})\Delta z_{ij} = \frac{f_{ij}(z_{ij})\Delta z_{ij}}{\tilde{F}_{ij}(z_{ij})} \quad (5)$$

と表せる．すなわち，ハザード関数 $\lambda_{ij}(z_{ij})$ は，初期時刻から時間 z_{ij} が経過するまで劣化状態 (i, j) の状態が継続したという条件の下で，期間 $[z_{ij}, z_{ij} + \Delta z_{ij}]$ 中に劣化状態 (i, j) が終了する条件付確率である．ハザード関数が経過時間 z_{ij} に依存せず，常に一定値 $\theta_{ij} > 0$ をとる場合，指数ハザード関数

$$\lambda_{ij}(z_{ij}) = \theta_{ij} \quad (6)$$

が成立する．指数ハザード関数(6)を用いることにより，舗装の劣化過程が過去の履歴に依存しないというマルコフ性を表現することが可能となる．ハザード関数 $\lambda_{ij}(z_{ij}) = \theta_{ij}$ を用いれば，劣化状態 (i, j) の寿命が z_{ij} 以上となる確率 $\tilde{F}_{ij}(z_{ij})$ は

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{ij}(z_{ij}) &= \exp\left[-\int_0^{z_{ij}} \lambda_{ij}(u)du\right] \\ &= \exp(-\theta_{ij}z_{ij}) \end{aligned} \quad (7)$$

と表される．すなわち，指数ハザードモデルが得られる．また，式(7)より，劣化状態 (i, j) の寿命分布を表す確率密度関数 $f_{ij}(z_{ij})$ は次式で示される．

$$f_{ij}(z_{ij}) = \theta_{ij} \exp(-\theta_{ij}z_{ij}) \quad (8)$$

これより，測定時刻 τ_A において劣化状態が (i, j) に判定され，次の測定時刻 $\tau_B = \tau_A + Z$ においても劣化状態が (i, j) に判定される確率は

$$\begin{aligned} \text{Prob}[h(\tau_B) = (i, j)|h(\tau_A) = (i, j)] \\ = \exp(-\theta_{ij}Z) \end{aligned} \quad (9)$$

と表される．ただし， Z は2つの測定時刻の間隔を表す．確率 $\text{Prob}[h(\tau_B) = (i, j)|h(\tau_A) = (i, j)]$ はマルコフ推移確率 $\pi_{ij,ij}$ に他ならない．すなわち，指数ハザード関数を用いた場合，推移確率 $\pi_{ij,ij}$ は推移強度 θ_{ij} と測定間隔 Z のみに依存し，時刻 τ_A, τ_B に関する情報を用いなくても推移確率を推定することが可能となる．

(3) 階層型ハザードモデル

時刻 $t = \tau_A$ で測定された道路の劣化状態を $h(\tau_A) = (i, j)$ ， $t = \tau_B$ で測定された道路の劣化状態を $h(\tau_B) = (l, r)$ とする．測定間隔 $Z = \tau_B - \tau_A$ の間に劣化状態が (i, j) から (l, r) に推移する確率 $\pi_{ij,lr}(Z)$ は，表-2のように一般化できる．ここで， $\eta_{ij,lr} = \theta_{ij} - \theta_{lr}$ である．これらの導出過程は紙面の都合上割愛する．

4. マルコフ推移確率の推定方法

(1) 定期測定データの内容

道路舗装のひび割れ状況に関する合計 K 個の定期測定データが得られたとしよう．測定サンプル k ($k =$

表-2 マルコフ推移確率の一般型

$$\begin{aligned}
 \pi_{ij,ij} &= \exp(-\theta_{ij}Z) \\
 \pi_{ij,i+1r}(Z) &= \frac{\rho_{ijr}}{\theta_{ij}-\theta_{i+1r}} \{-\exp(-\theta_{ij}Z) + \exp(-\theta_{i+1r}Z)\} \\
 \pi_{ij,lr} &= \sum_{m=i}^l \sum_{r(i+1)=1}^R \cdots \sum_{r(l-1)=1}^R \left(\prod_{n=i}^{m-1} \frac{\rho_{nr(n)r(n+1)}}{\eta_{nr(n),mr(m)}} \right) \left(\prod_{n=m}^{l-1} \frac{\rho_{nr(n)r(n+1)}}{\eta_{n+1r(n+1),mr(m)}} \right) \exp(-\theta_{mr(m)}Z) \\
 \pi_{ij,Lr} &= \sum_{m=i}^L \sum_{r(i+1)=1}^R \cdots \sum_{r(L-1)=1}^R \left(\prod_{n=i}^{m-1} \frac{\rho_{nr(n)r(n+1)}}{\eta_{nr(n),mr(m)}} \right) \left(\prod_{n=m}^{L-1} \frac{\rho_{nr(n)r(n+1)}}{\eta_{n+1r(n+1),mr(m)}} \right)
 \end{aligned}$$

1, ..., K)には, 2個の連続する定期測定が実施されたカレンダー時刻 τ_A^k と τ_B^k と, 各測定で計測された道路区間の劣化状態 $h(\tau_A^k), h(\tau_B^k)$ に関する情報が記述されている. 測定サンプルにより, 測定間隔が異なっても差し支えない. 測定サンプル k の測定間隔を $Z^k = \tau_B^k - \tau_A^k$ と定義する. さらに, 2つの測定時刻における劣化状態の推移パターンに基づいて, ダミー変数 $\delta_{ij,lr}^k$ ($i, l = 0, \dots, L; j, r = 0, \dots, R; k = 1, \dots, K$)を

$$\delta_{ij,lr}^k = \begin{cases} 1 & h(\tau_A^k) = (i, j) \\ & h(\tau_B^k) = (l, r) \text{の時} \\ 0 & \text{それ以外の時} \end{cases} \quad (10)$$

と定義する. さらに, 道路のひび割れ劣化速度に影響を及ぼす, 道路の構造特性や使用環境を特性ベクトル $\mathbf{x}^k = (x_1^k, \dots, x_M^k)$ で表す. ただし, x_m^k ($m = 1, \dots, M$)は道路区間サンプル k の m 番目の特性変数の測定値である. 定期測定スキームの下で得られる測定サンプル k が有する情報は $\xi^k = (\delta_{ij,lr}^k, Z^k, \mathbf{x}^k)$ として整理できる.

一方, 道路区間サンプル $k = (k = 1, \dots, K)$ の劣化状態の推移強度を指数ハザード関数

$$\lambda_{00}^k(z_{00}^k) = \theta_{00}^k = \rho_{000}^k \quad (11)$$

$$\lambda_{ij}^k(z_{ij}^k) = \theta_{ij}^k = \sum_{r=1}^R \rho_{ijr}^k \quad (12)$$

$$(i = 0, \dots, L-1; j = 0, \dots, R)$$

を用いて表現しよう. 道路ひび割れの劣化過程を特徴づける推移強度 ρ_{ijr}^k ($i = 0, \dots, L-1; j, r = 0, \dots, R, k = 1, \dots, K$)は道路区間の特性ベクトルに依存して変化すると考え, 推移強度 ρ_{ijr}^k を特性ベクトル \mathbf{x}^k を用いて

$$\rho_{ijr}^k = \mathbf{x}^k \beta_{ijr}^k \quad (13)$$

と表そう. ただし, $\beta_{ijr}^k = (\beta_{ijr}^1, \dots, \beta_{ijr}^M)$ は未知パラメータ β_{ijr}^m ($m = 1, \dots, M$)による行ベクトルである. 記号 \cdot は転置操作を表す. 測定サンプル情報 ξ^k ($k = 1, \dots, K$)に基づいて推移強度関数(13)を推定することになる. 4.(2)では, 推移強度関数を推定する方法について述べる. 指数ハザード関数を推計できれば, 階層型ハザードモデルを用いて, 3.(3)で言及した方法によりマルコフ推移確率を算定できる.

(2) ハザードモデルの推定方法

測定サンプル k に関して獲得できる情報は $\xi^k = (\delta_{ij,lr}^k, Z^k, \mathbf{x}^k)$ である. 記号「 $\bar{\cdot}$ 」は実測値であることを示す. マルコフ推移確率には各劣化状態における推移強度 ρ_{ijr}^k ($i = 0, \dots, L-1; j, r = 0, \dots, R; k = 1, \dots, K$)

が含まれるが, 推移強度は道路区間の特性ベクトル \mathbf{x}^k を用いて式(13)で表現できる. また, 推移確率はデータが観察された測定間隔 Z^k にも依存する. このことを明示的に表すため推移確率 $\pi_{ij,lr}$ を実測データ $(\bar{Z}^k, \bar{\mathbf{x}}^k)$ と未知パラメータ $\beta = (\beta_{000}, \dots, \beta_{L-1RR})$ の関数として $\pi_{ij,lr}(\bar{Z}^k, \bar{\mathbf{x}}^k; \beta_{ijr})$ と表そう. K 個の道路区間の劣化現象が互いに独立であると仮定すれば, 全サンプルの劣化推移パターンの同時生起確率密度を表す対数尤度関数を

$$\begin{aligned}
 & \ln[\mathcal{L}(\beta)] \\
 &= \ln \left[\prod_{i=0}^{L-1} \prod_{j=0}^R \prod_{l=0}^{L-1} \prod_{r=0}^R \prod_{k=1}^K \{ \pi_{ij,lr}(\bar{Z}^k, \bar{\mathbf{x}}^k; \beta_{ijr}) \}^{\delta_{ij,lr}^k} \right] \\
 &= \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^R \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{r=0}^R \sum_{k=1}^K \delta_{ij,lr}^k \ln [\pi_{ij,lr}(\bar{Z}^k, \bar{\mathbf{x}}^k; \beta_{ijr})] \quad (14)
 \end{aligned}$$

と表わせる. 測定データ $\delta_{ij,lr}^k, \bar{Z}^k, \bar{\mathbf{x}}^k$ はすべて確定値であり, 対数尤度関数は未知パラメータ β の関数である. ここで, 対数尤度関数(14)を最大にするようなパラメータ値 β の最尤推定値は, パターン法などに代表される最適探索法によって求めることができる.

5. おわりに

本研究では, 道路舗装のひび割れによる劣化状態を, 損傷度とひび割れ形態という2つの状態変数で表現した. その上で, 劣化状態間の推移確率を階層型指数劣化ハザードモデルで表現するとともに, ひび割れの進行状況を階層的ネットワーク特性を有するマルコフ過程として記述する方法を提案した. 階層型ハザードモデルの導出過程および提案モデルを用いた実証分析の結果については発表時に報告させていただきたい.

参考文献

- 1) Shin, H.C., and Madanat, S.M.: Development of stochastic model of pavement distress initiation, *Journal of Infrastructure Planning and Management*, No.744/IV-61, pp.61-67, 2003.
- 2) 例えば, 津田尚胤, 貝戸清之, 青木一也, 小林潔司: 橋梁劣化予測のためのマルコフ推移確率の推定, 土木学会論文集, No.801/I-73, pp.68-82, 2005.
- 3) Lancaster, T.: *The Econometric Analysis of Transition Data*, Cambridge University Press, 1990.